F2557

1
TOMUL 33
1974

1975 FEB 21

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

Comitetul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil,*
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct,*
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ŞTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuţa poştală 2001, Bucureşti, România, sau la reprezentanţii săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă, se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 33, nr. 1 1974

SUMAR

STUDII

ŞT. ZAREA, N. VASILIU, Comportarea atenuatorului-derivaţie plin cu lichid faţă de o undă de presiune simplă 3

T. OROVEANU, Asupra unei ecuaţii neliniare din teoria filtrării 15

DOINA BRĂDEANU, Formule numerice în variabilele lui Mises pentru grosimile stratului-limită plan-incompresibil 25

G. BĂRĂNESCU, Echilibrajul momentelor externe ale unor termeni de ordin par odată cu momentul extern al termenilor de ordinul întîi la motorul în linie în doi timpi cu număr par de cilindri şi aprinderi uniform repartizate 39

A. P. STOICESCU, Contribuţii la studiul stabilităţii automobilului cu diferenţial autoblocabil 51

M. RADEŞ, Metode de analiză grafică a răspunsului dinamic al sistemelor mecanice . . . 75

I. DUMITRESCU, C. VENETE, GH. DODESCU, Procedee pentru determinarea eforturilor din prăjinile instalaţiilor de pompaj a ţiţeiului, în regim dinamic, prin utilizarea sistemelor de calcul automat 105

T. PANĂ, VASILICA COSAC, Vibraţiile laterale de încovoiere-răsucire ale grinzii-pendul. I 121

C. STĂNESCU, V. VISARION, Stări de tensiune în teoria plăcilor curbe de mică curbură. I 137

TR. ONEŢ, Contribuţii la studiul articulaţiei plastice în elementele din beton uşor armat 153

D. COŞA, C. PAVEL, Calculul de ordinul II al grinzilor „T" cu talpă lată, flexibilă, la încovoiere dreaptă 177

D. CONSTANTINESCU, Asupra legii fizice a betonului în domeniul curgerii lente liniare 191

D. RAŞEEV, D. ENE, Unele probleme privind armarea sapelor cu trei conuri cu materiale dure 219

P. DODOC, Calculul de gabarit al ocularelor de tip Huygens şi Ramsden 227

RECENZII 243

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóirat adat
278/1975

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
MŰSZAKI KÖNYVTÁR
1848

COMPORTAREA ATENUATORULUI-DERIVAȚIE PLIN CU LICHID FAȚĂ DE O UNDĂ DE PRESIUNE SIMPLĂ

ȘT. ZAREA ȘI N. VASILIU
Institutul Politehnic București

În lucrare se analizează eficacitatea unui atenuator cu lichid care formează o ramificație închisă a unei conducte, utilizîndu-se pentru aceasta metoda undelor asociate de debit și de presiune. Se evidențiază astfel faptul că un atenuator cu lichid nu împiedică propagarea undelor de presiune în conductă protejată, ci, prin fragmentarea acestora în serii infinite de unde de mică intensitate, întîrzie transmiterea suprapresiunii în conducta din aval, dînd astfel posibilitate undelor negative provenite din diverse puncte ale sistemului hidraulic să ajungă la conducta protejată și să atenueze efectul undelor transmise inițial.

1. OBIECTUL LUCRĂRII

Pentru protecția rețelelor de conducte împotriva șocului hidraulic se utilizează în unele cazuri rezervoare sau tronsoane de conductă umplute cu lichid, denumite uzual hidrofoare sau atenuatoare cu lichid. Într-o lucrare anterioară [1] s-a studiat cazul unui astfel de organ, montat în serie pe o conductă. În prezenta lucrare se analizează eficacitatea unui

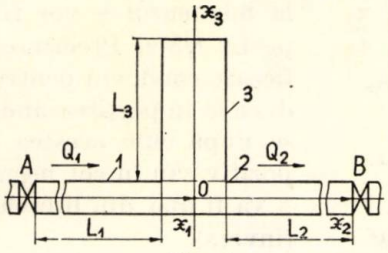


Fig. 1

hidrofor care formează o ramificație închisă a unei conducte (fig. 1), utilizîndu-se în acest scop metoda undelor asociate de debit și de presiune [1] — [6]. Pe această cale se obține o explicație fizică simplă a modului în care atenuatorul — derivație umplut cu lichid protejează un sistem hidraulic împotriva suprapresiunilor care apar datorită șocului hidraulic (lovitura de berbec).

2. NOTAŢII, IPOTEZE, METODA DE CALCUL

Modificarea rapidă a debitului într-un punct oarecare al unui sistem hidraulic este echivalentă cu generarea unor unde de debit, cărora le sînt asociate unde de presiune.

Undele asociate emise astfel se propagă în întreg sistemul, reflectîndu-se şi refractîndu-se în punctele singulare ale acestuia : ramificaţii, schimbări de secţiune, extremităţi, noduri etc. Fiecare pereche de unde asociate modifică starea presiune-debit existentă înaintea trecerii sale în conductele pe care le parcurge. Variaţia presiunii şi a debitului într-o secţiune oarecare se obţine admiţînd principiul suprapunerii efectelor : valorilor presiunii şi debitului din regimul permanent li se adaugă algebric intensităţile undelor trecute prin secţiunea respectivă *de la începutul şocului hidraulic.*

Aplicarea practică a metodei undelor asociate necesită cîteva operaţii preliminare : introducerea unei notaţii care să permită caracterizarea completă a undelor ; imaginarea unui sistem de reprezentare a acestora în scopul realizării unei evidenţe stricte care să asigure exactitatea calculelor, stabilirea relaţiilor dintre undele asociate, determinarea relaţiilor de calcul a intensităţilor undelor generate prin reflecţie şi refracţie de către un organ oarecare în urma primirii unei unde incidente simple.

Caracterul vectorial al undelor asociate impune adoptarea unui sistem adecvat de notare şi reprezentare a acestora. O undă este complet determinată dacă simbolul acesteia este însoţit de trei indici, α, β, γ, reprezentînd, respectiv, numărul de ordine al conductei în care se propagă unda, sensul deplasării şi momentul emiterii acesteia. Deci, undele de presiune se vor nota $p_{\alpha,\beta,\gamma}$, iar cele de debit $q_{\alpha,\beta,\gamma}$. Presiunea şi debitul într-o secţiune δ la momentul γ vor fi notate cu $P\delta,\gamma$, respectiv $Q\delta,\gamma$. Precizarea unui sens pozitiv în fiecare conductă pentru abscise şi viteze, conduce la împărţirea undelor în directe şi inverse, după cum acestea se propagă în sensul pozitiv sau în cel negativ, astfel că indicele β va fi una din literele „*d*" (direct), sau „*i*" (invers).

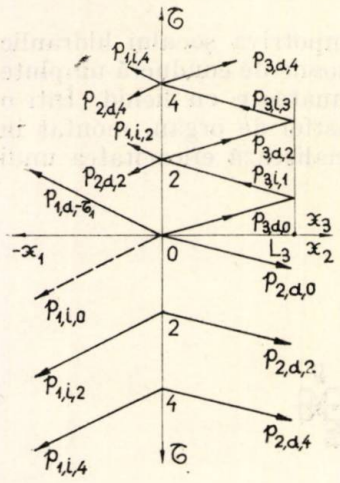


Fig. 2

Urmărirea sistematică a propagării undelor se face prin reprezentarea grafică a deplasării fronturilor acestora, într-un sistem de coordonate format pentru fiecare conductă, din axa acesteia şi axa timpului (fig.2). În acest sistem, fiecărei unde îi corespunde o dreaptă a cărei pantă este proporţională cu celeritatea sa. Undele emise la extremităţile unei conducte în conductele adiacente sînt indicate prin săgeţi marcate şi se regăsesc pe axele corespunzătoare.

Între intensitățile undelor asociate există relațiile :

$$P_{\alpha,d,\gamma} = R_\alpha \cdot q_{\alpha,d,\gamma} \; ; \qquad p_{\alpha,i,\gamma} = - R_\alpha \cdot q_{\alpha,i,\gamma} , \tag{1}$$

stabilite în [2] prin lectura epurei Bergeron și în [3], [4], [5] cu ajutorul teoremei forțelor de impuls. S-a notat cu

$$R_\alpha = \rho \frac{a_\alpha}{A_\alpha} \tag{2}$$

rezistența de undă a conductei marcate prin numărul α ; ρ fiind densitatea lichidului, a celeritatea undelor în conducta α și A_α secțiunea transversală a acesteia.

Analizăm în continuare modul de stabilire al relațiilor de calcul pentru intensitățile undelor generate într-un punct singular de unde asociate simple. Cazurile cele mai simple le reprezintă ramificațiile, variațiile de secțiune și de alte elemente similare. Problema enunțată mai sus se rezolvă în cadrul modelului fluidului perfect, utilizînd ecuația continuității, principiul suprapunerii efectelor și ipoteza egalității presiunilor în vecinătatea elementului respectiv, înainte și după trecerea undelor asociate incidente. Prezentăm spre exemplificare cazul variației bruște de secțiune (fig. 3). Presupunem că la momentul $t = 0$ ajung în secțiunea b comună celor două conducte, o undă de debit $q_{1,d,-\gamma}$, $(\gamma > 0)$, și unda de presiune $p_{1,d,-\gamma}$ corespunzătoare,

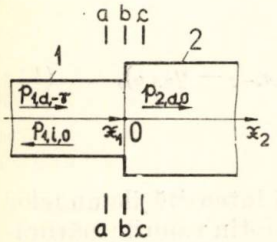


Fig. 3

$$p_{1,d,-\gamma} = R_1 \cdot q_{1,d,-\gamma} . \tag{3}$$

Înaintea trecerii acestora prin secțiunea a, la un moment $t = (0 < \varepsilon \ll \gamma)$, presiunile și debitele în secțiunile a și c din imediata apropiere a secțiunii b sînt egale :

$$P_{1,-\varepsilon} = P_{2,-\varepsilon} ; \qquad Q_{1,-\varepsilon} = Q_{2,-\varepsilon} . \tag{4}$$

Undele asociate incidente generează prin reflecție și refracție perechile de unde :

$$p_{1,i,0} = - R_1 \cdot q_{1,i,0} ; \qquad p_{2,d,0} = R_2 \cdot q_{2,d,0} . \tag{5}$$

La un moment $t = + \varepsilon$, ulterior trecerii acestora prin secțiunile a, respectiv b, sînt satisfăcute relațiile :

$$P_{1,+\varepsilon} = P_{1,-\varepsilon} + P_{1,d,-\gamma} + p_{1,i,0} = P_{2,+\varepsilon} = P_{2,-\varepsilon} + p_{2,d,0} ,$$
$$Q_{1,+\varepsilon} = Q_{1,-\varepsilon} + q_{1,d,-\gamma} + q_{1,i,0} = Q_{2,+\varepsilon} = Q_{2,-\varepsilon} + q_{2,d,0} \tag{6}$$

sau

$$R_1(q_{1,i,0} - q_{1,d,-\gamma}) = R_2 q_{2,d,0} ,$$
$$q_{1,d,-\gamma} + q_{1,i,0} = q_{2,d,0} . \tag{7}$$

Din acest sistem rezultă

$$\frac{q_{1,i,0}}{q_{1,d,-\gamma}} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}, \qquad \frac{q_{2,d,0}}{q_{1,d,-\gamma}} = \frac{2R_1}{R_1 + R_2}, \tag{8}$$

Pentru undele de presiune rezultante se obţin relaţiile :

$$\frac{p_{1,i,0}}{p_{1,d,-\gamma}} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}, \qquad \frac{p_{2,d,0}}{p_{1,d,-\gamma}} = \frac{2R_2}{R_1 + R_2}. \tag{9}$$

Un alt caz frecvent întîlnit îl constituie extremităţile conductelor, caracterizate prin existenţa unei legi $F(P, Q, t) = 0$, legînd presiunea, debitul şi timpul. Admitem că undele incidente, de exemplu directe, $p_{\alpha,d,-\gamma} = R_\alpha q_{\alpha,d,-\gamma}$, ajung la extremitatea unui tronson de conductă α la momentul $t = 0$, unde se reflectă sub forma undelor $p_{\alpha,i,0} = -R_\alpha \cdot q_{\alpha,i,0}$. Presiunea şi debitul satisfac în secţiunea finală a tronsonului, δ, la un moment $t = -\varepsilon < 0$, anterior sosirii undelor incidente, relaţia

$$F(P_{\delta,-\varepsilon}, Q_{\delta,-\varepsilon}, -\varepsilon) = 0. \tag{10}$$

După reflecţia undelor incidente, la un moment $t = +\varepsilon$, sînt satisfăcute relaţiile :

$$F(P_{\delta,+\varepsilon}, Q_{\delta,+\varepsilon}, +\varepsilon) = 0,$$

$$P_{\delta,+\varepsilon} = P_{\delta,-\varepsilon} + p_{\alpha,d,-\gamma} + p_{\alpha,i,0} = P_{\delta,-\varepsilon} + R_\alpha(q_{\alpha,d,-\gamma} - q_{\alpha,i,0}), \tag{11}$$

$$Q_{\delta,+\varepsilon} = Q_{\delta,-\varepsilon} + q_{\alpha,d,-\gamma} + q_{\alpha,i,0}.$$

Deoarece atît starea iniţială $P_{\delta,-\varepsilon}$, $Q_{\delta,-\varepsilon}$, cît şi intensităţile undelor incidente sînt presupuse cunoscute, din acest sistem se obţin valorile mărimilor $p_{\alpha,i,0}$, $q_{\alpha,i,0}$, $P_{\delta,+\varepsilon}$, $Q_{\delta,+\varepsilon}$. În continuare se analizează două cazuri particulare interesante, în care relaţia dintre presiune, debit şi timp este foarte simplă.

a) *Debitul la extremitatea unui tronson este constant.* În acest caz relaţiile (11) capătă forma :

$$Q_{\delta,-\varepsilon} = Q_{\delta,+\varepsilon} = \text{const.},$$

$$P_{\delta,+\varepsilon} = P_{\delta,-\varepsilon} + R_\alpha(q_{\alpha,d,-\gamma} - q_{\alpha,i,0}), \tag{11'}$$

$$0 = q_{\alpha,d,-\gamma} + q_{\alpha,i,0},$$

deci

$$q_{\alpha,i,0} = -q_{\alpha,d,-\gamma}; \qquad p_{\alpha,i,0} = p_{\alpha,d,-\gamma}, \tag{12}$$

adică undele incidente se reflectă integral, unda de debit cu schimbare de semn, iar cea de presiune fără schimbare de semn.

b) *Presiunea este constantă la extremitatea unui tronson de conductă.* Ecuațiile disponibile pentru rezolvarea problemei sînt:

$$P_{\delta_1 - \varepsilon} = P_{\delta_1 + \varepsilon} = \text{const.},$$

$$R_\alpha (q_{\alpha, d, -\gamma} - q_{\alpha, i, 0}) = 0, \tag{13}$$

$$Q_{\delta_1 + \varepsilon} = Q_{\delta_1 - \varepsilon} + q_{\alpha, d, -\gamma} + q_{\alpha, i, 0}.$$

Soluția acestui sistem este

$$q_{\alpha, i, 0} = q_{\alpha, d, -\gamma}; \qquad p_{\alpha, i, 0} = - p_{\alpha, d, -\gamma}, \tag{14}$$

deci și în acest caz reflecția undelor asociate este integrală, dar cu schimbare de semn pentru undele de presiune.

Cazul general corespunde prezenței pe o conductă a unui organ oarecare (pompă, vană etc.). Deoarece analiza acestui caz depășește cadrul lucrării de față, va face obiectul unei alte lucrări.

3. CALCULUL UNDELOR DE PRESIUNE GENERATE DE ATENUATOR ÎN URMA PRIMIRII UNEI UNDE DE PRESIUNE

Pentru a evidenția efectul atenuatorului asupra unei unde de presiune simple, admitem că timpul $T_3 = \dfrac{L_3}{a_3}$, necesar undelor pentru a-l parcurge, este mult mai mic decît cel corespunzător conductelor *1* și *2*. Astfel nu este necesar să se țină seama de undele emise de atenuator și reflectate de organele A și B (vană, pompe etc.).

Se alege ca unitate de timp intervalul T_3, astfel că indicele de timp al simbolului unei unde emise la un moment oarecare $t = \tau \cdot T_3$ va fi τ.

Admitem că organul A emite la momentul $t = - \tau_1 T_3$ ($\tau = - \tau_1$) o undă de debit $q_{1, d, -\tau_1}$, căreia îi este asociată o undă de presiune

$$p_{1, d, -\tau_1} = R_1 q_{1, d, -\tau_1}. \tag{15}$$

S-a notat cu τ_1 timpul necesar undelor pentru a parcurge conducta *1*, exprimat în unități T_3:

$$\tau_1 = L_1 \; a_3 / L_3 \; a_1. \tag{16}$$

La momentul $\tau = 0$, undele asociate emise în conducta *1* ajung la atenuator, unde se reflectă și se refractă, generînd alte trei perechi de unde asociate. Vom studia în continuare numai undele de presiune, ale căror intensități vor fi raportate la intensitatea undei $p_{1, d, -\tau_1}$ și se vor nota astfel:

$$p^*_{\alpha \beta, \gamma} = p_{\alpha, \beta, \gamma} / p_{1, d, -\tau_1}. \tag{17}$$

Intensităţile relative ale undelor de presiune emise în ramificaţie la momentul $\tau = 0$ sînt exprimate prin relaţiile [4], [5]:

$$p^*_{1,i,0} = -\frac{R_1R_2 - R_2R_3 + R_3R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1},$$

$$p^*_{2d,0} = \frac{2R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{18}$$

$$p^*_{3,d,0} = \frac{2R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}.$$

În mod obişnuit diametrele conductelor *1* şi *2* au valori apropiate şi mai mici decît diametrul atenuatorului astfel că rezistenţele de undă ale conductelor ramificaţiei, care sînt prin definiţie pozitive, satisfac relaţia

$$R_1 \cong R_2 > R_3, \tag{19}$$

deci

$$p^*_{1,i,0} \cong \frac{-R_1R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} < 0$$

şi

$$p^*_{2,d,0} = p^*_{3,d,0} > 0.$$

Unda $p_{3,d,0}$, care pătrunde în atenuator, se propagă în timpul T_3 pînă la extremitatea închisă a acestuia, unde debitul fiind constant (nul), se reflectă integral şi fără schimbare de semn, transformîndu-se la momentul $\tau = 1$ în unda

$$p^*_{3,i,1} = p^*_{3,d,0} > 0. \tag{20}$$

În intervalul (0,2 T_3), undele $p^*_{1,i,0}$ şi $p^*_{2,d,0}$ se propagă către organele *A* şi *B*. Deoarece prin ipoteză $T_1 \gg T_3$ şi $T_2 \gg T_3$, vom urmări în continuare numai transformările suferite de undele care parcurg hidroforul.

Unda $p^*_{3,i,1}$ soseşte la ramificaţie la momentul $\tau = 2$, şi generează undele:

$$p^*_{1,i,2} = \frac{4R_1R_2^2R_3}{(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)^2} > 0,$$

$$p^*_{2,d,2} = \frac{4R_1R_2^2R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2} > 0, \tag{21}$$

$$p^*_{3d,2} = -\frac{2R_2R_3(R_3R_1 - R_1R_2 + R_2R_3)}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2} \cong -\frac{2R_1^2R_3(2R_3 - R_1)}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2}.$$

În general, diametrul atenuatorului este sensibil mai mare decît cel al conductelor adiacente. Vom admite în continuare că

$$R_1 \cong R_2 > 2\ R_3,$$

deci $p^*_{3,d,2} > 0$.

Unda $p^*_{3,d,2}$ continuă prin reflecție și refracție procesul de generare a undelor în zona ramificației, suferind aceleași transformări ca și predecesoarea sa, $p^*_{3,d,0}$. Calculul se poate continua în același mod, dar nu este necesar, deoarece se poate demonstra lesne că intensitățile undelor emise în conductele ramificației formează serii geometrice infinite, cu rația

$$N = \frac{R_1R_2 - R_2R_3 - R_3R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \cong \frac{R_1(R_1 - 2R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} > 0. \qquad (22)$$

Dacă se marchează fiecare undă printr-un număr de ordine natural k, atunci la un moment oarecare $\tau = 2K - 2$, $k \geqslant 1$, în conductele ramificației se emit undele :

$$p^*_{1,i,2k-2} = \frac{4R_1R_2^2R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2} N^{k-2} > 0,$$

$$p^*_{2,d,2k-2} = \frac{4R_1R_2^2R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2} N^{k-2} > 0, \qquad (23)$$

$$p^*_{3,d,2k-2} = \frac{2R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} N^{k-1} > 0.$$

În figura 2 se prezintă epura undelor de presiune generate în zona ramificației de unda incidentă inițială.

Stabilirea comportării atenuatorului față de această undă permite calculul variației suprapresiunii relative în conductele adiacente.

Conform principiului suprapunerii efectelor, suprapresiunea relativă într-o secțiune a conductei *1* din imediata apropiere a ramificației, la un moment $\tau = 2n - 2 + \varepsilon$ ulterior emiterii undei cu numărul de ordine n, va fi obținută adăugînd la intensitatea relativă a undei incidente (egală cu unitatea), intensitățile primelor n unde reflectate de hidrofor. Suma acestora este :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} p^*_{1,i,2k-2} = \frac{R_2R_3 - R_1R_2 - R_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} + \qquad (24)$$

$$+ \frac{4R_1R_2^2R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2}(1 + N + \ldots N^{k-2}).$$

Inegalitatea

$$|N| < 1 \qquad (25)$$

este echivalentă cu inegalităţile evidente

$$R_2R_3 + R_3R_1 > 0,$$

$$R_1R_2 > 0,$$

deci este întotdeauna adevărată şi asigură convergenţa seriei geometrice (24). După efectuarea calculelor se obţine

$$S_n = \frac{(R_1 + R_2)(R_2R_3 - R_1R_2 - R_1R_3) + 2R_1R_2^2(1 - N^{n-1})}{(R_1 + R_2)(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)}. \tag{26}$$

Variaţia suprapresiunii relative în secţiunea considerată este dată de relaţia

$$\Delta P^*_{1,2n-2+\varepsilon} = 1 + S_n. \tag{27}$$

Valoarea suprapresiunii relative într-o secţiune a conductei 2 din imediata apropiere a atenuatorului, la un moment $\tau = 2n - 2 + \varepsilon$ ulterior trecerii undei $p^*_{2,d,2n-2}$, este egală cu suma primelor n unde emise în conducta 2 :

$$\Delta P^*_{2,2n-2+\varepsilon} = S'_n = \sum_{k=1}^{n} p^*_{2,d,2k-2} = \tag{28}$$

$$= \frac{2R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} + \frac{4R_1R_2^2R_3}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2}(1 + N + \ldots + N^{k-2}).$$

Calculul sumei seriei geometrice conduce la relaţia

$$S'_n = \frac{2R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} + \frac{2R_1R_2^2}{(R_1 + R_2)(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)}(1 - N^{n-1}). \tag{29}$$

În cazul particular $R_1 = R_2$, prin introducerea notaţiei

$$x = R_3/R_1, \tag{30}$$

relaţiile (26), (27) şi (29) devin :

$$S_n = -\frac{1}{1 + 2x}\left(\frac{1 - 2x}{1 + 2x}\right)^{n-1},$$

$$S'_n = 1 - \frac{1}{1 + 2x}\left(\frac{1 - 2x}{1 + 2x}\right)^{n-1}, \tag{31}$$

$$\Delta P^*_{1,2n-2+\varepsilon} = \Delta P^*_{2,2n-2+\varepsilon} = S'_n.$$

În figurile 4 și 5 se prezintă variația suprapresiunii relative în secțiunile considerate, pentru trei valori ale parametrului x: 16, 49 și 100, cu scopul evidențierii influenței rezistenței de undă a atenuatorului. În cazurile studiate, raportul diametrelor D_3/D_1 are valorile aproximative, 4, 7 și 10.

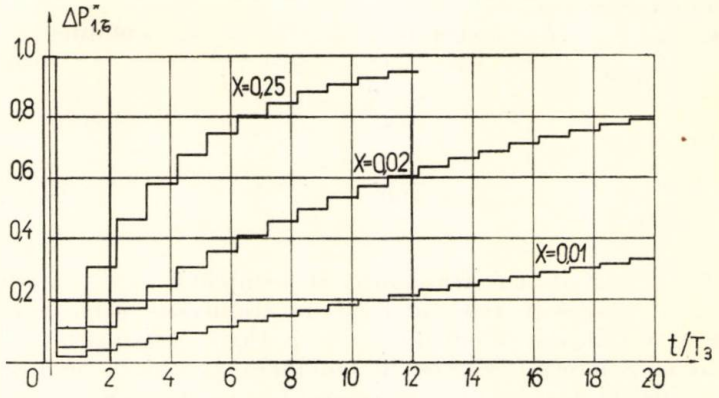


Fig. 4

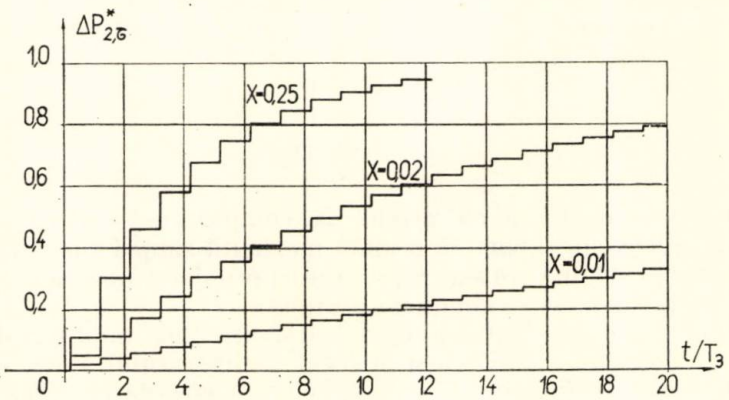


Fig. 5

Prin trecere la limită în relațiile (26) și (29) se obține:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}, \qquad \lim_{n\to\infty} S'_n = \frac{2R_2}{R_1 + R_2}. \tag{32}$$

Se constată că atenuatorul fragmentează unda incidentă într-o serie infinită de unde de intensitate descrescătoare, pe care le transmite în conducta protejată. Intensitățile undelor transmise sînt invers proporțio-

nale cu secţiunea atenuatorului. Deci acesta nu protejează integral conducta din aval, dar întîrzie transmiterea undei incidente în aceasta. Sumele seriilor infinite de unde, generate de atenuator în conductele adiacente ca urmare a recepţionării unei unde simple, se calculează cu formulele corespunzătoare variaţiei bruşte de la secţiunea conductei din amonte la cea a conductei din aval.

În cazul $R_1 = R_3$, trecerea la limită în (32) conduce la relaţiile :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} S'_n = 1. \tag{33}$$

Aceste relaţii indică transmiterea completă a suprapresiunii din conducta din amonte în cea din aval de atenuator, într-un interval de timp teoretic infinit, indiferent de caracteristicile atenuatorului. Intervalul de timp în care suprapresiunea în conducta protejată egalează practic intensitatea undei incidente, depinde direct proporţional de lungimea atenuatorului.

Se constată deci că, transmiterea undei incidente în conducta care trebuie protejată este cu atît mai lentă cu cît volumul atenuatorului este mai mare.

4. CONCLUZII

Rezultatele obţinute cu privire la comportarea atenuatorului cu lichid tip derivaţie, în raport cu o undă incidentă simplă sînt analoage cu cele din lucrarea [1], în care s-a tratat aceeaşi problemă pentru atenuatorul cu lichid montat în serie cu conducta protejată.

Studiul comportării atenuatorului derivaţie într-un sistem hidraulic practic se face în acelaşi mod ca şi în cazul atenuatorului serie, condiţiile la limită concrete avînd un rol determinant în efectuarea calculelor. Cu toate acestea, se poate formula o concluzie cu caracter general, relativă la modul în care atenuatoarele cu lichid realizează protecţia sistemelor hidraulice împotriva suprapresiunilor : prin faptul că fragmentează undele incidente în serii de unde de mică intensitate, atenuatoarele cu lichid întîrzie transmiterea suprapresiunilor în conductele protejate, dînd astfel posibilitatea undelor pozitive reflectate cu schimbare de semn în diverse puncte ale sistemului hidraulic să se întoarcă la conductele protejate şi să atenueze efectul undelor transmise iniţial.

Caracterul unitar al concluziilor furnizate de metoda undelor asociate cu privire la propagarea undelor de presiune în sistemele hidraulice simple atestă utilitatea acestei metode pentru cunoaşterea detaliată, intimă, a fenomenului complex al şocului hidraulic şi posibilitatea aplicării sale pentru studiul cazurilor practice.

Primită la redacţie la 21 august 1973

BIBLIOGRAFIE

1. ST. ZAREA, N. VASILIU, *Analysis of the pressure waves propagation within a buffer reservoir tapped on a pipe system*, Buletinul I.P.B., **XXXV**, N. *1* (1973).
2. L. ESCANDE, *Influence de la liaison entre chambre d'équilibre et canal d'amenée d'une usine hydroéléctrique sur le régime des surpressions*, La Houille Blanche, N *4*, (1949).
3. A. SCHLAG, *La lecture des ondes de coup de bélier sur le tracé de Bergeron*, La Houille Blanche, No. spécial *A* (1957).
4. D. CIOC, *Mecanica fluidelor*, București, E.D.P., 1967.
5. ȘT. ZAREA, N. VASILIU, *L'analyse de l'efficacité de la cheminée d'équilibre par la méthode des ondes associées de débit et de pression*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie Française, **276**, Série *A* (1973).
6. — *Nouvelles relations pour l'étude de l'influence de la cheminée d'équilibre sur une onde incidente simple*, Revue de Mécanique Appliquée, *6* (1973).

ASUPRA UNEI ECUAȚII NELINIARE DIN TEORIA FILTRĂRII

de T. OROVEANU
Institutul de petrol Ploiești

Se consideră ecuația lui Boussinesq din teoria mișcării cu suprafață liberă a lichidelor prin medii poroase. În cazul în care mișcarea este plană, o schimbare de variabile și de funcție reduce această ecuație la o ecuație diferențială ordinară, neliniară, de ordinul al doilea. Se consideră o problemă cunoscută din literatura de specialitate și cu ajutorul unor rezultate de asemenea cunoscute [2], se arată că soluția acestei probleme există și este unică, stabilindu-se în același timp marginea ei inferioară, respectiv superioară. Se examinează apoi o soluție aproximativă cunoscută obținută prin liniarizarea ecuației lui Boussinesq și se constată că această soluție se încadrează în considerațiile teoretice expuse.

1. *Introducere.* Problemele de mișcare cu suprafață liberă a lichidelor prin medii poroase prezintă o serie de dificultăți, chiar atunci cînd se admite valabilitatea legii liniare de filtrare. Nu credem că este necesar să insistăm aci asupra acestor aspecte generale, care sînt semnalate și discutate în literatura de specialitate. Pentru a preciza obiectul acestei lucrări, amintim numai că în cadrul unei teorii aproximative a acestui gen de mișcări, J. Boussinesq a dedus ecuația

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k}{m}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial H}{\partial y}\right)\right], \tag{1}$$

în care H este înălțimea suprafeței libere a lichidului în raport cu planul orizontal Oxy, k coeficientul de filtrare și m porozitatea. Mișcarea este presupusă, în cazul general, nestaționară, fapt care face să apară timpul t ca variabilă în ecuația precedentă.

Cu toate ipotezele simplificatoare și anume aceea că suprafața liberă este apropiată de un plan orizontal și aceea că viteza are componente orizontale care nu depind de înălțimea în raport cu planul Oxy, ecuația precedentă este neliniară. În cazul particular, în care mișcarea este staționară, se observă imediat că nu apare nici o dificultate de ordin matematic, deoarece ecuația (1) devine liniară în raport cu H^2. Atunci cînd mișcarea

este nestaţionară, situaţie care corespunde cu problemele cele mai frecvent întîlnite şi cele mai interesante din punct de vedere practic, găsirea soluţiilor exacte ale ecuaţiei (1) devine dificilă. În literatura de specialitate [1], [3], [9], sînt prezentate şi cele cîteva soluţii exacte existente ale ecuaţiei (1) precum şi mai multe procedee de liniarizare ale acesteia, respectiv soluţiile aproximative găsite pe această cale.

O generalizare a ecuaţiei lui Boussinesq pentru cazul în care coeficientul de filtrare este funcţie de înălţimea punctului considerat în raport cu planul orizontal de referinţă Oxy, a fost dată în lucrarea [5]. Înainte de publicarea acestei lucrări, N. K. Ghirinski [4] a propus o metodă pentru rezolvarea unor astfel de probleme; ulterior, P. Ia. Polubarinova-Kocina [9] a extins această metodă la studiul scurgerilor nestaţionare, utilizînd unele aproximaţii care au ca scop liniarizarea ecuaţiei diferenţiale găsite. Într-o altă lucrare [7], am adus unele precizări şi am ameliorat procedeul de liniarizare propus în [5], prezentînd şi unele soluţii, atît pentru cazul în care mediul poros este neomogen, în sensul precizat mai sus, cît şi pentru acela în care coeficientul de filtrare este constant. O soluţie a unei probleme importante din punct de vedere practic, obţinută pe această cale, a fost prezentată în [6].

În cele ce urmează, vom reveni asupra ecuaţiei lui Boussinesq, în cazul în care mişcarea este plană, în scopul de a efectua un studiu matematic mai riguros al unei probleme destul de simple şi de a compara rezultatele acestuia cu cele cunoscute din literatura de specialitate.

2. *Filtrarea datorită variaţiei nivelului lichidului din rezervor.* Problema la care ne referim este aceea a mişcării apei care se produce într-un strat permeabil adiacent unui rezervor, atunci cînd în acesta din urmă nivelul lichidului variază brusc.

Presupunem că stratul este semiinfinit şi orizontal, întinzîndu-se în lungul axei absciselor de la $x = 0$ la $x = +\infty$. Mişcarea fiind plană, H depinde numai de x şi ecuaţia (1) ia forma

$$2\frac{m}{k}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Condiţia iniţială este

$$t = 0, \qquad H = H_0 \qquad (0 < x < +\infty), \tag{3}$$

H_0 fiind o constantă. De asemenea, condiţia la limită are forma

$$x = 0, \qquad H = H_1 \qquad (0 \leqslant t < +\infty), \tag{4}$$

unde H_1 este tot o constantă; pentru fixarea ideilor, vom presupune $H_1 < H_0$.

Pentru studiul problemei astfel formulată pot fi utilizate rezultatele expuse în [2]. În primul rînd, cu ajutorul schimbării de variabile

$$\xi = \left(\frac{m}{4k\,H_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{t}}, \tag{5}$$

ecuația (2) devine

$$\frac{d^2H^2}{d\xi^2} + 4H_0\,\xi\frac{dH}{d\xi} = 0, \tag{6}$$

iar dacă facem și schimbarea de funcție,

$$\varphi = \frac{1 - \dfrac{H^2}{H_0^2}}{1 - \dfrac{H_1^2}{H_0^2}}, \tag{7}$$

obținem în cele din urmă

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{2\xi}{(1-\alpha\varphi)^{\frac{1}{2}}}\frac{d\varphi}{d\xi} = 0. \tag{8}$$

unde am introdus notația

$$\alpha = 1 - \frac{H_1^2}{H_0^2}, \tag{9}$$

Se constată cu ușurință că funcția $\varphi(\xi)$ satisface condițiile

$$\xi = 0,\ \varphi = 1; \qquad \xi = +\infty,\ \varphi = 0 \tag{10}$$

și că aparține intervalului [0,1].

În ecuația (8) care este neliniară, apare funcția

$$f(\xi, \varphi) = \frac{2\xi}{(1-\alpha\varphi)^{\frac{1}{2}}}, \tag{11}$$

pentru care avem

$$\frac{2\xi}{(1-\alpha\varphi)^{\frac{1}{2}}} \geqslant 2\xi, \qquad \frac{2\xi}{(1-\alpha\varphi)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{2\xi}{(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}}, \tag{12}$$

ceea ce permite să se arate că problema are o soluție. În acest scop se consideră ecuațiile

$$\frac{d^2v_1}{d\xi^2} + 2\xi\frac{dv_1}{d\xi} = 0 \tag{13}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

pentru $\frac{dv_1}{d\xi} \geqslant 0$, respectiv

$$\frac{d^2v_1}{d\xi^2} + \frac{2\xi}{(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}} \frac{dv_1}{d\xi} = 0 \tag{14}$$

pentru $\frac{dv_1}{d\xi} \leqslant 0$, precum şi

$$\frac{d^2v_2}{d\xi^2} + \frac{2\xi}{(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}} \frac{dv_2}{d\xi} = 0 \tag{15}$$

pentru $\frac{dv_2}{d\xi} \geqslant 0$, respectiv

$$\frac{d^2v_2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dv_2}{d\xi} = 0 \tag{16}$$

pentru $\frac{dv_2}{d\xi} \geqslant 0$.

Soluţiile acestor ecuaţii de comparaţie, care satisfac şi condiţiile (10), sînt

$$v_1(\xi) = \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{(1-\alpha)^{\frac{1}{4}}}\right] = \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{H_0}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}} \xi\right] \tag{17}$$

şi

$$v_2(\xi) = \operatorname{erfc}\ \xi. \tag{18}$$

În felul acesta sînt realizate toate condiţiile pentru ca problema să aibă cel puţin o soluţie $\varphi(\xi)$ astfel ca [2]

$$v_1(\xi) \leqslant \varphi(\xi) \leqslant v_2(\xi) \tag{19}$$

sau

$$\operatorname{erfc}\left[\left(\frac{H_0}{H_1}\right)^{\frac{1}{2}} \xi\right] \leqslant \varphi(\xi) \leqslant \operatorname{erfc}\ \xi. \tag{20}$$

Se poate arăta de asemenea că soluţia $\varphi(\xi)$ este unică [2].

Dacă revenim la funcția H și la variabilele inițiale, obținem, după cîteva calcule simple,

$$1-\left(1-\frac{H_1^2}{H_0^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_0t}}\right)\leqslant\frac{H^2}{H_0^2}\leqslant 1-\left(1-\frac{H_1^2}{H_0^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_0t}}\right), \tag{21}$$

Aceleași considerații pot fi făcute și în legătură cu problema care diferă de cea precedentă numai prin faptul că se presupune $H_1 > H_0$. De data aceasta, facem în ecuația (2) schimbarea de variabile

$$\zeta=\left(\frac{m}{4\,kH_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{t}} \tag{22}$$

și schimbarea de funcție

$$\psi=\frac{1-\dfrac{H^2}{H_1^2}}{1-\dfrac{H_0^2}{H_1^2}}, \tag{23}$$

ajungînd astfel la ecuația

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{2\zeta}{(1-\beta\psi)^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\zeta}=0, \tag{24}$$

în care am introdus notația

$$\beta=1-\frac{H_0^2}{H_1^2}. \tag{25}$$

Se observă imediat că funcția $\psi(\zeta)$ satisface condițiile

$$\zeta=0,\qquad \psi=0;\qquad \zeta=+\infty,\qquad \psi=1 \tag{26}$$

și aparține tot intervalului $[0,1]$.

Ecuația (24) este de aceeași formă cu (8), iar pentru funcția

$$g(\zeta,\psi)=\frac{2\zeta}{(1-\beta\psi)^{\frac{1}{2}}} \tag{27}$$

avem

$$\frac{2\zeta}{(1-\beta\psi)^{\frac{1}{2}}}\geqslant 2\zeta,\qquad \frac{2\zeta}{(1-\beta\psi)^{\frac{1}{2}}}\leqslant\frac{2\zeta}{(1-\beta)^{\frac{1}{2}}} \tag{28}$$

şi raţionamentul referitor la existenţa şi unicitatea soluţiei este prin urmare acelaşi ca şi în problema precedentă. Ecuaţiile de comparaţie au aceeaşi formă cu (13) şi (14), respectiv (15) şi (16). Dacă notăm cu $w_1(\zeta)$ şi $w_2(\zeta)$ soluţiile acestor ecuaţii şi ţinem seama de condiţiile (26), găsim

$$w_1(\zeta) = \operatorname{erf}\zeta \tag{29}$$

şi

$$w_2(\zeta) = \operatorname{erf}\left[\frac{\zeta}{(1-\beta)^{\frac{1}{4}}}\right] = \operatorname{erf}\left[\left(\frac{H_1}{H_0}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta\right]. \tag{30}$$

Avem deci

$$w_1(\zeta) \leqslant \psi(\zeta) \leqslant w_2(\zeta) \tag{31}$$

sau

$$\operatorname{erf} \leqslant \psi(\zeta) \leqslant \operatorname{erf}\left[\left(\frac{H_1}{H_0}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta\right]. \tag{32}$$

Revenind şi în acest caz la funcţia H şi la variabilele iniţiale, rezultă

$$1-\left(1-\frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_0t}}\right) \leqslant \frac{H^2}{H_1^2} \leqslant 1-\left(1-\frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_1t}}\right). \tag{33}$$

Este uşor de constatat că dacă ţinem seama de relaţia dintre funcţiile erfc şi erf, dubla inegalitate (21) ia forma (33).

Soluţia exactă a acestei probleme a fost dată cu mai mult timp în urmă de P. Ia. Polubarinova-Kocina [8] care a utilizat o metodă din teoria stratului limită. De asemenea, au fost găsite soluţii aproximative, după liniarizarea prealabilă a ecuaţiei (2).

Astfel, dacă se scrie această ecuaţie sub forma

$$\frac{m}{k}\frac{\partial H}{\partial t} = H_m\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{34}$$

H_m fiind o valoare medie constantă a înălţimii suprafeţei libere, schimbarea de variabilă (22) conduce în cele din urmă la soluţia aproximativă

$$\frac{H}{H_1} = 1-\left(1-\frac{H_0}{H_1}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_mt}}\right). \tag{35}$$

De asemenea, dacă punem în (2)

$$\chi = H^2, \tag{36}$$

obținem

$$\frac{m}{k}\frac{\partial \chi}{\partial t} = \sqrt{\chi}\,\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \tag{37}$$

respectiv ecuația linearizată

$$\frac{m}{k}\frac{\partial \chi}{\partial t} = H_m \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \tag{38}$$

H_m fiind o constantă definită ca mai înainte. Urmînd apoi același procedeu de rezolvare, ajungem la soluția

$$\frac{H^2}{H_1^2} = 1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_m t}}\right). \tag{39}$$

La același rezultat se ajunge și prin procedeul de liniarizare pe care l-am propus în lucrarea menționată mai înainte.

Valoarea constantă H_m este definită oarecum arbitrar ; dacă procedăm ca în [7], avem

$$H_m = \frac{H_0 + H_1}{2} \tag{40}$$

și putem stabili dacă soluția aproximativă (39) satisface dubla inegalitate (33).

Astfel, dacă ne referim la primul caz examinat ($H_1 < H_0$), obținem, pentru x și t date.

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_0 t}}\right) < \operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_m t}}\right) < \operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_1 t}}\right) \tag{41}$$

deoarece $H_1 < H_m < H_0$. Rezultă deci

$$1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_0 t}}\right) < 1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_m t}}\right), \tag{42}$$

respectiv

$$1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_m t}}\right) < 1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_1 t}}\right) \tag{43}$$

și prin urmare soluția aproximativă (39) satisface, în acest caz, condițiile (33).

De asemenea, în al doilea caz examinat ($H_1 > H_0$), tot pentru x şi t date, avem

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_1 t}}\right) < \operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_m t}}\right) < \operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_0 t}}\right) \tag{44}$$

deoarece $H_0 < H_m < H_1$. Ca şi mai sus, putem deci scrie

$$1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_0 t}}\right) < 1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_m t}}\right) \tag{45}$$

şi

$$1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_m t}}\right) < 1 - \left(1 - \frac{H_0^2}{H_1^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{k\,H_1 t}}\right), \tag{46}$$

concluzia fiind prin urmare aceeaşi.

Soluţia aproximativă (39) se încadrează în consideraţiile teoretice expuse mai înainte, evident fără ca prin aceasta să se poată stabili şi gradul ei de precizie. Pentru cealaltă soluţie aproximativă (35), nu este însă posibil să utilizăm raţionamente asemănătoare.

Aşa cum am mai amintit în [7], o comparaţie cu soluţia exactă din [8] nu se poate face cu o precizie suficientă. Pe de altă parte însă, prin metode cunoscute [2], se poate obţine o soluţie numerică la care gradul de precizie să fie acela dorit.

3. *Concluzii.* Scopul pe care l-am urmărit în această lucrare, precizat dealtfel de la început, a fost acela de a arăta că pentru unele probleme din teoria mişcării cu suprafaţă liberă prin medii poroase, rezolvate anterior prin diverse metode, poate fi stabilită existenţa şi unicitatea soluţiilor. Demonstraţiile respective fiind cunoscute, ne-am mărginit să indicăm aplicarea concluziilor de natură matematică la un caz concret. Acest fapt ne-a permis să aducem şi unele precizări în legătură cu o soluţie aproximativă existentă care îşi capătă astfel o mai bună justificare.

Primită la redacţie la 20 iulie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. Aravin, S. N. Numerov, *Teoriia dvijeniia jidkostei i gazov v nedeformiruemoi poristoi srede*, G.I.T.T.L., Moskva, 1953, p. 380–398.
2. P. B. Bailey, L. F. Shampine, P. E. Waltman, *Non-linear Two Points Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, London, 1968, p. 110–111, 113, 122–124, 128–139.
3. Şt. I. Gheorghiţă, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Bucureşti, Editura Academiei 1966, p. 453–472.

4. N. K. Ghirinski, *Kompleksnti potențial potoka so svobodnoi poverhnostiiu v plaste otnositelno maloi moșnosti pri k = f(z)*, Dokladi Akademii Nauk SSSR, LI, *5* (1946).

5. T. Oroveanu, *Cîteva considerații asupra scurgerii cu suprafață liberă a unui lichid printr-un mediu poros neomogen*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *1* (1960).

6. T. Oroveanu, I. Spulber, *L'écoulement à surface libre avec symétrie radiale dans un milieu poreux faiblement non homogène*, XI Convegno di idraulica e costruzioni idrauliche, Genova, 1968, p. 159—162.

7. T. Oroveanu, I. Spulber, *Cîteva considerații asupra unor probleme de scurgere cu suprafață liberă a lichidelor prin medii poroase*, St. cerc. mec. apl., **28**, *1* (1969).

8. P. Ia. Polubarinova-Kocina, *O neustanovivșihsia dvijeniiah gruntovth vod pri filtrații iz vodohranilișci*, Prikladnaia matematika i mehanika, **XIII**, *2* (1949).

9. P. Ia. Polubarinova-Kocina, *Teoriia dvijeniia gruntovth vod*, G.I.T.T.L., Moskva, 1952, p. 558—617.

FORMULE NUMERICE ÎN VARIABILELE LUI MISES PENTRU GROSIMILE STRATULUI-LIMITĂ PLAN-INCOMPRESIBIL

de DOINA BRĂDEANU

Universitatea Cluj

Se deduc formule numerice care indică corespondența dintre variabilele lui Mises (x, ψ) și coordonatele stratului-limită incompresibil plan-paralel. Se dau, de asemenea, formule pentru calculul grosimilor stratului-limită. Aceste formule se aplică, folosind o integrare numerică cu ajutorul calculatorului FELIX C 256, la stratul-limită care se formează pe cilindrul circular.

Notații

x,y — coordonatele fizice ale stratului-limită,
X, — coordonata adimensională x/L,
L, — o lungime de referință,
ξ, $\overline{\psi}$ — variabilele lui Mises,
$\overline{\psi}$, ψ — funcția de curent și funcția de curent adimensională,
u_0, — viteza din stratul limită în proiecție pe axa Ox,
u_∞, — viteza curentului la infinit (u_∞ = const.),
U, — viteza adimensională u_0/u_∞,
$u_{10}(x)$, — viteza scurgerii exterioare,
$U_{10}(X)$, — raportul u_{10}/u_∞,
a_i, — coeficienții în dezvoltarea (3),
$\Delta\psi$, — o creștere mică a variabilei ψ (pasul variabilei ψ),
$\nu = \mu/\rho$, — viscozitatea cinematică,
ρ, — densitatea fluidului,
μ, — viscozitatea dinamică,
$\mathcal{R}e$, — numărul lui Reynolds $L\, u_\infty/\nu$,
α_i — coeficienți introduși prin formula (4),
g, — o funcție de viteza U dată de (9′),
ψ_J — valoarea lui ψ pentru care $g = 0$,
(i, j), — indici, arată punctul (nodul) în care se calculează o funcție (i și j sînt numere întregi).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 1, 1974, P. 25–37

1. TRECEREA DE LA VARIABILELE (x, ψ) LA (x, y)

1.1. Introducere. Domeniul mişcării fluidului vîscos în stratul-limită se divide în trei regiuni atunci cînd se studiază cu ajutorul variabilelor lui Mises $(x, \bar{\psi})$: ① regiunea din vecinătatea suprafeţei corpului $(0 \leqslant \psi \leqslant \leqslant 2\Delta\psi)$, ② regiunea interioară a stratului-limită $(2\Delta\psi \leqslant \psi < \infty)$ şi ③ regiunea punctului de la infinit $(\psi \to \infty)$, unde ecuaţia lui Mises este studiată şi rezolvată numeric cu ajutorul seriilor, metodei diferenţelor finite şi extrapolării.

În lucrarea de faţă vom deduce formule pentru trecerea de la coordonatele lui Mises la coordonatele (x,y) şi, de asemenea, formule pentru calculul grosimii, grosimii de deplasare şi a grosimii pierderilor de impuls din stratul-limită incompresibil plan-paralel. Aceste formule se pot aplica imediat atunci cînd se foloseşte metoda diferenţelor finite pentru integrarea numerică a ecuaţiei lui Mises.

Transformările simbolice de coordonate

$$(x, y) \to (\xi, \bar{\psi}) \to (X, \bar{\psi}) \to (X, \psi),$$

efectuate cu formulele

$$x = \xi, \qquad y = y(\xi, \bar{\psi}), \qquad \bar{\psi} = \psi \sqrt{\nu L u_\infty},$$

$$\xi = LX, \qquad u_0 = u_\infty U = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y},$$

primesc forma

$$x = LX, \tag{1}$$

$$y(X, \psi) = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\psi}{U(X, \psi)} \tag{2}$$

$$(\psi = 0 \text{ pentru } y = 0\,; \mathcal{R}e = Lu_\infty/\nu).$$

1.2 Regiunea din vecinătatea corpului ①. În domeniul din vecinătatea suprafeţei corpului udat de fluid avem următoarele formule [4] :

$$U(X, \psi) = \sum_1^\infty a_n(X)\, \psi^{n/2},$$

$$a_2 = -\frac{2(U_{10}^2)'}{3a_1^2}, \qquad a_3 = -\frac{7(U_{10}^2)'^2}{18a_1^5},$$

$$a_4 = -\frac{10(U_{10}^2)'^3}{27\, a_1^8}, \ \ldots \tag{3}$$

Formulele (1), (2), dacă folosim (3), devin

$$y(X,\psi)=\frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}\int_0^{\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{U(X,\psi)}=\frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}\int_0^{\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(X)\,\psi^{n/2}}\equiv$$

$$\equiv\frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}\int_0^{\psi}\left(\frac{\alpha_{-1}}{\sqrt{\psi}}+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\psi^{k/2}\right)\mathrm{d}\psi=$$

$$=\frac{2L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}\left(\alpha_{-1}\psi^{1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k+2}\psi^{\frac{k}{2}+1}\right)=\frac{2L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k+2}\psi^{\frac{k}{2}+1},\qquad(4)$$

unde

$$a_1\alpha_{-1}=1,\qquad\sum_{j=1}^{k+2}a_j\alpha_{k+1-j}=0,\qquad k=0,1,2,3,\ldots$$

De aici deducem, dacă se ține seama de (3), formulele

$$\alpha_{-1}=\frac{1}{a_1},$$

$$\alpha_0=-\frac{a_2}{a_1^2}=\frac{2}{3a_1^4}(U_{10}^2)',$$

$$\alpha_1=-\frac{a_3a_1-a_2^2}{a_1^3}=\frac{5}{6a_1^7}(U_{10}^2)'^2,$$

$$\alpha_2=\frac{32}{27a_1^{10}}(U_{10}^2)'^3,\qquad(4')$$

. . . . . .

Se obține din (4) următoarea formulă de trecere de la ψ la y:

$$y_{i,j}=\frac{2L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}\frac{(\sqrt{\psi})_j}{(a_1)_i}\left[1+\frac{\sqrt{\psi}}{3a_1^3}(U_{10}^2)'\left(1+\frac{5}{2}\frac{\sqrt{\psi}}{3a_1^3}(U_{10}^2)'\right)\right]_{i,j}\qquad(5)$$

$$(j\leqslant 2,\ 0\leqslant\psi\leqslant 2\Delta\psi,\qquad y_{i,j}=y(X_i,\psi_j=j\Delta\psi),$$

$$X_i=X_0+i\Delta X,\qquad i=0,1,2\ldots),$$

cu ajutorul căreia se calculează valoarea $y_{i,j}$ a coordonatei y în secțiunea $X=X_i$ pentru o valoare dată $\psi_j(j=0,1,2)$.

1.3 *Regiunea din interiorul stratului-limită.* Pentru a reveni la planul fizic inițial (x, y), de la planul lui Mises (x, ψ), vom folosi

formulele (1), (2). Presupunînd cunoscută numeric funcţia $U(X, \psi)$, respectiv funcţia $g(X, \psi)$, prin metoda diferenţelor finite, vom putea determina şi funcţia $y(x, \psi)$ cu ajutorul unei integrări numerice (de exemplu, regula lui Simpson).

Considerînd, de pildă, trei noduri pe axa variabilei ψ, cu interval component $2\Delta\psi$, se poate imediat, pentru noduri pare, scrie formula

$$y_{i,2j} = y_{i,2} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \sum_{k=2}^{j} \int_{(2k-2)\,\Delta\psi}^{2k\Delta\psi} (1/U)\, \mathrm{d}\psi, \quad j \geqslant 2. \tag{6}$$

Dacă notăm

$$Y = \int_0^{\psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{U}, \qquad Y' = \frac{1}{U},$$

folosind seria Taylor şi formula diferenţelor centrale de ordinul doi, deducem imediat formula

$$\int_{\psi-\Delta\psi}^{\psi+\Delta\psi} (1/U)\, \mathrm{d}\psi = Y(X, \psi + \Delta\psi) - Y(X, \psi - \Delta\psi) =$$

$$= \frac{\Delta\psi}{3}\left[\left(\frac{1}{U}\right)_{(\psi+\Delta\psi)} + 4\left(\frac{1}{U}\right)_{(\psi)} + \left(\frac{1}{U}\right)_{(\psi-\Delta\psi)}\right] - \frac{\Delta\psi^5}{90}\left(\frac{1}{U}\right)^{(\mathrm{IV})}_{(\psi)}. \tag{7}$$

Dacă în această formulă facem $\psi = (2k-1)\,\Delta\psi$ şi aplicăm teorema mediei (în expresia sumei erorilor) găsim următoarea formulă (cu trei noduri) pe noduri cu indice par:

$$y_{i,2j} = y_{i,2} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \frac{\Delta\psi}{3} \sum_{k=2}^{j} \left(\frac{1}{U_{i,2k}} + \frac{4}{U_{i,2k-1}} + \frac{1}{U_{i,2k-2}}\right) -$$

$$- \Delta\psi^4 \frac{L\psi_{j-1}}{90\sqrt{\mathcal{R}e}} \left(\frac{1}{U}\right)^{(\mathrm{IV})}_{(\bar{\psi})}, \qquad j \geqslant 2 \tag{8}$$

$$\left(\frac{\Delta\psi^5}{90} \sum_{k=2}^{j} \left(\frac{1}{U}\right)^{(\mathrm{IV})}_{(2k-1)\,j} = \frac{\Delta\psi^4}{90}(j-1)\,(\Delta\psi)\left(\frac{1}{U}\right)^{(\mathrm{IV})}_{(\bar{\psi})}\right).$$

Formula de trecere de la variabila la ψ variabila y, dacă se introduce funcţia $g(X, \psi)$ şi se admite o eroare de ordinul $\Delta\psi^4$, are forma

$$y_{i,2j} = y_{i,2} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \frac{\Delta\psi}{3} \sum_{k=2}^{j} [(g_{i,0} - g_{i,2k})^{-1/2} +$$

$$+ (g_{i,0} - g_{i,2k-1})^{-1/2} + (g_{i,0} - g_{i,2k-2})^{-1/2}] \tag{9}$$

$$(j \geqslant 2,\ g_{i,j} = g(X_i, \psi_j) \approx (U_{10}^2 - U^2)_{i,j}). \tag{9'}$$

Funcția de rețea $g(X, \psi)$ este calculată numeric, prin metoda diferențelor finite în cazul cilindrului circular, în lucrarea [4].

Pentru noduri impare, cu ajutorul formulei (7) în care se face $\psi = 2k\Delta\psi$ se deduce din (2), cu o eroare de ordinul lui $\Delta\psi^4$, formula

$$y_{i,2j+1} = y_{i,1} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \sum_{k=1}^{j} \int_{(2k-1)\Delta\psi}^{(2k+1)\Delta\psi} (1/U)\, \mathrm{d}\psi$$

sau formula ($j \geqslant 1$)

$$y_{i,2j+1} = y_{i,1} + \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \frac{\Delta\psi}{3} \sum_{k=1}^{j} \left[\left(\frac{1}{U}\right)_{i,2k+1} + 4\left(\frac{1}{U}\right)_{i,2k} + \left(\frac{1}{U}\right)_{i,2k-1} \right]. \quad (10)$$

Formula (10) poate fi exprimată, analog cu (9), și în raport cu funcția $g_{i,j}$.

2. GROSIMILE STRATULUI-LIMITĂ

2.1 *Grosimea* $\delta(X)$. Cu relațiile precedente pentru y se pot calcula valorile grosimii $\delta(X)$ a stratului-limită.

Deoarece

$$\delta(X) = y(X,\ \psi = \psi_J) \text{ cu } g(X, \psi_J) = 0$$

rezultă, imediat, că în secțiunea $X = X_i$, grosimea $\delta = \delta(X_i) \equiv \delta_i$ are valoarea

$$\delta_i = y_{i,J} = \begin{cases} y_{i,2j}, \quad \text{unde} \quad j = \dfrac{J}{2} \quad (\text{cînd } J = \text{par}), \\ \\ y_{i,2j+1}, \quad \text{unde} \quad j = \dfrac{J-1}{2} (\text{cînd } J = \text{impar}), \end{cases} \quad (11)$$

în care mărimile $y_{i,2j}$ și $y_{i,2j+1}$ sînt date de formulele (9) și (10). Valoarea întreagă J este numărul nodului (X_i, ψ_J) în care funcția $U = U_{10}$ sau $g = g_{i,J} = 0$.

2.2 *Grosimea de deplasare* $\delta^*(X)$. Grosimea de deplasare (eliminare) $\delta^*(X)$ a stratului-limită plan-paralel incompresibil este dată de formula

$$\delta^*(X) = \int_0^{\infty,\delta} \left(1 - \frac{u_0}{u_\infty}\right) \mathrm{d}y. \quad (12)$$

Această formulă poate fi scrisă în forma

$$\delta_i^* = \delta^*(X_i) = y_{i,J} - \int_0^{\infty,\delta} \frac{u_0}{u_\infty}\, \mathrm{d}y = y_{i,J} - \int_0^{\bar{\psi}_{i,J}} \frac{\mathrm{d}\bar{\psi}}{u_{10}}. \quad (13)$$

Calcule elementare conduc, uşor, la formulele

$$\delta_i^* = y_{i,J} - \frac{\psi_{i,J}\sqrt{\nu L u_\infty}}{(u_{10})_i} = \delta_i - \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}\frac{\psi_{i,J}}{(U_{10})_i}. \tag{14}$$

2.3 *Grosimea pierderilor de impuls* $\theta(X)$. Pentru mişcarea plană în stratul-limită incompresibil funcţia $\theta(X)$ se poate calcula astfel :

$$\theta(X) = \int_0^{\infty,\delta} \frac{u_0}{u_{10}}\left(1 - \frac{u_0}{u_{10}}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{U_{10}}\sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}}\int_0^{\psi_J}\left(1 - \frac{U}{U_{10}}\right)\mathrm{d}\psi =$$

$$= \frac{\sqrt{\nu L/u_\infty}}{U_{10}}\left\{\int_0^{j\Delta\psi}\left(1 - \frac{U}{U_{10}}\right)\mathrm{d}\psi + \int_{j\Delta\psi}^{J\Delta\psi}\left(1 - \frac{U}{U_{10}}\right)\mathrm{d}\psi\right\}. \tag{15}$$

Pentru a evalua integrarea în intervalul $[0, j\Delta\psi]$ folosim soluţia pentru U, din vecinătatea suprafeţei corpului, în forma (3). Avem

$$j\Delta\psi - \frac{1}{U_{10}}\int_0^{j\Delta\psi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(X)\,\psi^{n/2}\,\mathrm{d}\psi =$$

$$= j\Delta\psi - \frac{1}{U_{10}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+2}a_n(X)\,(j\Delta\psi)^{\frac{n+2}{2}}\right] \approx$$

$$\approx j\Delta\psi\left\{1 - \frac{2}{U_{10}}\left[\frac{a_1}{3}(j\Delta\psi)^{1/2} + \frac{a_2}{4}(j\Delta\psi) + \frac{a_3}{5}(j\Delta\psi)^{3/2}\right]\right\}, \tag{16}$$

$$\text{unde}\begin{cases} j = 1 & \text{dacă } J = \text{impar}, \\ j = 2 & \text{dacă } J = \text{par}. \end{cases}$$

Să trecem la calculul integralei în intervalul $[j\Delta\psi, J\Delta\psi]$ considerînd formula

$$\int_{j\Delta\psi}^{J\Delta\psi} E\,\mathrm{d}\psi = \sum_{k=2}^{M}\left(\alpha\int_{(2k-3)\,\Delta\psi}^{(2k-1)\,\Delta\psi} E\,\mathrm{d}\psi + \beta\int_{(2k-2)\,\Delta\psi}^{2k\Delta\psi} E\,\mathrm{d}\psi\right); \quad E \equiv 1 - \frac{U}{U_{10}}, \tag{17}$$

unde

$$\alpha = 1; \quad \beta = 0; \quad M = \frac{J+1}{2}\,(j=1)$$

$$\text{dacă } J = \text{număr impar} > 1,$$

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1; \quad M = \frac{J}{2}\,(j=2)$$

$$\text{dacă } J = \text{număr par} > 2. \tag{18}$$

Aplicînd formula (7), cu o alegere convenabilă a variabilei ψ și neglijînd restul de ordinul $0(\Delta\psi^4)$, vom putea scrie formula

$$\int_{j\Delta\psi}^{J\Delta\psi} E\,\mathrm{d}\psi = \frac{\Delta\psi}{3}(U_{10})_i \sum_{k=2}^{M}\Big\{6(\alpha+\beta)(M-1)(U_{10})_i - \\ -\sum_{k=2}^{M}\Big[\beta U_{i,2k}+(\alpha+4\beta)\,U_{i,2k-1}+(4\alpha+\beta)\,U_{i,2k-2}+\alpha U_{i,2k-3}\Big]\Big\}. \tag{19}$$

Formula (15), dacă se ține seama de (16) și (19), primește forma

$$\theta_i = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}e}}\frac{j\Delta\psi}{(U_{10}^2)_i}\Big\{\Big[1+\frac{2}{j}(\alpha+\beta)(M-1)\Big](U_{10})_i - \\ -2\Big[\frac{(j\Delta\psi)^{1/2}}{3}(a_1)_i+\frac{j\Delta\psi}{4}(a_2)_i+\frac{(j\Delta\psi)^{3/2}}{5}(a_3)_i\Big]- \\ -\frac{1}{3j}\sum_{k=2}^{M}\Big[\beta U_{i,2k}+(\alpha+4\beta)\,U_{i,2k-1}+(4\alpha+\beta)\,U_{i,2k-2}+\alpha U_{i,2k-3}\Big]\Big\} \tag{20}$$

($\theta_i = \theta(X_i; J)$; α, β, M și j sînt date de (18)).

3. APLICAȚIE. STRAT-LIMITĂ PE CILINDRUL CIRCULAR

3.1 *Calculul ordonatei y.* Se programează calculul formulei (5) la calculatorul FELIX—256 în limbaj FORTRAN IV pentru cazul cilindrului circular de rază R așezat într-un curent vîscos incompresibil plan-paralel (vezi Anexa 1). Datele sînt luate din lucrarea [4] ($\Delta\psi = 0{,}1$; $U_{10} = 2 \sin X$).

Tabela 1

j \ i		0	1	2	3	4	5	ψ_j
	X_i (*rad*)	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411	
	$(a_1)_i$	1,1170	1,5500	1,8572	2,0350	2,0818	2,1101	
0	$\frac{\sqrt{\mathcal{R}e}}{R}\,y_{i,j}$	0	0	0	0	0	0	0
1		0,6399	0,4432	0,3632	0,3281	0,3197	0,3146	0,1
2		0,9607	0,6518	0,5293	0,4757	0,4627	0,4548	0,2

S-a întocmit tabela 1 în care sînt redate valorile coeficientului a_1, luate din [4], și valorile ordonatei $y(X_i, \psi_j) \equiv y_{i,j}$ ($\mathcal{R}e$, numărul lui Rey-

nolds, şi R, raza cilindrului, sînt date). În figura 1 sînt reprezentate valorile $y_{i,j}$ pe două curbe care reprezintă, în planul auxiliar OXy, graficele liniilor de curent $\psi = \psi_j (\psi = 0{,}1\,;\ \psi = 0{,}2)$.

Din tabela funcţiei de reţea $g_{i,j}$ (dat în [4]) rezultă că viteza $U(X, \psi)$ creşte în raport cu X, pentru o valoare fixată a lui ψ (pe o linie de curent). Prin urmare, în domeniul considerat $X_0 \leqslant X \leqslant X_I (I = 5)$ avem $\partial U/\partial X > 0$. Din formula (2) rezultă, atunci, că

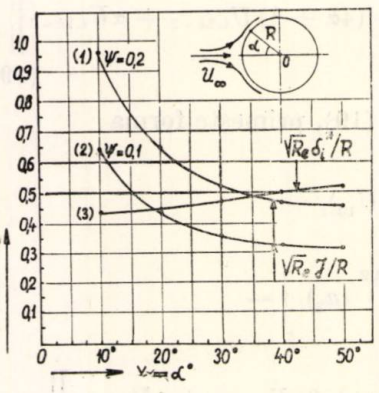


Fig. 1

$$\frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{L}{\sqrt{Re}} \int_0^{\psi_j} \frac{\partial U}{\partial X} \frac{d\psi}{U^2} < 0$$

$$(\psi_j > 0) \quad j = 1, 2,$$

ceea ce justifică valorile descrescătoare ale funcţiei de reţea $y_{i,j}$ în raport cu X_i (j este dat) şi apropierea liniei de curent $\psi = \psi_j$ de suprafaţa cilindrului de-a lungul arcului $X_0 \leqslant X \leqslant X_I$, unde $\partial U/\partial X > 0$ (conservarea debitului de fluid prin secţiunea transversală).

Observaţie. Formula (2), dacă se înlocuieşte limita superioară ψ cu ψ_j, reprezintă, în coordonatele (X, y), ecuaţia liniei de curent $\psi = \psi_j$ (const).

Să calculăm acum coordonata y în regiunea din interiorul stratului-limită folosind formulele (10) şi (9). Se arată uşor că formulele (10) şi (9) pot fi scrise într-o singură formulă de recurenţă de următoarea formă :

$$\frac{\sqrt{Re}}{R} y_{i,k+2} = Y_{i,k+2} + \frac{\sqrt{Re}}{R} y_{i,k} \tag{22}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, 5\,; \qquad k = 1, 2, \ldots, 24),$$

unde

$$Y_{i,k+2} = \frac{1}{30} (a_{i,k+2} + 4a_{i,k+1} + a_{i,k}), \tag{23}$$

cu funcţiile

$$a_{i,k} = (g_{i,0} - g_{i,k})^{-1/2} \quad (i = 0, \ldots, 5\,; \quad k = 1, \ldots, 26). \tag{24}$$

Matricea $(g_{i,k})$, $i = 0{,}1, \ldots, 5\,;\ k = 0{,}1, \ldots, 26$, calculată în lucrarea [4], este dată în tabela 2.

Calculul numeric al formulei (23) s-a efectuat cu maşina electronică FELIX—C 256 în limbaj FORTRAN IV (vezi anexa 2). Rezultatele

numerice sînt date în tabela 3 pentru şase secţiuni de-a lungul cercului (nu am transcris aici şi matricea intermediară ($a_{i,k}$), care este, de asemenea, calculată cu maşina potrivit cu programul din anexa 2).

În concluzie, cu ajutorul tabelelor 1 şi 3 se poate stabili o corespondenţă numerică între variabilele ψ şi y în diferite secţiuni transversale ale stratului-limită incompresibil de pe cilindrul circular (calculele pot fi extinse, după acelaşi program pînă la $\alpha = 90°$). Calculul lui y din regiunea de la „infinit" ne dă posibilitatea să determinăm şi grosimile stratului limită.

3.2 *Grosimile* $\delta(X)$ *şi* $\delta^*(X)$. Pentru calculul grosimii $\delta(X)$ a stratului-limită incompresibil de pe cilindrul circular se vor aplica formulele (11), care, cu ajutorul funcţiilor de reţea $Y_{i,k}$, date de (23), se pot scrie în forma

$$\sqrt{\mathcal{R}e}\,\frac{\delta_i}{R} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\mathcal{R}e}}{R}\, y_{i,2j+1} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{R}e}}{R}\, y_{i,1} + \sum\limits_{k=1}^{j} Y_{i,2k+1}; \\ \qquad j = \dfrac{J-1}{2}\ (J = \text{impar}), \\ \dfrac{\sqrt{\mathcal{R}e}}{R}\, y_{i,2j} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{R}e}}{R}\, y_{i,2} + \sum\limits_{k=2}^{j} Y_{i,2k}; \\ \qquad j = \dfrac{J}{2}\ (J = \text{par}) \\ \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 5), \end{cases} \tag{25}$$

unde J este numărul definit de ecuaţia $g(X_i, \psi_J) = 0$. Valorile funcţiei, de reţea $Y_{i,k}$ sînt reprezentate în tabela 3. Valorile funcţiei $\sqrt{\mathcal{R}e}\,\delta_i/R$, calculate după formulele (25), sînt date în tabela 4.

Pentru calculul grosimii de deplasare (eliminare) $\delta^*(X_i) \equiv \delta_i^*$ vom folosi, în mod direct, formula (14) scrisă în forma

$$\sqrt{\mathcal{R}e}\,\frac{\delta_i^*}{R} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}e}}{R}\,\delta_i - \frac{\psi_{i,J}}{2\sin X_i}, \tag{26}$$

în care vom utiliza (25) şi valorile variabilei X_i din tabela 1 sau 3. Valorile funcţiei $\sqrt{\mathcal{R}e}\,\delta_i^*/R$ sînt date în tabela 4 şi sînt reprezentate grafic în figura 1 (curba (3)). Tabela 4 şi figura 1 arată că valorile funcţiei $\sqrt{\mathcal{R}e}\,\delta_i^*/R$ calculate prin această metodă numerică corespund bine cu acelea calculate, de exemplu, prin metoda relaţiilor integrale (vezi, de pildă, (2) p. 225).

Tabela 2

Matricea $(g_{i,k})$

i / k	0	1	2	3	4	5
0	0,1208	0,4688	1,0602	1,7221	1,9984	2,2223
1	0,0555	0,3132	0,8134	1,4089	1,6648	1,8750
2	0,0230	0,2103	0,6292	1,1607	1,3958	1,5913
3	0,0091	0,1396	0,4861	0,9570	1,1713	1,3519
4	0,0033	0,0910	0,3737	0,7876	0,9817	1,1474
5	0,0009	0,0581	0,2854	0,6462	0,8208	0,9719
6	0,0002	0,0362	0,2162	0,5281	0,6842	0,8211
7	0,0000	0,0219	0,1622	0,4296	0,5682	0,6915
8	0	0,0129	0,1205	0,3477	0,4700	0,5803
9	0	0,0074	0,0886	0,2798	0,3870	0,4852
10	0	0,0041	0,0644	0,2239	0,3171	0,4040
11	0	0,0022	0,0462	0,1781	0,2586	0,3349
12	0	0,0011	0,0328	0,1407	0,2098	0,2765
13	0	0,0006	0,0230	0,1104	0,1692	0,2271
14	0	0,0003	0,0159	0,0860	0,1357	0,1857
15	0	0,0001	0,0108	0,0666	0,1082	0,1510
16	0	0,0000	0,0062	0,0485	0,0822	0,1180
17	0	0	0,0017	0,0307	0,0566	0,0854
18	0	0	0,0008	0,0130	0,0311	0,0529
19	0	0	0,0008	0,0065	0,0056	0,0204
20	0	0	0,0004	0,0028	0,0028	0,0102
21	0	0	0,0002	0,0014	0,0014	0,0056
22	0	0	0,0000	0,0005	0,00035	0,0024
23	0	0	0	0,0001	0,00015	0,0012
24	0	0	0	0,0000	0,00007	0,0005
25	0	0	0	0	0,0000	0,0002
26	0	0	0	0	0	0,0000

Tabela 3

Valorile $Y_{i,k+2}^{(i=\overline{0,5};k=\overline{1,24})}$

ψ_k \ X_i	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411
0,3	0,6565	0,4048	0,3142	0,2756	0,2661	0,2601
0,4	0,6028	0,3522	0,2670	0,2314	0,2226	0,2170
0,5	0,5850	0,3270	0,2428	0,2082	0,1996	0,1941
0,6	0,5783	0,3130	0,2280	0,1935	0,1850	0,1795
0,7	0,5761	0,3046	0,2182	0,1835	0,1749	0,1694
0,8	0,5755	0,2995	0,2114	0,1762	0,1675	0,1619
0,9	0,5754	0,2964	0,2065	0,1708	0,1620	0,1563
1,0	0,5754	0,2946	0,2031	0,1667	0,1577	0,1519
1,1	0,5754	0,2935	0,2005	0,1635	0,1544	0,1484
1,2	”	0,2928	0,1987	0,1610	0,1517	0,1457
1,3	”	0,2925	0,1974	0,1591	0,1496	0,1434
1,4	”	0,2923	0,1964	0,1576	0,1479	0,1416
1,5	”	0,2922	0,1957	0,1564	0,1466	0,1402
1,6	”	0,2921	0,1952	0,1555	0,1455	0,1390
1,7	”	0,2921	0,1948	0,1546	0,1445	0,1379
1,8	”	”	0,1945	0,1538	0,1435	0,1368
1,9	”	”	0,1943	0,1531	0,1426	0,1358
2,0	”	”	0,1943	0,1527	0,1418	0,1349
2,1	”	”	0,1943	0,1525	0,1416	0,1345
2,2	”	”	0,1943	0,1525	0,1415	0,1343
2,3	”	”	0,1942	0,1524	0,1415	0,1342
2,4	”	”	0,1942	0,1524	0,1415	0,1342
2,5	”	”	”	”	”	”
2,6	”	”	”	”	”	”

Tabela 4

i	0	1	2	3	4	5
J	7	16	22	24	25	26
ψ_J	0,7	1,6	2,2	2,4	2,5	2,6
X_i	0,1745	0,3494	0,5408	0,7157	0,7850	0,8411
$\sqrt{Re}\frac{\delta_i}{R}$	2,4575	2,7883	2,6122	2,3293	2,2846	2,2658
$\sqrt{Re}\frac{\delta_i^*}{R}$	0,4414	0,4505	0,4755	0,5004	0,5163	0,5218

Primită la redacție la 16 februarie 1973

ANEXA 1

```
C     FORTRAN IV
C     CALCULUL VALORILOR Y CU FORMULA (5)
      F(T, U, V) = 4* SIN (2* T)* SQRT (V)/(3* U* U * U)
      G(U, V) = 2 * SQRT(V)/U
      DIMENSION A(6), X (6), Z (6, 6)
      READ (105, 20) (X (I), I = 1, 6)
      READ (105, 20) (A (I), I = 1,6)
   20 FORMAT (6 F 6.4)
   55 FORMAT (10 X, I1, 5X, 2 F 12.4 //)
      DO 40 I = 1,6
      XIN = X (I)
      AIN = A (I)
      DO 35 J = 1,2
      RJ = J/10.
      Z (I, J) = G (AIN, RJ) * (1 + F (XIN, AIN, RJ) * (1 + 2. 5 * F (XIN, AIN. RJ)))
   35 CONTINUE
   40 WRITE (108, 55) I, (Z(I, J), J = 1,2)
      STOP
      END
```

ANEXA 2

```
C     FORTRAN IV
C     CALCULUL VALORILOR Y CU FORMULA (23)
      DIMENSION G(30, 10), A(30, 10), Y(30, 10)
      DO 10 I = 1,27
      READ (105, 1) (G(I, J), J = 1,6)
    1 FORMAT (6 F 7. 5)
```

```
10 CONTINUE
   DO 20 K = 2,27
   DO 30 I = 1,6
   A(K, I) = 1/SQRT (G (1,I) — G (K, I))
30 CONTINUE
20 CONTINUE
   DO 40 K = 2,25
   DO 50 I = 1,6
   Y (K + 2, I) = (A (K + 2, I) + 4 * A (K + 1, I) + A (K,I))/30
50 CONTINUE
40 CONTINUE
   WRITE (108,2)
 2 FORMAT (1H1), 20 X, 17 H MATRICEA INITIALA/20 X, 19 (1 H *))
   DO 60 K = 1,27
   WRITE (108,3) (G (K, I), I = 1,6)
 3 FORMAT (1 H 1, 10X, 100 (1H *)/11X, 1H *, 2X, 6 (E 14. 8, 2X), 1H *)
60 CONTINUE
   WRITE (108,4)
 4 FORMAT (11X, 100 (1H *))
   WRITE (108,5)
 5 FORMAT (1H1, 20X, 21 H MATRICEA INTERMEDIARA/20 X, 23 (1 H * ))
   DO 70 K = 2,27
   WRITE (108,3) (A(K,I), I = 1 6)
70 CONTINUE
   WRITE (108,4)
   WRITE (108,6)
 6 FORMAT (1H1, 20X, 15 H MATRICEA FINALA/20X, 17 (1H *))
   DO 80 K = 4,27
   WRITE (108,3) (Y(K,I), I = 1,6)
80 CONTINUE
   WRITE (108,4)
   STOP
   END
```

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor viscoase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967.
2. H. Schlichting, *Teoria pogran*, sloia, IIL, Moskva, 1956.
3. N. S. Arjanîkov şi V. N. Malţev, *Aerodinamica*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1954 (traducere din l. rusă).
4. D. Brădeanu, *Rezolvarea numerică a problemei stratului-limită*, Studia Univ. Cluj, s. Math-Mech, fasc. 2, 1974.
5. M. G. Salvadori, M. L. Baron, *Metode numerice în tehnică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1972 (traducere din l. engleză).
6. V. I. Krîlov şi colab. *Vîcisl. metodi viş. matematiki*, Izd. „Viş. Scola", 1, Moskva, 1972.

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE ALE UNOR TERMENI DE ORDIN PAR ODATĂ CU MOMENTUL EXTERN AL TERMENILOR DE ORDINUL ÎNTÎI LA MOTORUL ÎN LINIE ÎN DOI TIMPI CU NUMĂR PAR DE CILINDRI ŞI APRINDERI UNIFORM REPARTIZATE

de G. BĂRĂNESCU

Institutul politehnic București

În lucrare se stabilesc situațiile care permit echilibrarea unor termeni de ordin par odată cu momentul extern al termenilor de ordinul întîi la motoarele în doi timpi cu număr par de cilindri, aprinderi uniform repartizate și distanțe egale între cilindri consecutivi. Soluțiile sînt deosebit de avantajoase în cazul motoarelor mari la care, odată cu echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi, se poate echilibra și momentul extern al termenilor de ordinul doi deoarece acest moment poate provoca trepidații însemnate. Teoria elaborată are un caracter general, ea putînd fi aplicată oricare ar fi numărul de cilindri ai motorului.

1. INTRODUCERE

La motorul în linie, în doi timpi, cu număr par de cilindri, aprinderi uniform repartizate și distanțe egale între cilindri consecutivi se pot echilibra prin plasarea convenabilă a manivelelor fie momentele externe ale termenilor de ordin par, fie momentul extern al termenilor de ordinul întîi [1]; echilibrarea momentelor externe ale termenilor de ordin par este posibilă la orice motor din categoria considerată, în timp ce echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi poate fi realizată la motoarele din categoria considerată numai cînd numărul de cilindri nu este o putere de doi.

Adoptarea soluției care echilibrează momentele externe ale termenilor de ordin par este convenabilă pentru motoarele de dimensiuni relativ mici, la care este acceptabilă echiparea motorului cu un dispozitiv mecanic ce echilibrează momentul extern al termenilor de ordinul întîi; în acest

[1]) Noțiunea de termen al forței de inerție a maselor cu mișcare de translație este precizată în lucrarea [2].

caz mai subzistă numai momentele externe ale unor termeni de ordin impar, care pot fi înlăturate prin axarea mecanismelor bielă-manivelă.

În cazul motoarelor mari este de preferat soluţia care echilibrează momentul extern al termenilor de ordinul întîi (cînd această soluţie există); deosebit de avantajoase sînt soluţiile care echilibrează şi momentul extern al termenilor de ordinul doi, deoarece acest moment poate provoca trepidaţii însemnate.

În lucrare se stabilesc soluţiile de arbori cotiţi pentru motoarele în linie, în doi timpi cu număr par de cilindri şi aprinderi uniform repartizate, care echilibrează atît momentul termenilor de ordinul întîi, cît şi momentele unor termeni de ordin par. Viteza unghiulară de rotaţie a arborelui cotit este considerată variabilă. Se presupune că lungimea motorului este minimă, deci că distanţele dintre axele cilindrilor consecutivi sînt egale cu distanţa minimă posibilă.

2. CONDIŢIILE CARE TREBUIE ÎNDEPLINITE PENTRU ECHILIBRAREA MOMENTULUI EXTERN AL TERMENILOR DE ORDINUL ÎNTÎI

La motorul în linie în doi timpi, cu număr par de cilindri şi aprinderi uniform repartizate, manivelele arborelui cotit sînt două cîte două în opoziţie. Pentru echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi este necesar în primul rînd ca distanţa dintre manivelele în opoziţie să fie aceeaşi. În acest caz momentul extern M_1, aferent vectorilor T_1, care interpretează termenul de ordinul întîi, pentru o grupă de două manivele în opoziţie, are — în acelaşi moment de timp — aceeaşi valoare pentru toate grupele de manivele în opoziţie. Dacă i este numărul de cilindri ai motorului, se obţin $\frac{i}{2}$ momente M_1 egale. În vederea echilibrării acestor momente se demonstrează în lucrările [1] şi [3] că manivelele arborelui cotit trebuie organizate în serii de cîte $2\ n$ manivele uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit, n fiind un număr prim, divizor al numărului de cilindri, pentru care rezultatul diviziunii este un număr par. Fiecare serie are manivelele două cîte două în opoziţie, deoarece manivelele ei sînt în număr par şi uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit. Echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi se obţine dacă în cadrul fiecăreia din aceste serii grupele de manivele în opoziţie sînt astfel orientate încît vectorii care reprezintă cele n momente M_1 aferente seriei să fie uniform distribuiţi în jurul unui punct.

3. POZIŢIA RELATIVĂ A VECTORILOR CARE INTERPRETEAZĂ TERMENII DE ORDIN PAR PENTRU FIECARE SERIE DE $2n$ MANIVELE

Fiecare serie, avînd manivelele uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit, constituie un arbore cotit pentru un motor în linie, în doi timpi, cu $2\ n$ cilindri şi aprinderi uniform repartizate. Potrivit teoriei echilibrajului motoarelor în linie [1] vectorii ce interpretează termenii

forţelor F_t sînt distribuiţi unghiular în progresie aritmetică de raţie $p\frac{2\pi}{2n}$; în problema cercetată p este un număr par.

Pentru ordinele multiple de $2n$, vectorii sînt permanent în fază; pentru celelalte ordine rezultanta vectorilor este nulă, ceea ce înseamnă că aceşti vectori sînt sau uniform repartizaţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit, sau organizaţi în mai multe grupe cu acelaşi număr de vectori în fază, grupele fiind uniform repartizate în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit.

În fiecare serie de $2n$ manivele se cunoaşte deci poziţia relativă a vectorilor care interpretează termenii de ordinul $2n$. Pentru precizarea poziţiei relative a vectorilor care interpretează ceilalţi termeni de ordin par se numerotează consecutiv manivelele unei serii, începînd cu o manivelă oarecare. Unghiul dintre vectorii care interpretează termenii de ordinul p în cilindri deserviţi de manivelele cu numerele de ordine q şi s este $p(s-q)\frac{2\pi}{2n}$.

Dacă

$$p(s-q)\frac{2\pi}{2n} = k \cdot 2\pi \ (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

deci pentru ordinele

$$p = 2k\frac{n}{s-q}, \tag{1}$$

vectorii sînt în fază. Întrucît p este un număr par şi n un număr prim, formula (1) este îndeplinită cînd $s-q=1$, $s-q=k$ sau $s-q=n$. Primele două condiţii conduc la ordinele multiplu de $2n$, deci la cazul cunoscut. Ultima condiţie, care este satisfăcută de orice grupă de manivele în opoziţie, conduce la toate ordinele pare. Astfel, pentru o serie de $2n$ manivele, vectorii care interpretează termenii de ordin par nemultiplu de $2n$ se găsesc doi cîte doi în fază; potrivit observaţiei făcute mai înainte, grupele de cîte doi vectori în fază sînt uniform repartizate în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit şi corespund fiecare cîte unei grupe de manivele în opoziţie.

4. POSIBILITĂŢILE DE ECHILIBRARE A MOMENTELOR EXTERNE ALE TERMENILOR DE ORDIN PAR NEMULTIPLU DE $2n$

Ţinînd seama de cele arătate mai sus, pentru fiecare serie de $2n$ manivele se pot înlocui grupele de cîte doi vectori în fază, aferenţi manivelelor în opoziţie, prin cîte un vector rezultant, avînd punctul de aplicaţie la mijlocul distanţei dintre manivelele în opoziţie. Aceşti vectori rezultanţi sînt egali ca mărime şi uniform repartizaţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit.

Problema echilibrării momentului extern al termenilor de ordinul p se reduce la echilibrarea momentului extern al vectorilor rezultanţi şi este asemănătoare problemei echilibrării momentului extern al termenilor de ordinul întîi. În cazul cercetat numărul n de vectori rezultanţi aferenţi unei serii de $2n$ manivele, nefiind par, vectorii rezultanţi ai seriei nu vor fi

doi cîte doi în opoziţie. În consecinţă, echilibrarea momentului lor extern nu este posibilă în cadrul unei singure serii de $2n$ manivele, ci vor trebui cuplate două astfel de serii în aşa fel încît unui vector rezultant dintr-o serie să-i corespundă în cealaltă serie un vector rezultant în opoziţie, distanţele între vectorii rezultanţi în opoziţie ai celor două serii fiind aceeaşi. În această situaţie echilibrarea momentului extern se poate face pentru cele două serii, organizînd grupele de manivele astfel ca vectorii moment aferenţi vectorilor rezultanţi în opoziţie să fie uniform distribuiţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit. Mai departe, grupele de manivele în opoziţie ai căror vectori rezultanţi sînt şi ei în opoziţie, au fost numite grupe jumelate.

În ansamblu, echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul $p = 2k$ [$k = 1, 2, 3, \ldots (n-1)(n+1)\ldots$] se face prin mai multe serii de vectori moment, fiecare serie avînd n vectori egali şi uniform distribuiţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit. Întrucît unei serii de n vectori moment îi corespund $4n$ manivele, aplicarea metodei reclamă îndeplinirea egalităţii :

$$\frac{i}{4n} = m^* \qquad (m^* = 1, 2, 3, \ldots),$$

care arată că echilibrarea momentului extern al termenilor de un ordin par nemultiplu de $2n$, odată cu momentul extern al termenilor de ordinul întîi, se poate obţine numai dacă numărul de cilindri admite ca divizori numere prime diferite de unitate, pentru care rezultatul diviziunii este un multiplu de patru. Cel mai mic număr de cilindri care îndeplineşte aceste condiţii corespunde valorilor minime pentru n şi m^*, care sînt $n = 3$ şi $m^* = 1$; rezultă $i = 12$.

Deoarece aprinderile sînt uniform repartizate, în steaua manivelelor unghiul dintre două manivele consecutive oarecare este $\frac{2\pi}{i}$ Seriile de cîte $2n$ manivele făcînd parte din steaua manivelelor, decalajul unghiular dintre două serii nu poate fi decît un multiplu al unghiului $\frac{2\pi}{i}$, fapt care limitează ordinele termenilor al căror moment extern poate fi echilibrat. Într-adevăr, pentru ca doi vectori rezultanţi din două serii diferite să fie în opoziţie este necesar ca seriile respective să fie decalate între ele cu unghiul $\xi = \frac{\pi}{p}$ Acest decalaj, potrivit celor arătate mai sus, trebuie în acelaş timp să fie un multiplu al unghiului $\frac{2\pi}{i}$, adică $\xi = k\frac{2\pi}{i}$, de unde, prin înlocuirea lui ξ, se deduce

$$\frac{i}{2p} = k. \qquad (2)$$

Egalitatea (2) arată că ordinul termenilor pari al căror moment extern se poate echilibra prin metoda descrisă odată cu momentul extern al termenilor de ordinul întîi, trebuie să fie un divizor al jumătăţii numărului de cilindri ; dintre aceşti divizori nu intră în discuţie în cazul cercetat divizorii multiplu de $2n$.

Pentru stabilirea posibilităţilor de echilibrare a momentului extern al termenilor de ordin par nemultiplu de $2n$, care satisfac în acelaşi timp şi condiţia (2), este necesar să se determine : a) grupele de manivele în opoziţie care pot fi jumelate şi b) repartizarea grupelor de manivele în opoziţie între seriile de $2n$ direcţii uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit, atît în vederea echilibrării momentului extern al termenilor de ordinul considerat, cît şi a momentului extern al termenului de ordinul întîi.

a) Grupele de manivele în opoziţie care pot fi jumelate se determină din condiţia egalităţii momentelor produse de vectorii care interpretează termenii de ordinul considerat.

Datorită identităţii mecanismelor motoare, vectorii T_p corespunzători tuturor cilindrilor motorului sînt identici. La fiecare grupă de două manivele în opoziţie vectorii T_p sînt în fază şi prin urmare rezultanta acestor vectori este aplicată într-un punct J al axei de rotaţie a arborelui cotit situat la mijlocul distanţei dintre manivelele aferente. Pentru două grupe jumelate de manivele în opoziţie vactorii T_p ale grupelor de manivele în opoziţie considerate. Deoarece mărimea vectorilor T_p este aceeaşi pentru toţi cilindri motorului, momentele corespunzătoare grupelor jumelate de manivele în opoziţie vor fi egale dacă distanţele dintre punctele J ale acestor grupe sînt egale. Astfel, determinarea grupelor de manivele în opoziţie care pot fi jumelate se reduce la stabilirea posibilităţilor de cuplare — două cîte două la aceeaşi distanţă — a punctelor J care marchează pe axa de rotaţie a arborelui cotit mijlocurile distanţelor dintre manivelele în opoziţie.

Se consideră unul din cuplajele manivelelor în opoziţie care asigură echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi; potrivit celor arătate mai înainte, distanţa dintre manivelele în opoziţie trebuie să fie aceeaşi. În lucrarea [3] se demonstrează că posibilităţile de cuplare a manivelelor în opoziţie la aceeaşi distanţă una de alta sînt determinate de toţi divizorii δ ai numărului de cilindri, pentru care rezultatul diviziunii este un număr par ; la fiecare din aceşti divizori se consideră grupele succesive de cîte δ manivele şi se numerotează consecutiv aceste grupe ; cuplajul căutat se obţine plasînd manivela s dintr-o grupă cu număr de ordine impar ($s = 1, 2, 3, \ldots, \delta ; 2\,\delta + 1, 2\,\delta + 2, \ldots, 3\,\delta ; \ldots, i - 2\,\delta + 1, i - 2\,\delta + 2, \ldots, i - \delta$) în opoziţie cu manivela $s + \delta$ din grupa următoare.

Fie de pildă cuplajul corespunzător divizorului. Deoarece manivelele sînt organizate în $\frac{i}{\delta}$ grupe de cîte δ manivele şi se cuplează în opoziţie manivela s dintr-o grupă avînd număr de ordine impar cu manivela $s + \delta$ din grupa următoare, rezultă că mijlocurile distanţelor dintre manivelele în opoziţie se află în $\frac{i}{2\delta}$ serii ; fiecare serie are cîte δ astfel de puncte, distanţa dintre două puncte consecutive ale aceleiaşi serii fiind egală cu distanţa dintre două manivele consecutive. Notînd cu $J_{\mu,q}$ punctul din seria q, cele $\frac{i}{2}$ mijlocuri ale grupelor de manivele în opoziţie sînt organizate

în modul următor :

$$\underbrace{J_{1,1}, J_{2,1}, \ldots, J_{\delta,1}}_{\text{seria } 1} \quad \underbrace{J_{1,2}, J_{2,2}, \ldots, J_{\delta,2}}_{\text{seria } 2} \ldots$$

$$\ldots \underbrace{J_{1,q}, J_{2,q}, \ldots, J_{\delta,q}}_{\text{seria } q} \ldots \underbrace{J_{1,\frac{i}{2\delta}}, J_{2,\frac{i}{2\delta}}, \ldots, J_{\delta,\frac{i}{2\delta}}}_{\text{seria } \frac{i}{2\delta}}$$

Cuplajele căutate ale grupelor de manivele în opoziţie se pot realiza în cadrul fiecărei serii, sau între serii.

Cuplajele din cadrul fiecărei serii sînt posibile dacă δ admite divizori Δ pentru care rezultatul diviziunii este un număr par. În acest caz punctele J din cadrul fiecărei serii se pot organiza în $\frac{\delta}{\Delta}$ grupe de cîte Δ puncte; numerotînd consecutiv aceste grupe, într-o serie oarecare q se cuplează la unghiul $\xi = \frac{\pi}{p}$, manivelele în opoziţie cărora le corespunde punctul $J_{\mu,q}$ dintr-o grupă cu număr de ordine impar cu manivelele în opoziţie cărora le corespunde punctul $J_{\mu+\Delta,q}$.

Cuplajele între serii sînt posibile dacă $\frac{i}{2\delta}$ (care reprezintă numărul seriilor) admite divizori Δ^* pentru care rezultatul diviziunii este un număr par. La fiecare din aceşti divizori se pot forma $\frac{i}{2\delta\Delta^*}$ grupe de puncte, fiecare grupă conţinînd cîte Δ^* serii consecutive; la unghiul $\xi = \frac{\pi}{p}$ se cuplează grupele de manivele în opoziţie cărora le corespunde punctul $J_{\mu+\Delta,q}$ dintr-o grupă cu număr de ordine impar cu manivelele în opoziţie cărora le corespunde punctul $J_{\mu+\Delta,q}$.

Cuplajele între serii sînt posibile dacă $\frac{i}{2\delta}$ (care reprezintă numărul seriilor) admite divizori Δ^* pentru care rezultatul diviziunii este un număr par. La fiecare din aceşti divizori se pot forma $\frac{i}{2\delta\,\Delta^*}$ grupe de puncte, fiecare grupă conţinînd cîte Δ^* serii consecutive; la unghiul $\xi = \frac{\pi}{p}$ se cuplează grupele de manivele în opoziţie cărora le corespund punctele $J_{1,1}$ şi $J_{1,1+}$, $J_{2,1}$ şi $J_{2,1+\Delta}$ etc.

Pentru exemplificare se consideră cazul mai general al motorului cu $i = 24$ cilindri. La divizorul $\delta = 2$ se realizează $\frac{i}{2\delta} = 6$ serii, fiecare serie avînd cîte două puncte J; sînt posibile cuplaje atît în cadrul unei serii, cît şi între serii (fig. 1). La divizorul $\delta = 3$ numărul de puncte J din fiecare serie este impar şi prin urmare sînt posibile numai cuplaje între serii (fig. 2). La $\delta = 4$ numărul de serii $\frac{i}{2\delta} = 3$ este impar; sînt posibile numai cuplaje în cadrul seriilor (fig. 3).

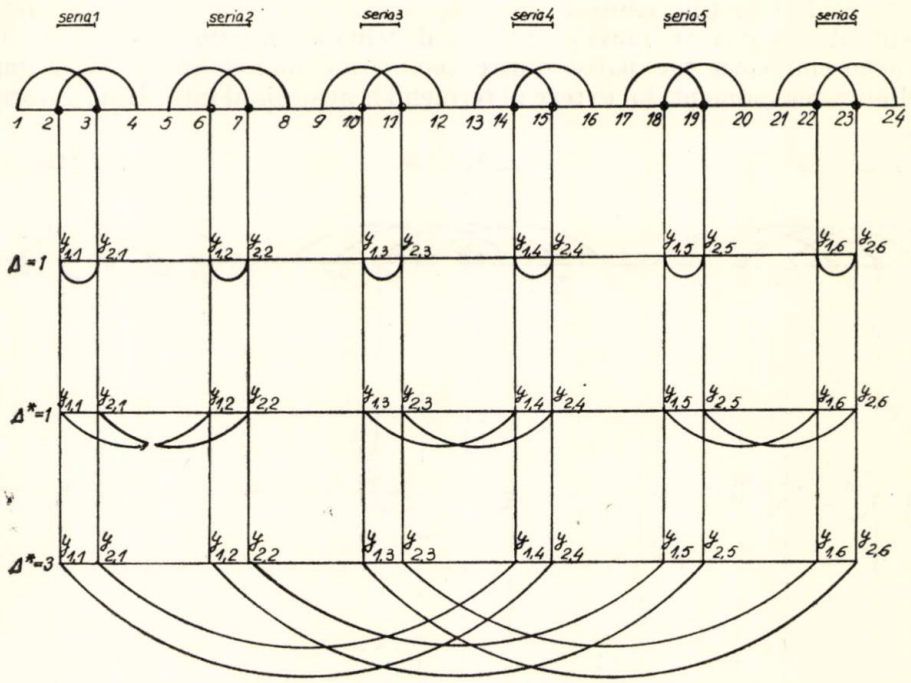


Fig. 1. — Grupele jumelate de manivele în opoziție
$i = 24$, $\delta = 2$.

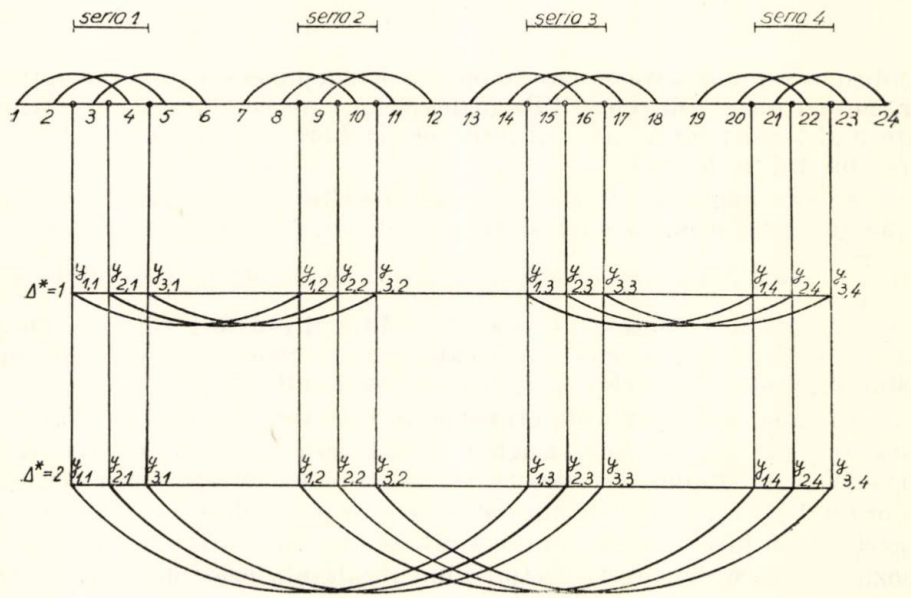


Fig. 2. — Grupele jumelate de manivele în opoziție
$i = 24$, $\delta = 3$.

b) Repartiţiile căutate ale grupelor de manivele în opoziţie între seriile de $2n$ direcţii radiale uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit fac parte dintre repartiţiile manivelelor care asigură echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi. Însă, datorită

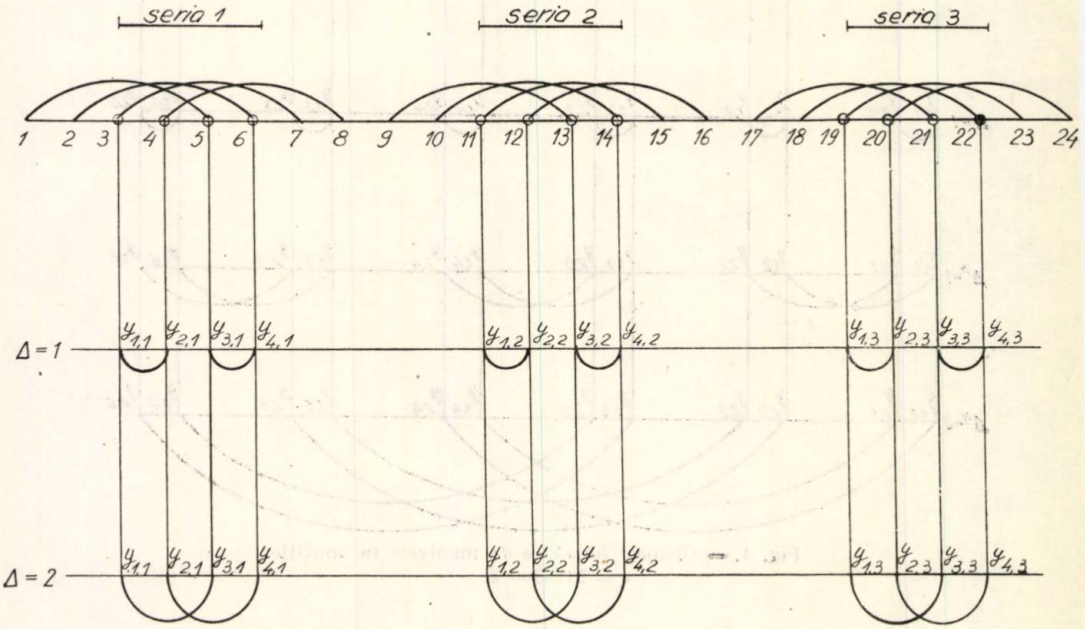


Fig. 3. — Grupele jumelate de manivele în opoziţie
$i = 24$, $\delta = 4$.

condiţiilor suplimentare pe care trebuie să le îndeplinească steaua manivelelor, numai unele din repartiţiile manivelelor care echilibrează momentul extern al termenilor de ordinul întîi vor echilibra şi momentul extern ce face obiectul problemei.

Se presupune că s-au ales două serii de cîte $2n$ direcţii radiale, seriile — notate în continuare cu I şi II — fiind decalate între ele cu unghiul $\xi = \frac{\pi}{p}$. S-au ales de asemenea şi $2n$ grupa de manivele în opoziţie, care urmează să fie atribuite acestor serii de direcţii radiale; fiindcă soluţiile căutate echilibrează şi momentul extern al termenilor de ordinul întîi, distanţele dintre manivelele în opoziţie trebuie să fie egale.

Fie una din repartiţiile grupelor de manivele în opoziţie între cele două serii de direcţii care asigură echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul p. Steaua vectorilor care interpretează termenii de ordinul p va fi formată din $2n$ vectori forţă rezultanţi egali, uniform repartizaţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit şi aflaţi doi cîte doi în opoziţie, fiecare din aceşti vectori fiind rezultanta celor doi vectori care interpretează termenii de ordinul p pentru cilindrii deserviţi de o grupă de manivele în opoziţie; vectorii corespunzători manivelelor dintr-o serie

sînt de asemenea uniform distribuiţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit unghiul dintre doi vectori consecutivi fiind $\frac{2\pi}{n}$.

Deoarece repartiţia considerată a grupelor de manivele în opoziţie asigură echilibrarea momentului celor $2n$ vectori forţă rezultanţi, vectorii moment aferenţi perechilor de vectori forţă rezultanţi aflaţi în opoziţie sînt uniform distribuiţi în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit.

Conform regulei de reprezentare vectorială a momentelor, un observator situat pe direcţia axei de rotaţie a arborelui cotit, cu capul spre manivela 1, care priveşte în direcţia unuia din cei n vectori moment, trebuie să aibă în dreapta sa unul din cei doi vectori forţă rezultanţi, corespunzători vectorului moment considerat şi anume vectorul aferent grupei de manivele în opoziţie care conţine manivela cu numărul de ordine cel mai mic [4]; fie I seria de direcţii radiale în care se află această grupă de manivele în opoziţie. Dacă observatorul se roteşte în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit, după ce a parcurs unghiul $\frac{2\pi}{n}$ (care este egal cu unghiul dintre doi vectori moment consecutivi) el va privi în sensul unui alt vector moment, în dreapta şi în stînga sa aflîndu-se vectorii forţă rezultanţi aferenţi. Fiindcă în poziţia precedentă observatorul avea în dreapta unul din vectorii forţă rezultanţi ai seriei I de direcţii radiale, în noua poziţie se va găsi în dreapta sa tot un vector forţă rezultant din seria I de direcţii radiale, deoarece — pentru cele două serii de direcţii radiale considerate — unghiul cu care s-a rotit observatorul este în acelaşi timp egal cu unghiul dintre doi vectori moment consecutivi, precum şi cu unghiul dintre doi vectori forţă rezultanţi consecutivi ai unei serii de direcţii radiale. Dar cînd observatorul priveşte în sensul unui vector moment, el are în dreapta sa acel vector forţă rezultant al grupei jumelate care aparţine grupei de manivele în opoziţie ce conţine manivela cu numărul de ordine cel mai mic ; prin urmare, în noua poziţie, vectorul forţă rezultant care se află în dreapta observatorului face parte din vectorii forţă rezultanţi ai seriei I de direcţii radiale şi corespunde grupei de manivele în opoziţie a grupei jumelate respective, care conţine manivela cu numărul de ordine cel mai mic.

În concluzie, dacă s-au repartizat două grupe jumelate de manivele în opoziţie între două serii I şi II de cîte $2n$ direcţii radiale uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit astfel ca grupa de manivele în opoziţie ce conţine manivela cu numărul de ordine cel mai mic dintre cele patru manivele ale grupelor jumelate să se afle de pildă în seria I de direcţii radiale, la repartizarea altor două grupe jumelate de manivele în opoziţie între aceleaşi serii de direcţii radiale, grupa de manivele care conţine manivela cu număr de ordine cel mai mic trebuie să se afle tot în seria I. Orice repartiţie care îndeplineşte această condiţie pentru perechile de serii de $2n$ direcţii radiale uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit, asigură echilibrarea momentului extern al termenilor de ordin par divizor al jumătăţii numărului de cilindri şi nemultiplu de $2n$.

Pentru exemplificare se consideră la motorul în linie în doi timpi, cu doisprezece cilindri cuplajul manivelelor în opoziţie corespunzător

divizorului $\delta = 3$, şi cuplajului grupelor de manivele în opoziţie pentru divizorul $\Delta^* = 1$ (fig. 4).

Dacă se urmăreşte echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul doi, grupele jumelate de manivele în opoziţie trebuie să se

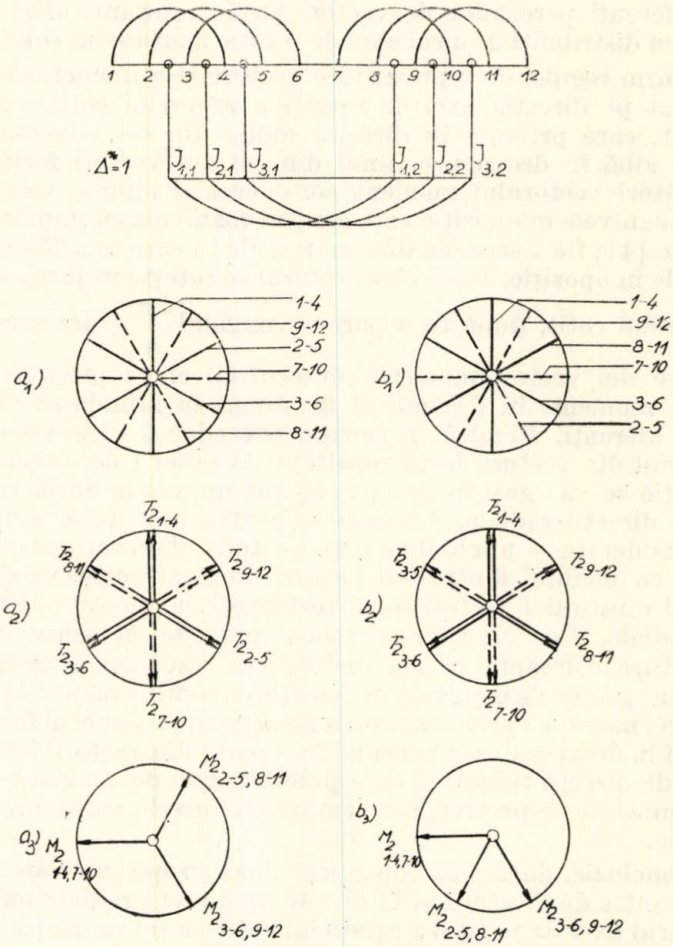


Fig. 4. — Exemplu de repartiţie corectă (*a*) şi de repartiţie incorectă (*b*) a grupelor jumelate de manivele în opoziţie între seriile de $2n$ direcţii radiale uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit
$i = 12$, $\delta = 3$, $\Delta^* = 1$.

afle în plane care fac între ele unghiul $\xi = \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{2}$; grupa 1—4 de manivele în opoziţie trebuie dispusă în cuadratură cu grupa 7—10, grupa 2—5 în cuadratură cu 8—11 şi grupa 3—6 în cuadratură cu 9—12. Fiindcăî $n = 3$, în steaua manivelelor există două serii de cîte $2n = 6$ direcţii radiale uniform distribuite în jurul axei de rotaţie a arborelui cotit;

fie I şi II cele două serii de direcţii. Se consideră alternativa cu grupa 1—4 de manivele în opoziţie repartizată seriei I şi grupa jumelată 7—10 repartizată seriei II. Conform concluziei precedente, grupele 2—5 şi 3—6 de manivele în opoziţie trebuie repartizate tot seriei I, iar grupele 8—11 şi 9—12 seriei II. Una din distribuţiile grupelor de manivele în opoziţie cu cadrul fiecărei serii de direcţii este arătată în figura 4 a_1; stelei aferente a vectorilor T_2, reprezentată în figura 4 a_2, îi corespunde steaua vectorilor moment M_2 din figura 4 a_3. Se constată că momentul M_2 este echilibrat. Dacă se repartizează seriei I grupele de manivele 1—4, 8—11 şi 3—6, conform figurii 4 b_2, ceea ce înseamnă că repartizarea grupelor jumelate de manivele în opoziţie 2—5 şi 8—11 nu respectă condiţia ca în aceeaşi serie de $2n$ direcţii radiale să se afle grupele de manivele în opoziţie care conţin manivelele cu numerele de ordine cele mai mici, se obţin stelele vectorilor T_2 şi M_2 respectiv din figurile 4 b_2 şi 4 b_3; în acest caz momentul M_2 nu se mai echilibrează.

Pentru fiecare distribuţie a grupelor de manivele în opoziţie în cadrul fiecărei serii de direcţii radiale trebuie aleasă repartiţia manivelelor care asigură echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi.

5. POSIBILITĂŢILE DE ECHILIBRARE A MOMENTELOR EXTERNE ALE TERMENILOR AL CĂROR ORDIN ESTE MULTIPLU $2n$

Metoda precedentă poate fi aplicată şi pentru echilibrarea momentului extern al termenilor al căror ordin este un multiplu de $2n$. La fiecare serie de $2n$ manivele termenii consideraţi dau o rezultantă. Pentru două serii de cîte $2n$ manivele, decalate astfel ca rezultanta dintr-o serie să fie în opoziţie cu rezultanta din cealaltă serie, se obţine un moment. Luînd un număr impar de astfel de perechi de serii de cîte $2n$ manivele, rezultă un număr impar de momente, care pot fi echilibrate printr-o repartiţie convenabilă a manivelelor între serii şi prin decalajul adecuat al seriilor. Numărul minim de serii fiind şase, iar numărul minim de manivele ale unei serii fiind de asemenea şase rezultă că cel mai mic număr de cilindri la care se poate echilibra momentul extern al termenilor de ordinul $p = 2kn$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) este 36; din punct de vedere practic această problemă nu intră în discuţie.

5. CONCLUZII

Consideraţiile precedente permit stabilirea situaţiilor în care se poate echilibra momentul extern al unor termeni de ordin par odată cu momentul extern al termenilor de ordinul întîi, precum şi măsurile ce trebuie luate în vederea echilibrării acestor momente.

Teoria elaborată are un caracter general. Ea permite soluţionarea problemei oricare ar fi numărul de cilindri ai motorului.

Primit la redacţie la 22 martie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. G. BĂRĂNESCU, *O teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele policilindrice în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate*, St. cerc. mec. apl., *4* (1959).
2. — *Interpretări vectoriale ale forței de inerție ale maselor cu mișcare de translație aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variației vitezei unghiulare de rotație a arborelui cotit.* St. cerc. mec. apl., *6* (1969).
3. — *Unele probleme privind echilibrajul momentului extern al termenilor de ordinul întîi la motorul în linie în doi timpi cu număr par de cilindri și aprinderi uniform repartizate*, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" din București, *2* (1969).
4. G. BĂRĂNESCU, N. APOSTOLESCU, B. GRÜNWALD, *Solutions de vilbréquins pour les moteurs polycylindriques eu ligne, optima du point de vue de l'équilibrage*, Buletinul Institutului politehnic din București, *3* (1959).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL STABILITĂȚII AUTOMOBILULUI CU DIFERENȚIAL AUTOBLOCABIL

de A. P. STOICESCU
Institutul politehnic București

În lucrare se studiază stabilitatea la perturbații mici a automobilului cu diferențial autoblocabil, evidențiindu-se influența unor parametri constructivi și a diferențialului asupra stabilității mișcării precum și asupra vitezelor critice. Se arată că prin folosirea diferențialului autoblocabil se îmbunătățește stabilitatea mișcării comparativ cu cea din cazul automobilului cu diferențial normal. În cazul neglijării efectelor aerodinamice se deduce o formulă simplă pentru calculul vitezei critice.

0. INTRODUCERE

Diferențialele autoblocabile se folosesc atît la automobile cu capacitate mare de trecere, cît și la o serie de autoturisme și la automobile de curse. În afara faptului că măresc capacitatea de trecere, diferențialele autoblocabile conduc și la modificarea stabilității și maniabilității automobilului.

Pînă acum, în literatură s-a abordat problema stabilității automobilelor cu diferențiale autoblocabile numai în situațiile limită de derapare. Astfel, în lucrările [2]—[5], această problemă este studiată în cazul deplasării uniforme a automobilului în cerc, iar în lucrările [6], [11], [19], [21] în cazul deplasării rectilinii. În primul caz se determină de fapt relația dintre raza de viraj și viteza la care se produce patinarea roților sau deraparea uneia din punți, iar în al doilea caz se determină rezerve la limite de aderență, ținîndu-se seama de reacțiunile laterale la roți, care iau naștere datorită momentului destabilizator din planul căii produs de către diferențialul autoblocabil. În nici una din lucrările menționate nu se ține seama de elasticitatea transversală a pneurilor.

După cum se știe, la automobilele cu diferențial obișnuit pot apărea regimuri de mișcare instabilă înainte de a se ajunge la situațiile limită de derapare [15], ceea ce evidențiază necesitatea de a avea în vedere aspecte asemănătoare și cînd se folosesc diferențiale autoblocabile.

În lucrarea de față se studiază stabilitatea la perturbații mici a automobilelor cu diferențiale autoblocabile. După ce în prealabil se scriu ecuațiile de mișcare ale automobilului cu diferențial autoblocabil, se trece la ecuațiile perturbațiilor induse și se examinează stabilitatea sistemului obținut. Din studiul funcției de stabilitate se precizează influența

diferiţilor parametri constructivi şi a diferenţialului asupra stabilităţii mişcării, precum şi asupra vitezelor critice. În cazul neglijării efectelor aerodinamice se deduce o expresie simplă pentru viteză critică a automobilului şi apoi se face o exemplificare numerică care permite să se aprecieze creşterile vitezei critice realizate prin montarea diferenţialului autoblocabil.

Pentru automobil se va folosi un model matematic care nu include mişcările de ruliu ale caroseriei. Deci se va studia mişcarea plan-paralelă a modelului şi se vor neglija efectele variaţiei reacţiunilor verticale la roţi datorite forţei centrifuge. După cum este cunoscut, aceste ipoteze sînt justificate îndeosebi pentru mişcarea de bază rectilinie, aşa cum este cazul în lucrarea de faţă.

Se mai presupune că rigiditatea mecanismului de direcţie este foarte mare.

1. NOTAŢIILE PRINCIPALE FOLOSITE

C — proiecţia centrului de greutate al automobilului pe suprafaţa căii de rulare.

În cele ce urmează indicele 1 se referă la puntea din faţă, iar indicele 2 la puntea din spate.

O_i, $i \in \{1, 2\}$ — mijlocul punţii,

$a = CO_1$, $b = CO_2$, m,

L — ampatamentul, m,

B_2 — calea roţilor din spate, m,

R — raza de virare a automobilului, m,

$\bar{v}$ — viteza punctului C, $\mathrm{m.s^{-1}}$,

$\bar{v}_i$, $i \in \{1, 2\}$ — viteza mijlocului punţii, $\mathrm{m.s^{-1}}$,

v_{cr} — viteza critică, $\mathrm{m.s^{-1}}$,

α — unghiul de deviere dintre viteza $\bar{v}$ şi axa longitudinală a automobilului, rad,

α_i, $i \in \{1, 2\}$ — unghiul de deviere al punţii format de $\bar{v}_i$ şi axa longitudinală a automobilului, rad.

În continuare semnul „prim" se referă la roţile de pe partea dreaptă privind în sensul de mers al automobilului, iar semnul „secund" la roţile de pe partea stîngă.

r'_{20}, r''_{20} — razele libere de rulare ale roţilor din spate, m,

r'_2, r''_2 — razele de rulare ale roţilor din spate, m,

$\bar{v}'_2$, $\bar{v}''_2$ — vitezele centrelor roţilor din spate, $\mathrm{m.s^{-1}}$,

α'_2, α''_2 — unghiurile de deviere ale pneurilor din spate, rad,

β — unghiul mediu de virare al roţilor, rad,

ν — unghiul de convergenţă al roţilor directoare, rad,

ω — viteza unghiulară a axei longitudinale a automobilului, rad. $\mathrm{s^{-1}}$,

ω'_{r2}, ω''_{r2} — vitezele unghiulare ale roţilor din spate, rad. $\mathrm{s^{-1}}$,

m — masa automobilului, $\mathrm{kgf \cdot m^{-1} \cdot s^2}$,

G — greutatea automobilului, kgf,

G_i, $i \in \{1, 2\}$ — încărcarea statică la osie, kgf,

I_z — momentul de inerție al automobilului în raport cu axa ce trece prin C și este normală la cale, kgf. m. s^2,
X_2 — reacțiunea tangențială la puntea din spate, kgf,
X_2', X_2'' — reacțiunea tangențială la roțile din spate, kgf,
Y_i, $i \in \{1, 2\}$ — reacțiunea laterală totală la punte, kgf,
Z_i, $i \in \{1, 2\}$ — reacțiunea la punte, normală pe cale, kgf,
R_{ax}, R_{ay} — forța datorită interacțiunii cu aerul, respectiv pe direcția axei Cx_1 și Cy_1, kgf,
M_{az} — momentul aerodinamic pe direcția axei ce trece prin C și este normală la cale, kgf. m,
M_{pi}, $i \in \{1, 2\}$ — momentul stabilizator total al pneurilor, kgf. m,
C_i, $i \in \{1, 2\}$ — coeficientul de rezistență la deviere al punții, $kgf.rad^{-1}$,
C_{mi}, $i \in \{1, 2\}$ — coeficientul momentului stabilizator total, $kgf \cdot m \cdot rad^{-1}$,
k_{xo} — factorul aerodinamic pe direcția axei Cx_1, la scurgerea simetrică a aerului în raport cu axa longitudinală a automobilului, $kgf \cdot m^{-2} \cdot s^2$,
k_x, k_y — factorul de creștere a forței aerodinamice respectiv pe direcția axei Cx_1 și Cy_1, datorită scurgerii nesimetrice față de Cx_1, $kgf.m^{-2} \cdot s^2 \cdot rad^{-1}$,
k_{mz} — factorul de creștere a momentului aerodinamic M_{az}, $kgf.\ m^{-1}.\ s^2 \cdot rad^{-1}$,
λ — coeficientul elasticității tangențiale a pneului, $mkgf^{-1}$,
f — coeficientul de rezistență la rulare,
Δ creșterea unei anumite mărimi.

Punctul deasupra unei litere desemnează derivata măririi respective în raport cu timpul.

2. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE AUTOMOBILULUI CU DIFERENȚIAL AUTOBLOCABIL

Pentru a efectua studiul stabilității este necesar să se cunoască ecuațiile de mișcare. Acestea sînt alcătuite din ecuațiile de mișcare ale automobilului propriu-zis și din anumite relații suplimentare impuse de cinematica și dinamica diferențialului autoblocabil.

Ecuațiile de mișcare ale automobilului sînt deduse în numeroase lucrări. În [20] ele sînt scrise în condiții foarte generale, considerîndu-se ruliul și regimul nestaționar de mișcare.

În continuare se va considera domeniul liniar al caracteristicii pneurilor, adică

$$Y_i = C_i\ \alpha_i, \qquad M_{ii} = C_{mi}\ \alpha_i, \qquad i \in \{1, 2\}. \tag{1}$$

Forțele și momentele aerodinamice se exprimă cu relațiile:

$$R_{ax} = -k_{xo}v^2 - k_x v^2 \alpha, \qquad R_{ay} = -k_y v^2 \alpha, \qquad M_{az} = -k_{mz} v^2 \alpha. \tag{2}$$

Folosind, de pildă, rezultatele din [20], prin particularizările corespunzătoare și luarea în considerație a relațiilor (1) și (2), ecuațiile

de mişcare ale automobilului se scriu :

$$\dot{\alpha} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\alpha + \frac{a_{12}}{a_{11}}\omega = \frac{fZ_1 - a_{14}}{a_{11}}\beta,$$

$$\dot{\omega} + \frac{a_{22}}{a_{21}}\alpha + \frac{a_{23}}{a_{21}}\omega = (X_2' - X_2'')\frac{B_2}{2a_{21}^2} - \frac{a_{24} + afZ_1}{a_{21}}\beta. \tag{3}$$

$$m\dot{v} - mv\omega\alpha + k_{xo}v^2 + k_x v^2\alpha + fZ_1 + C_1\left(\beta - \alpha - \frac{a\omega}{v}\right)\beta = X_2.$$

În ecuaţiile de mai sus s-a avut în vedere că tracţiunea este la roţile din spate.

Prima ecuaţie exprimă echilibrul pe direcţia normală la axa longitudinală a automobilului, a doua ecuaţie echilibrul de momente în jurul axei verticale ce trece prin C_1 şi a treia echilibrul de forţe pe direcţia axei longitudinale a automobilului.

Coeficienţii a_{ij}, $i,j \in \{1, 2, 3, 4\}$ sînt daţi de următoarele expresii :

$$a_{11} = mv, \quad a_{12} = k_y v^2 + m\dot{v} + C_1 + C_2, \quad a_{13} = mv + \frac{aC_1 - bC_2}{v},$$

$$a_{14} = -C_1, \quad a_{21} = I_z, \quad a_{22} = -(C_{m1} + C_{m2} + nC_1) + aC_1 + k_{m_3}v^2 + \frac{C_1 B_1 \nu}{2},$$

$$a_{23} = \frac{a^2C_1 + b^2C_2}{v} + \frac{bC_{m2} - a(C_{m1} + nC_1)}{v} + \frac{C_1 a B_1 \nu}{2v}, \tag{4}$$

$$a_{24} = C_{m1} + nC_1 - aC_1 - \frac{C_1 B_1 \nu}{2}.$$

Urmărind figura 1 se introduc următoarele notaţii :

$$C_v M_2' = l_2', \quad C_v M_2'' = l_2'', \quad C_v O_2' = l_2, \quad C_v' O_2 = x_2.$$

Din condiţiile de rulare a roţilor din spate, rezultă

$$v_2' = r_2' \omega_{2r}', \quad v_2'' = r_2'' \omega_{2r}''. \tag{5}$$

Apoi, din considerente cinematice şi geometrice se scriu relaţiile

$$v_2 = l_2 \omega, \quad v_2' = l_2' \omega, \quad v_2'' = l_2'' \omega,$$

$$l_2' = (\mathcal{R} + 0{,}5\, B_2)\frac{1}{\cos \alpha_2'}, \quad l_2'' = (\mathcal{R} - 0{,}5\, B_2)\frac{1}{\cos \alpha_2''},$$

$$\cos \alpha_2' = \left[1 + \left(\frac{x_2}{\mathcal{R} + 0{,}50\, B_2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \cos \alpha_2'' = \left[1 + \left(\frac{x_2}{\mathcal{R} - 0{,}5\, B_2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Dezvoltînd expresiile cosinușilor după binomul lui Newton și reținînd primii doi termeni, din combinarea relațiilor precedente se obține

$$\frac{v_2''}{v_2'} = \frac{1 - 0{,}5\dfrac{B_2}{\mathcal{R}}}{1 + 0{,}5\dfrac{B_2}{\mathcal{R}}} \cdot \frac{1 - 0{,}5\left(\dfrac{x_2}{\mathcal{R} + 0{,}5\,B_2}\right)^2}{1 + 0{,}5\left(\dfrac{x_2}{\mathcal{R} - 0{,}5\,B_2}\right)^2}.$$

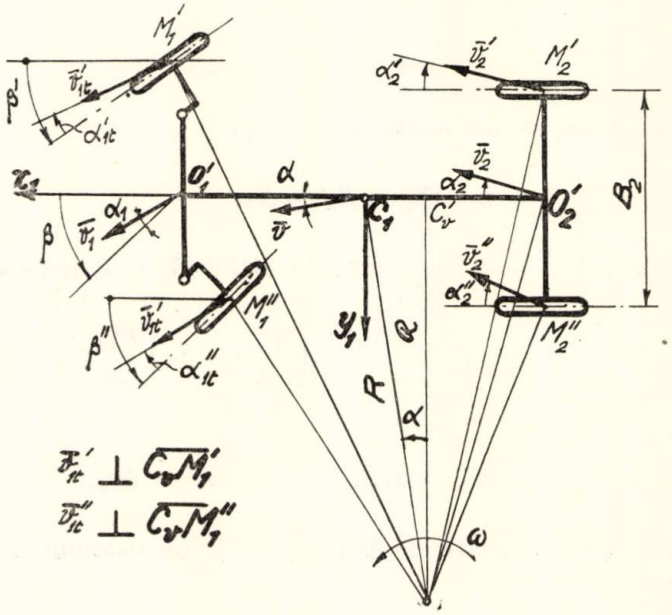


Fig. 1

Dar cum $\dfrac{B_2}{\mathcal{R}}$ și $\dfrac{x_2}{\mathcal{R} \pm 0{,}5\,B_2}$ au același ordin de mărime, prin neglijarea mărimilor de ordinul al doilea în formula precedentă, rezultă

$$\frac{v_2''}{v_2'} \simeq \frac{\mathcal{R} - 0{,}5\,B_2}{\mathcal{R} + 0{,}5\,B_2}. \tag{6}$$

Există relațiile evidente :

$$v = R\,\omega,\ \mathcal{R} = R\cos\alpha.$$

Pentru unghiuri mici se poate considera $v = \omega.\ \mathcal{R}$. Pe de altă parte, dependența dintre raza de rulare și forța tangențială la roată are forma generală cunoscută

$$r = r_0 - \lambda X.$$

Ținînd seama de cele arătate, relația (6) capătă forma finală,

$$\frac{\omega_{2r}''(r_{20}'' - \lambda'' X_2'')}{\omega_{2r}'(r_{20}' - \lambda' X_2')} = \frac{v - 0{,}5 B_2\omega}{v + 0{,}5 B_2\omega}. \tag{7}$$

În felul acesta s-a obținut relația suplimentară care permite eliminarea reacțiunilor tangențiale X_2', X_2'' în funcție de condițiile de funcționare ale diferențialului.

În continuare se va studia stabilitatea mișcării automobilului în condițiile cînd diferențialul este blocat. Deci se presupune că valoarea coeficientului de blocare a diferențialului este suficient de mare, astfel încît acesta să nu se deblocheze sub efectul perturbațiilor.

Diferențialul fiind blocat roțile vor avea aceeași viteză unghiulară. Prin urmare

$$\omega_{2r}' = \omega_{2r}'' = \omega_{2r}, \tag{7'}$$

De asemenea, se mai poate scrie relația

$$X_2' + X_2'' = X_2. \tag{7''}$$

Admițînd că $\lambda' = \lambda'' = \lambda$, din (7), (7') și (7'') se deduce

$$X_2' - X_2'' = \frac{\Delta r_0}{\lambda} - \left(\frac{2r_{20}^m}{\lambda} - X_2\right)\frac{B_2^2\omega}{2v}, \tag{8}$$

în care

$$r_{20}' + r_{20}'' = 2r_{20}^m, \qquad r_{20}' - r_{20}'' = \Delta r_0. \tag{9}$$

Așadar, acum se poate elimina $X_2' - X_2''$ din sistemul (3) prin folosirea relației (8).

3. ECUAȚIILE ÎN PERTURBAȚII ȘI STUDIUL STABILITĂȚII

În cele ce urmează se studiază stabilitatea în regim staționar, la deplasarea rectilinie a automobilului. Deci în mișcarea de bază $\dot{v} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$, $\omega = 0$, $\dot{X}_2 = 0$. Dacă $\Delta r_0 \neq 0$, este ușor de verificat că în mișcarea de bază $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. În această situație s-ar obține expresii complicate la studiul stabilității. De aceea se presupune că $\Delta r_0 = 0$, adică cele două roți au aceleași raze libere de rulare.

Ecuațiile perturbațiilor induse corespunzătoare primelor două ecuații din sistemul (3), ținînd seamă de (8) și de valorile variabilelor în mișcarea de bază, se scriu:

$$\begin{Vmatrix} \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\dot{\omega} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{a_{12}}{a_{11}}, & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{22}}{a_{21}}, & -\frac{a_{23}}{a_{21}} - \frac{0{,}5B_2^2r_{20}^m}{a_{21}} + \frac{0{,}5B_2}{a_{21}} \cdot \frac{X_2}{v} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\omega \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

De remarcat faptul că la scrierea ecuațiilor în perturbații nu s-a făcut nici un fel de presupunere cu privire la coeficienții de rezistență la deviere. Deci relațiile respective își păstrează valabilitatea și în cazul mai general cînd aceștia sînt dependenți de sarcina pe roată și de reacțiunile tangențiale.

De asemenea, analizînd ecuațiile (10) se observă că ele nu conțin nici perturbațiile vitezei, nici perturbațiile sarcinilor verticale pe roți. Deci perturbațiile vitezei unghiulare și ale unghiului de deviere sînt independente de celelalte perturbații. Astfel, pentru studiul stabilității mișcării sînt suficiente ecuațiile (10).

Pentru a scrie ecuația în perturbații corespunzătoare ultimei ecuații din (3), trebuie ca în prealabil să se exprime X_2 în funcție de parametrii de funcționare ai motorului. Un studiu mai amănunțit [20] conduce la o ecuație diferențială de ordinul doi în Δv, cu termenul liber o funcție de $\Delta \dot{\alpha}$ și $\Delta\alpha$. Mărimile $\Delta\dot{\alpha}$ și $\Delta\alpha$ sînt niște funcții cunoscute care se determină din sistemul (10) prin adoptarea valorilor inițiale.

Deși stabilitatea automobilului este asigurată prin stabilizarea lui $\Delta\alpha$ și $\Delta\omega$, totuși trebuie ca și Δv să se stabilizeze, întrucît altfel mișcarea de bază nu ar mai rămîne staționară. Aceasta revine la studiul ecuației în Δv, care conduce la condiția de funcționare stabilă a motorului [20]. În continuare se va presupune că această condiție este îndeplinită.

Valorile proprii ale matricei coeficienților sistemului (10) sînt date de ecuația

$$\xi^2 + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{0{,}5B_2^2 r_{20}^m}{a_{21}\lambda v} - \frac{0{,}25B_2}{a_{21}} \cdot \frac{X_2}{v}\right)\xi +$$

$$+ \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{a_{23}}{a_{21}} - \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) + \frac{a_{12}}{a_{11}}\left(\frac{0{,}25B_2^2 r_{20}^m}{a_{21} v\lambda} - \frac{0{,}25B_2^2}{a_{21}} \cdot \frac{X_2}{v}\right) = 0.$$

Mișcarea este uniform asimptotic stabilită dacă părțile reale ale valorilor proprii sînt negative. Aplicînd criteriul Routh—Hurwitz, condițiile de stabilitate se scriu

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{0{,}5\,B_2^2 r_{20}^m}{a_{21}\lambda v} - \frac{0{,}25B_2^2}{a_{21}} \cdot \frac{X_2}{v} > 0,$$

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{a_{23}}{a_{21}} - \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\left(\frac{0{,}25B_2^2 r_{20}^m}{a_{21} v\lambda} - \frac{0{,}25B_2^2}{a_{21}} \cdot \frac{X_2}{v}\right) > 0. \tag{11}$$

Înlocuind în inegalitățile de mai sus expresiile coeficienților (4), precum și expresia lui X_2 dată de ultima ecuație din (3), condițiile de stabi-

litate devin :

$$\frac{C_1+C_2+k_yv^2}{mv}+\frac{a^2C_1+b^2C_2}{vI_z}+\frac{bC_{m2}-a(C_{m1}+nC_1)}{vI_z}+\frac{0{,}5B_2^2r_{20}^m}{\lambda I_zv}-$$

$$-\frac{0{,}25B_2^2}{vI_z}(k_{x0}v^2+fZ_1)>0,$$

$$\frac{k_yv^2+C_1+C_2}{mv}\cdot\left[\frac{a^2C_1+b^2C_2}{vI_z}+\frac{bC_{m2}-a(C_{m1}+bC_1)}{vI_z}\right]-$$

$$-\frac{-(C_{m1}+nC_1+C_{m2}+aC_1-bC_2+k_{mz}v^2)}{I_z}\cdot\frac{mv^2+aC_1-bC_2}{mv^2}+$$

$$+\frac{k_yv^2+C_1+C_2}{mv}\left(\frac{0{,}5B_2^2r_{20}^m}{I_z\lambda v}-\frac{0{,}25B_2^2}{I_z}\cdot\frac{k_{x0}v^2+fZ_1}{v}\right)>0.$$

Prima condiţie de stabilitate este îndeplinită în orice condiţii, întrucît atît ultimul termen, cît şi termenul care conţine pe $bC_{m2}-a(C_{m1}+nC_1)$ sînt mult mai mici faţă de ceilalţi. Rămîne, aşadar, să fie studiată în continuare numai condiţia a doua de stabilitate. Se observă că în inegalitatea respectivă apare suma $C_{m1}+nC_1$. În continuare, pentru a nu complica scrierea, în locul acestei sume se va pune numai C_{m1}, înţelegîndu-se că el înglobează şi pe nC_1.

Dezvoltînd expresiile din condiţia de stabilitate şi grupînd în mod convenabil termenii se obţine următoarea expresie finală

$$S(v^2)=S_1v^4+S_2v^2+S_3>0, \tag{12}$$

în care

$$\begin{aligned}
S_1&=-(mk_{mz}+0{,}25B_2^2k_{x0}k_y),\\
S_2&=k_y(a^2C_1+b^2C_2+bC_{m2}-aC_{m1}-0{,}25B_2^2fZ_1+\frac{0{,}5B_2^2r_{20}^m}{\lambda}-k_{mz}(aC_1-\\
&\quad -bC_2)-m(aC_1-bC_2-C_m)-0{,}25B_2k_{x0}(C_1+C_2),\\
S_3&=L^2C_1C_2+L(C_1C_{m2}-C_2C_{m1})+(C_1+C_2)\frac{0{,}5B_2^2r_{20}^m}{\lambda}-0{,}25B_2^2fZ_1(C_1+C_2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Funcţia $S(v^2)$ va fi denumită funcţia de stabilitate.

Pentru a putea preciza condiţiile cînd are loc stabilitatea sau instabilitatea mişcării, este necesar să se studieze semnul funcţiei de stabilitate în funcţie de viteză şi de parametrii automobilului. La analizarea semnului funcţiei de stabilitate se pleacă de la diferitele posibilităţi pe

care le prezintă coeficienții S_1, S_2 și S_3 ai trinomului $S(v^2)$ în v^2. În discuția care urmează se are în vedere că $S_3 > 0$ în orice condiții. Aceasta rezultă din examinarea expresiei sale date de (13), în care termenii negativi sînt mult mai mici decît cei pozitivi.

De asemenea, trebuie ținut seamă că nu interesează decît domeniul pentru care $v^2 > 0$, $v > 0$.

Concentrat, discuția semnului funcției de stabilitate și rezultatele ei sînt arătate în tabela 1.

Vitezele critice se obțin prin rezolvarea ecuației ce rezultă la anularea funcției de stabilitate.

Tabela 1

S_1	S_2	$D = S_2^2 - 4S_1S_3$	$S(v^2)$	Domeniul de stabilitate
< 0	$\leqslant 0$	> 0	> 0 pt. $v < + v_{cr}$	$[0 - v_{cr})$
			< 0 pt. $v > v_{cr}$	
$= 0$	> 0	> 0	> 0	$[0 - \infty)$
			> 0 pt. $v < v_{cr}$	$[0 - v_{cr})$
	< 0		> 0 pt. $v > v_{cr}$	
	$= 0$	< 0	> 0	$[0 - \infty)$
> 0	> 0	> 0	> 0	$[0 - \infty)$
		< 0		
	< 0	> 0	> 0 pt. $v < v_{cr_1}$ sau $v < v_{cr_2}$	$[0 - v_{cr_1}) \cup (v_{cr_2} - \infty)$
			< 0 pt $v_{cr_1} < v < v_{cr_2}$	
		< 0	> 0	$[0 - \infty)$

În continuare se studiază amănunțit relațiile între parametrii automobilului, care satisfac diversele inegalități din tabelul 1, pentru a putea preciza situațiile cînd automobilul prezintă sau nu stabilitate. Din totalitatea parametrilor vor fi scoși în evidență în mod deosebit următorii doi : $aC_1 - bC_2 - C_m$, adică mărimea care caracterizează gradul virării automobilului (subvirarea sau supravirarea) și factorul de creștere a momentului aerodinamic k_{m_z}. Alegerea acestuia din urmă este justificată

de faptul că el poate avea, principial vorbind, atît valori pozitive, cît și valori negative, ceea ce determină deosebiri mari în comportarea la stabilitate a automobilului.

Factorul de creștere a forței aerodinamice laterale k_y, oricare ar fi modificările aduse caroseriei, păstrează un semn constant, iar valoarea sa nu poate fi micșorată sub o anumită limită. Influența asupra stabilității a acestui factor este mai mică comparativ cu cea datorită lui k_{mz}, care își poate schimba semnul.

Cel mai rapid și într-un mod sugestiv semnul lui S_2 în funcție de cei doi parametri amintiți anterior se examinează prin metoda reprezentărilor grafice.

Se introduc următoarele notații:

$$\theta_1 = a^2C_1 + b^2C_2 + bC_{m2} - a\,C_{m1} - 0{,}25B_2^2fZ_1 + \frac{0{,}5B_2^2r_{20}^m}{\lambda}, \qquad (14)$$

$$\theta_2 = L^2C_1C^2 + L(C_1 + C_{m2} - C_2C_{m1}) + (C_1 + C_2)\frac{0{,}5B_2^2r_{20}^m}{\lambda} - 0{,}25B_2^2fZ_1(C_1 + C_2),$$

$$\theta_3 = k_y\theta_1 - m(aC_1 - bC_{m2} - C_m) + 0{,}25B_2k_{x0}(C_1 + C_2).$$

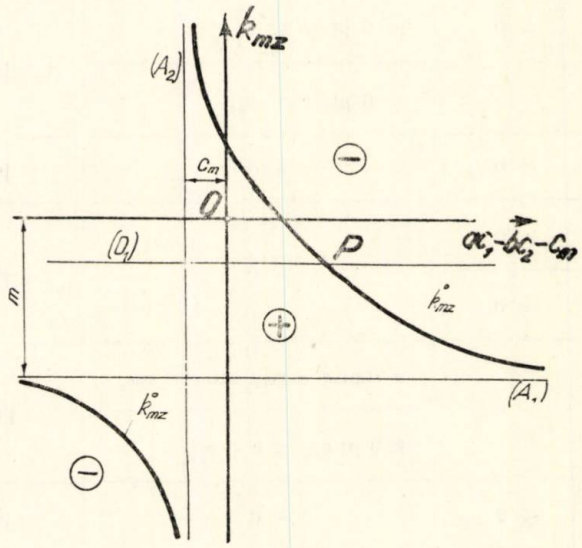


Fig. 2

Cu aceste notații coeficientul S_2 ia forma

$$S_2 = k_y\theta_1 + 0{,}25k_{x0}B_2(C_1 + C_2) - k_{mz}(aC_1 - bC_2 - C_m) - k_{mz}C_m - \\ - m(aC_1 - bC_2 - C_m). \qquad (15)$$

În figura 2 este reprezentată curba $S_2 = 0$. Ea este o hiperbolă ale cărei asimptote sînt date de ecuațiile

$$(A_1) \equiv k_{mz} = -m,$$

$$(A_2) \equiv aC_1 - bC_2 - C_m = -C_m.$$

Punctul de intersecția P dintre hiperbolă și dreapta (D_1) de ecuație

$$k_{mz} = -\frac{0{,}25 B_2^2 k_{x0} k_y}{m}$$

are abscisa dată de expresia următoare:

$$(aC_1 - bC_2 - C_m)_0 = \frac{k_y\left(\theta_1 + \frac{0{,}25 B_2^2 k_{x0}}{m} \cdot C_m\right) + 0{,}25\, B_2 k_{x0}(C_1 + C_2)}{m - \frac{0{,}25 k_{x0} k_y}{m}} \cdot \quad (16)$$

De pe figura 2 se citesc imediat domeniile în care S_2 are un anumit semn.

Discriminantul lui $S = 0$ se scrie

$$D = (aC_1 - bC_2)^2 k_{mz}^2 + 2\,[2m\theta_2 - (aC_1 - bC_2)\theta_3]\, k_{mz} + \theta_3^2 + B_2^2 k_{x0} k_3 \theta_2. \quad (17)$$

Discriminantul ecuației $D = 0$ are expresia

$$D' = [2m\theta_2 - (aC_1 - bC_2)\theta_3]^2 - (aC_1 - bC_2)^2(\theta_3^2 + B_2^2 k_{x0} k_y \theta_2). \quad (18)$$

Se mai fac următoarele notații:
k'_{mz}, k''_{mz} rădăcinile ecuației $D = 0$;
ε_1, ε_2 rădăcinile ecuației $D' = 0$ (necunoscuta $aC_1 - bC_2$).
Se demonstrează că [20]:
ε_1, ε_2 sînt întotdeauna reale și de semn contrar;
k'_{mz}, k''_{mz} sînt negative, în cazul cînd sînt reale;
$k''_{mz} < k^0_{mz} < k'_{mz}$, pentru cazul cînd $k^0_{mz} < -0{,}25\ m^{-1}\ B_2^2 k_{x0} k_y$;
$k'_{mz} < -0{,}25\ m^{-1}\ B_2^2\ k_{x0} k_y$.
S-a notat cu k^0_{mz} acea valoare a lui k_{mz} care satisface ecuația $S_2 = 0$.

Pe baza tabelei 1 și a celor discutate se determină semnul funcției de stabilitate pentru diferite valori ale lui k_{mz} și $aC_1 - bC_1 - C_m$. Rezultatele acestei analize sînt date în tabela 2, unde S reprezintă stabilitate necondiționată; S_1 — stabilitate condiționată cu viteză critică; S_2 — stabilitate condiționată cu domeniu finit de instabilitate.

Tabela 2

k_{mz} \ $aC_1-bC_2-C_m$	$aC_1-bC_2-C_m<0$				$aC_1-bC_2-C_m=0$	$aC_1-bC_2-C_m>0$			
	$aC_1-bC_2<0$		$aC_1-bC_2>0$			$<(aC_1-bC_1-C_m)_0$		$>(aC_1-bC_2-C_m)_0$	
	$<\varepsilon_1$		$>\varepsilon_1$			$aC_1-bC_2>0$		$aC_1-bC_2>0$	
								$<\varepsilon_2$	$>\varepsilon_2$
$\infty, -\frac{0{,}25\,B_2^2 k_{x0}k_y}{m}$	S_1		S_1		S_1	S_1		S_1	
$-\frac{0{,}25\,B_2^2 k_{x0}k_y}{m}$	S		S		S	S_1		S_1	
$-\frac{0{,}25\,B_2^2 k_{x0}k_y}{m}$, k'_{mz}	S		S		S	S_2		S_2	
k'_{mz}, k^0_{mz}	S		S		S	S		S	S_2
k^0_{mz}, k''_{mz}	S_2	S	S		S	S		S	
k''_{mz}, $-\infty$	S_2		S		S	S		S	

Trebuie observat că pentru unele valori ale lui $aC_1 - bC_2 - C_m$ nu există de fapt $k^0_{mz} < -0{,}25\ B_2^2\, m^{-1} k_{x0}\, k_y$, ceea ce se vede și din figura 2. Acest lucru a fost arătat în tabela 2 cu linii duble. Cu alte cuvinte, deși este trecut k^0_{mz} în ordinea arătată în coloana respectivă, pentru domeniul astfel indicat în tabela 2, ordinea reală este alta. Deci, în acest domeniu, există stabilitate pentru orice $k_{mz} \leqslant 0{,}25\ B_2^2\, m^{-1} k_{x0} k_y$.

De asemenea, deși au fost trecute rădăcinile k'_{mz} și k''_{mz} în dreptul tuturor coloanelor, ele nu sînt reale în cazul cînd $aC_1 - bC_2 < \varepsilon_1$ și $aC_1 - -bC_2 > \varepsilon_2$. Prin urmare, în aceste situații k_{mz} se compară cu k_{mx0} și, respectiv, cu k^0_{mz} și $-0{,}25\ B_2^2\, k_{x0} k_y m^{-1}$.

Pentru a nu construi mai multe tabele s-a recurs la soluția de mai sus, la care trebuie să se țină seama de observațiile făcute.

Tabela 2 generalizează tabela cunoscută al lui Riekert P. și Schunck T. [16]. Generalizarea rezultă, pe de o parte, din faptul că aici sînt luate în considerație și momentele stabilizatoare ale pneurilor (inclusiv „n"), iar, pe de altă parte, prin tratarea cazului cînd automobilul este prevăzut cu diferențial autoblocabil.

Este de remarcat încă de la început, că în această tabelă mărimile de intrare, care determină caracterul stabilității, sînt funcții de coeficienții de rezistență la deviere ai pneurilor și de coeficienții momentelor stabilizatoare. Dar cum condițiile de stabilitate, așa cum s-a arătat, sînt valabile în cazul cel mai general, cînd C_i și C_{mi} depind atît de sarcina verticală, cît și de forța tangențială, rezultă că mărimile caracteristice din tabelă sînt funcții de valorile efective ale lui C_i și $C_{mi} (i = 1, 2)$. Ele nu depind direct de modul cum variază coeficienții de rezistență la deviere în funcție de sarcină verticală și forța tangențială; adică mărimile respective nu mai depind și de alți parametri ai pneurilor.

În tabela din [16] mărimile caracteristice sînt exprimate în funcție de μ', μ_1 și σ' (notațiile sînt cele din lucrarea respectivă). Acestea, la rîndul lor, sînt dependente de parametrii pneurilor $\bar{C}$ și c' și de greutatea automobilului, admițîndu-se variația parabolică a coeficienților de rezistență la deviere în funcție de sarcina pe roată (nu se ia în considerație efectul forței tangențiale și nici nu se observă că tabela își păstrează valabilitatea și în această situație). De asemenea, în lucrarea amintită pneurile care echipau automobilul erau identice.

Folosind expresiile din [16] se verifică ușor că

$$\mu' = aC_1 - bC_2,\ \mu_1 = -(a^2C_1 + b^2C_2),\ \sigma' = C_1 + C_2,$$

în care notațiile din membrul al doilea au semnificațiile adoptate în lucrarea de față.

Astfel, se confirmă și pe această cale ceea ce s-a remarcat mai înainte.

Pentru a obține mărimile caracteristice în cazul diferențialului obișnuit, în primul rînd se vor înlătura termenii care conțin pe λ și apoi se va ține seama că

$$(aC_1 - bC_2 - C_m)_0 = \frac{k_y\,\theta_1}{m},$$

$$\varepsilon_1 \text{ nu există},\ \varepsilon_2 = \frac{m\,(C_1 + C_2)}{k_y},$$

— coeficientul lui v^4 este $-mk_{mz}$.

Acestea rezultă din modul de scriere al funcției de stabilitate.

Din tabela 2 rezultă situațiile cînd automobilul prezintă stabilitate și cînd nu. În cazul cînd mișcarea automobilului este stabilă *oricare ar fi viteza* sa se folosește denumirea de *stabilitate necondiționată*. Dacă mișcarea este stabilă doar pînă la o anumită viteză, care este chiar viteza critică, atunci se folosește denumirea de *stabilitate condiționată, cu viteză critică*. În fine, dacă mișcarea este instabilă, într-un domeniu limitat de două viteze finite atunci se spune că există *stabilitate condiționată cu domeniu finit de instabilitate*.

Introducerea diferențialului autoblocabil are ca efect unele modificări în comportarea la stabilitate a automobilului.

Se observă că la valori nule ale lui k_{mz} automobilul cu diferențial autoblocabil prezintă stabilitatea S_1 spre deosebire de automobilul cu diferențial normal, care — pentru $(aC_1 - bC_2 - C_m) < (aC_1 - bC_2 - C_m)_0$ — prezintă stabilitate necondiționată. Deci, în aceste condiții, introducerea diferențialului autoblocabil este dezavantajoasă. Însă, din punct de vedere practic, acest dezavantaj este neînsemnat fiindcă valoarea lui $k_{mz} = -\frac{0{,}25\,B_2^2\,k_{x0}k_y}{m}$ este foarte apropiată de zero iar viteza critică care se obține are valori foarte mari, așa cum se va vedea mai jos.

În domeniul valorilor pozitive ale lui k_{mz}, adică în cazul automobilelor uzuale, se observă că natura stabilității este aceeași în ambele cazuri : S_1. Natural, viteza critică se va modifica.

Pentru a examina modificările vitezei critice, funcţia de stabilitate se pune sub forma

$$s(v^2) = s_0\,(v^2) + T\,(v^2), \tag{19}$$

unde

$s_0(v^2)$ reprezintă funcţia de stabilitate în cazul automobilului cu diferenţial obişnuit,

$$T(v^2) = -\,\nu_0\,v^4 + \nu_1\,v^2 + (C_1 + C_2)\,\nu_1,$$

$$\nu_0 = 0{,}25\,B_2^2 k_{x0} k_y,\ \nu_1 = \frac{0{,}5\,B_2^2 r^m{}_{20}}{\lambda} - 0{,}25\,B_2^2 f Z_1. \tag{20}$$

Rădăcinile trinomului $T(v^2)$ în v^2 sînt întotdeauna reale şi de semn contrar, fiind date de relaţia

$$v_{1,2}^2 = \frac{\nu_1}{2\nu_0} \pm \frac{\nu_1}{2\nu_0}\sqrt{1 + \frac{4(C_1 + C_2)\,\nu_0}{\nu_1}}. \tag{21}$$

Calculele arată că raportul $\dfrac{C_1 + C_2}{\nu_1}$ are în general valori apropiate de unitate. De asemenea, utilizînd datele din [14] se constată că pentru autoturisme există relaţia

$$4\nu_0 \simeq (2 \div 4)\cdot 10^{-2}.$$

Prin urmare, pentru (21) se poate scrie formula aproximativă

$$v_{1,2}^2 \simeq \frac{\nu_1}{2\nu_0} \pm \frac{\nu_1}{2\,\nu_0}\left(1 + 2\cdot\frac{C_1 + C_2}{\nu_1}\cdot\nu_0\right).$$

Considerînd numai rădăcina pozitivă, rezultă

$$v_1^2 \simeq \frac{\nu_1}{\nu_0} + C_1 + C_2. \tag{22}$$

Dacă se ţine seama de (20), prin neglijarea lui $0{,}25\,B_2^2 f Z_1$, rezultă

$$v_1^2 \simeq C_1 + C_2 + \frac{2r_{20}^m}{k_{x0}k_y}. \tag{23}$$

Valoarea vitezei determinată de formula (23) este foarte mare.

Astfel, se consideră un autoturism de clasă mijlocie cu următoarele caracteristici: $C_1 = C_2 = 3\,500$ kgf. rad^{-1}, $r_{20}^m = 0{,}294$ m, $k_{x0} = 0{,}0467$ kgf. $\cdot$ m$^{-2} \cdot s^2$; $k_y = 0{,}27$ kgf. m$^{-2} \cdot s^2 \cdot$ rad^{-1}; $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$m $\cdot$ kgf^{-1}.

În urma efectuării calculelor rezultă

$$v_1 \simeq 1070 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad V_1 \simeq 3860 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Evident, $T(v^2) > 0$ pentru $v < v_1$ și $T(v^2) < 0$ pentru $v > v_1$. Dacă se notează v_{cro} viteza critică în cazul diferențialului obișnuit, din cele de mai sus rezultă următoarele posibilități:

— dacă $v_{cro} < v_1$, atunci $v_{cro} < v_{cr} < v_1$,
— dacă $v_{cro} > v_1$, atunci $v_1 < v_{cr} < v_{cro}$.

Prin urmare, dacă automobilul cu diferențial normal are o viteză critică mai mică decît viteza v_1 dată de (21), atunci introducerea diferențialului autoblocabil are ca efect mărirea vitezei critice. Dimpotrivă, dacă viteza critică în cazul diferențialului normal este mai mare decît viteza v_1, montarea unui diferențial autoblocabil conduce la, micșorarea vitezei critice și, deci, la înrăutățirea stabilității. Dar, în orice caz, viteza critică rămîne mai mare decît viteza v_1.

Însă, așa cum rezultă din cele arătate mai înainte, viteza v_1 are valori foarte ridicate, și anume de aproximativ zece ori mai mari decît vitezele maxime ale unui automobil de curse cu performanțe foarte bune. Deci, se poate conchide că micșorarea de stabilitate are loc numai în cazul automobilelor foarte stabile; această înrăutățire de stabilitate este, din punct de vedere practic, cu totul neînsemnată. Dacă s-ar calcula rezerva de stabilitate statică a automobilului cu caracteristicile indicate în exemplul de calcul ($L = 2{,}7$m) în ipoteza că viteza critică ar fi egală cu v_1, ar rezulta valoarea de $-4{,}0 \cdot 10^{-2}\%$. În aceste condiții automobilul poate fi considerat cu virare neutră.

În cealaltă situație, cînd are loc îmbunătățirea stabilității, avantajul introducerii diferențialului autoblocabil este evident, întrucît, în unele cazuri, mărirea vitezei critice este substanțială. Se observă că mărirea vitezei critice este cu atît mai accentuată cu cît viteza critică în cazul diferențialului obișnuit este mai mică (la suma $C_1 + C_2$ dată), întrucît trinomul $T(v^2)$ este independent de mărimea $aC_1 - bC_2 - C_m$, care determină în mare măsură valoarea vitezei critice.

În general un automobil își modifică caracteristicile de stabilitate în funcție de starea de încărcare. În această situație montarea diferențialului autoblocabil, pe lîngă avantajele cunoscute, poate să contribuie și la îmbunătățirea stabilității în situațiile de încărcare în care ar prezenta instabilitatea cu diferențialul obișnuit.

Pentru $k_{mz} < -\dfrac{0{,}25\, B_2^2 k_{x0} k_y}{m}$ se observă că automobilul este stabil chiar dacă prezintă o rezervă statică de stabilitate statică negativă (supravirare). Prin montarea diferențialului autoblocabil această supravirare se majorează întrucît crește θ_1 (creșterea poate fi de 100%). Este

de observat că în cazul diferențialului normal supravirarea pînă la care automobilul este stabil aerodinamic este destul de scăzută (de plidă, pentru exemplul luat mai înainte, supravirarea ar fi — 0,1%). Rezultă și din acest punct de vedere avantajul diferențialului autoblocabil.

Din tabela 2 se constată că pentru valorile lui k_{mz} din linia a patra și pentru $aC_1 - bC_2 > \varepsilon_2$ automobilul (cu sau fără diferențial autoblocabil) prezintă un domeniu de instabilitate. Însă, din punct de vedere practic, atît în cazul diferențialului normal, cît și în cazul diferențialului autoblocabil, această situație nu poate avea loc, întrucît nu poate fi satisfăcută condiția

$$aC_1 - bC_2 > \varepsilon_2. \tag{24}$$

Pentru justificare se va considera, inițial, cazul diferențialului obișnuit. Inegalitatea de mai sus devine

$$aC_1 - bC_2 > \frac{m(C_1 + C_2)}{k_y}. \tag{25}$$

Dacă se mențin constante ampatamentul și greutatea automobilului, dar se modifică poziția centrului de greutate, atunci C_1 și c_2 se vor modifica. Notîndu-se cu $C_{1\max}$ valoarea maximă atinsă de C_1 în condițiile de mai sus, se poate scrie

$$aC_1 - bC_2 < L\, C_{1\max}, \tag{26}$$

Variația coeficientului de rezistență la deviere în funcție de sarcina pe pneu are loc după o curbă care este indicată calitativ în figura 3 (pentru pneuri de autoturisme). Potrivit datelor experimentale curba respectivă este convexă, așa cum s-a și schițat.

Ținînd seama că $G_1 = G\frac{L-a}{L}$ $G_2 = G\frac{a}{L}$ se poate considera variația coeficienților de rezistență la deviere în funcție de a, plecînd de la figura 3. În acest fel se construiesc curbele din figura 4.

Datorită convexității curbelor există inegalitățile

$$C_1'(L-a)L^{-1} + C_2' a L^{-1} < C_1 + C_2 \equiv a(C_2' - C_1')L^{-1} + C_1' < C_1 + C_2.$$

Se mai pot scrie inegalitățile

$$C_1' + (C_2' - C_1')aL^{-1} > C_1' \text{ dacă } C_2' > C_1'; \; C_1' + (C_2' - C_1')aL^{-1} > C_2', \text{ dacă } C_2' < C_1'.$$

Deci: sau $C_1 + C_2 > C_1$; sau $C_1 + C_2 > C_2'$.

Din combinarea inegalităților (25), (26) și (27), rezultă :

$$\text{sau } \frac{C_{1\max}}{C_1} > \frac{m}{k_y L}, \text{ sau } \frac{C_{1\max}}{C_2'} > \frac{m}{k_y L}. \tag{28}$$

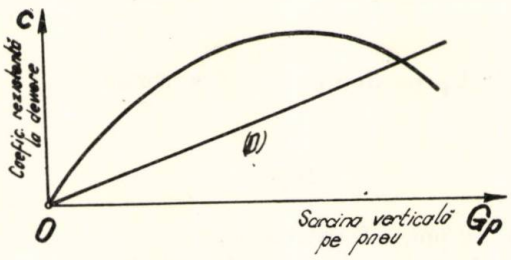


Fig. 3

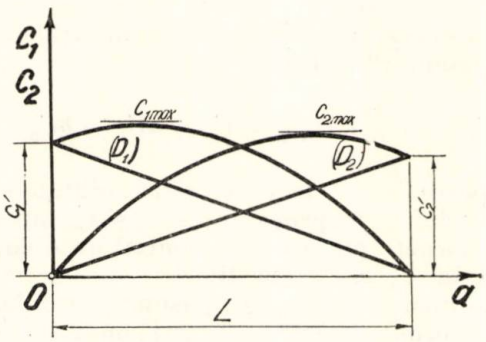


Fig. 4

Întrucît pentru autoturisme sarcina nominală pe două pneuri este aproximativ 0,5 G, atunci C_1' și C_2' reprezintă coeficienții de rezistență la deviere pentru o sarcină aproximativ egală cu dublul celei nominale.

Potrivit datelor experimentale [9], [10] se poate considera

$$\frac{C_{i\max}}{C_i'} < 2, \; i \in \{1, 2\}.$$

Prin urmare, inegalitățile (28) se reduc la

$$\frac{m}{k_y L} < 2. \tag{29}$$

Pentru autoturisme, în urma analizei rezultatelor experimentale [1] [7], [14], [17] se constată că $k_y L \simeq 1$. Așadar, pentru a fi satisfăcută inegalitatea (29) ar trebui ca k_y să aibă valori de cel puțin 80—100 ori mai mari decît cele uzuale.

Pentru autocamioane se procedează în mod asemănător, observînd că $C_{1max} = C_1'$ $C_{2max} = C_2'$ [8].

În cazul diferenţialului autoblocabil se demonstrează prin folosirea relaţiei (18) că

$$\varepsilon_2 > \frac{m(C_1 + C_2)}{4k_y}.$$

Folosind acelaşi procedeu ca mai sus, rezultă

$$\frac{m}{4k_y L} < 2,$$

care, de asemenea, nu poate fi satisfăcută.

Printr-o metodă asemănătoare celei utilizate mai înainte se dovedeşte că nici condiţia $aC_1 - bC_2 < \varepsilon_1$ nu poate fi practic îndeplinită. Se pleacă de la inegalitatea $\varepsilon_1 < -m\ (C_1 + C_2)\ k_y^{-1}$, care se dovedeşte cu uşurinţă.

Mai este de observat că pentru valori negative ale lui k_{mz} cel mai avantajos este automobilul la care

$$(aC_1 - bC_2 - C_m)_0 + C_m > aC_1 - bC_2 > 0,$$

întrucît nu există posibilitatea de a apăra instabilitate cu domeniu limitat.

Pentru valorile lui k_{mz} cuprinse între k'_{uz} şi k''_{mz} automobilul este stabil atît cu diferenţial normal, cît şi cu diferenţial autoblocabil. Însă, în cele două cazuri valorile lui k'_{mz} şi k''_{mz} vor diferi.

În privinţa influenţei lui k_{mz} şi k_y asupra vitezelor critice, o examinare mai detailată a ecuaţiei $S(v^2) = 0$ [20] conduce la următoarele rezultate :

— viteza critică se micşorează o dată cu creşterea lui k_{mz} (în cazul S_1) ;

— viteza critică inferioară se micşorează, iar cea superioară se măreşte o dată cu creşterea lui k_{mz} (în cazul S_2) ;

— viteza critică se măreşte o dată cu creşterea lui k_y (în cazul S_1) ;

— viteza critică inferioară se măreşte, iar cea superioară se micşorează o dată cu creşterea lui k_y (în cazul S_2).

Este de observat că influenţa favorabilă a lui k_y se pune şi mai bine în valoare în cazul difefenţialului autoblocabil. Acest lucru rezultă din examinarea figurii 5.

Cînd studiul stabilităţii se face fără considerarea acţiunii aerului, expresia vitezei critice este mai simplă. Punînd $k_y = k_{mz} = 0$ şi anulînd funcţia de stabilitate, rezultă următoarea expresie pentru viteza critică :

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{L^2 C_1 C_2 + L(C_1 C_{m2} - C_2 C_{m1}) + \frac{0{,}5\ B_2^2 r_{20}^m}{\lambda}(C_1 + C_2) - 0{,}25\ B_2^2 f Z_1 (C_1 + C_2)}{m(aC_1 - bC_2 - C_m) + 0{,}25\ B_2 k_{x0}(C_1 + C_2)}} \tag{30}$$

Se observă că față de cazul diferențialului obișnuit intervine o modificare a rezervei de stabilitate statică, a cărei variație este

$$\frac{0{,}25 B_2 k_{x0}}{m\ L}. \tag{31}$$

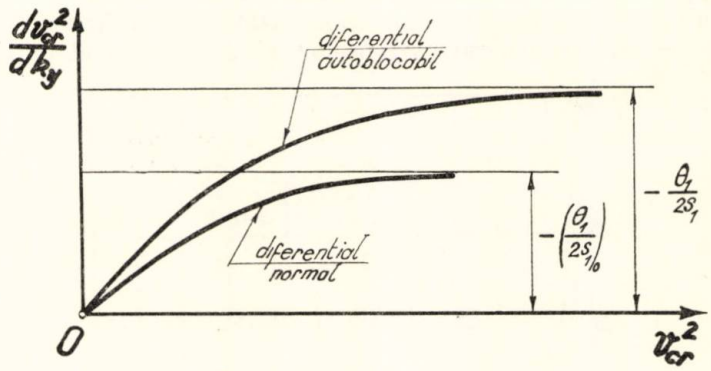


Fig. 5

Din (30) rezultă că viteza critică este cu atît mai mare cu cît rigiditatea pneurilor este mai mare. Dacă $\lambda = 0$, atunci $v_{cr} \to \infty$. Concluzia este adevărată numai dacă diferențialul continuă să rămînă blocat, căci în aceste condiții s-a dedus formula (30).

4. APLICAȚIE NUMERICĂ

Pentru exemplificare se consideră un autoturism de clasă mijlocie, presupunîndu-se că se realizează mai multe variante determinate de rigiditățile diferite ale pneurilor și de pozițiile modificate ale centrelor de greutate. Caracteristicile celor patru variante sînt arătate pe figura 6. Se mai adoptă următoarele caracteristici :

$m = 163$ kgf $\cdot$ m^{-1}s^2, $B_2 = 1{,}42$ m, $r_{20}^m = 0{,}294_m$, $k_{x0} = 0{,}0467$ kgf $\cdot$ m$^{-2} \cdot s^2$.

În ce privește λ, acesta va fi tratat ca un parametru variabil în funcție de care se vor calcula vitezele critice.

Calculele arată că, în general, termenul subliniat din formula (30) este neglijabil. De asemenea și mărimea dată de (31) este neglijabilă (în cazul de față 3,78 $\cdot 10^{-5}$).

Vitezele critice în cazul cînd diferențialul este prevăzut cu diferențial normal sînt (în ordinea în care s-au numerotat variantele) : 96 ; 62, 7 ; 136,4 și 87,5 km $\cdot$ h^{-1}. Pentru a aprecia mai bine diferențele care apar s-au calculat variațiile procentuale ale vitezelor critice raportate la viteza

critică cu diferențial normal, ce corespunde fiecărei variante. Variațiile s-au calculat cu formula

$$\Delta v_{cro}\,\% = \frac{v_{cr} - v_{cro}}{v_{cro}}\,100\,\%,$$

unde v_{cro} reprezintă viteza critică a automobilului cu diferențial normal.

Pe baza acestor calcule s-au trasat curbele din figura 6. În acest grafic, curbele care corespund variantelor A_1' A_1'' și respectiv A_2', A_2'' sînt

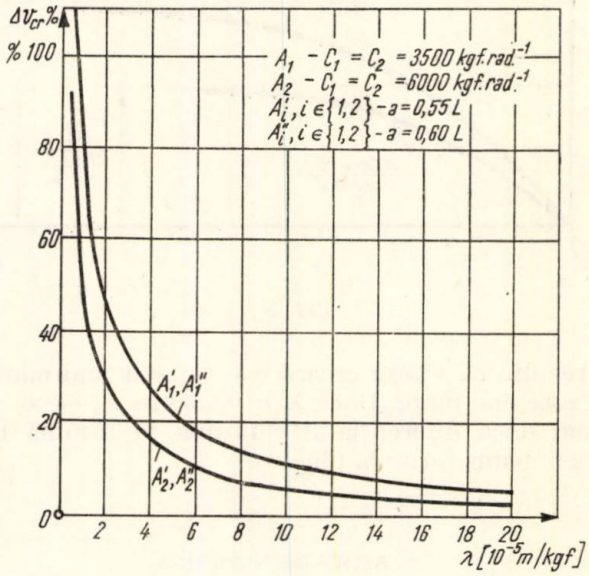


Fig. 6

foarte puțin diferite, astfel că ele practic coincid. Rezultă, deci, că variațiile procentuale ale vitezei critice sînt puțin influențate de modificarea poziției centrului de greutate, indiferent de valorile coeficienților de rezistență la deviere.

Din fig. 6 se constată că mărirea vitezei critice prin montarea diferențialului autoblocabil este mai accentuată în cazul cînd pneurile sînt mai puțin rigide transversal. Această afirmație se poate verifica și direct prin examinarea formulei (30) în care se înlocuiește $C_1 = C_2 = C$.

Se remarcă, de asemenea, că influența lui λ asupra vitezei critice este diferită. Astfel, pentru valori ale lui λ care depășesc $(16-18) \cdot 10^{-5}$m . . kgf $^{-1}$, variațiile vitezei critice se modifică foarte puțin. În schimb, pentru valori mai mici de $0{,}5 \cdot 10^{-5}$ m . kgf^{-2} vitezele critice cresc foarte rapid. Pentru pneurile reale se poate considera că rigiditatea tangențială este cuprinsă între $2 \cdot 10^{-5}$ m.kgf^{-1} și $7 \cdot 10^{-5}$ m·kgf^{-1}. În cazul unei rigidități foarte mari, de pildă luînd pentru λ limita inferioară, rezultă creșteri de viteze critice de 30 % și respectiv 48 %. În special în ultimul caz, adică al pneurilor foarte elastice în sens transversal, creșterea care se

obține pentru viteza critică este substanțială. Din acest punct de vedere foarte avantajoase sînt pneurile radiale, care prezintă o rigiditate tangențială mai mare decît pneurile obișnuite.

Considerînd limita inferioară a rigidității tangențiale, adică limita superioară a valorii lui λ indicată mai înainte, rezultă creșterile de viteză critică de 9% și 16%. În cazul acesta creșterile nu sînt atît de importante, dar cel puțin pentru pneurile cu elasticitate transversală mare îmbunătățirea stabilității este satisfăcătoare. În fine, pentru o valoare medie a rigidității căreia îi corespunde $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ m·kgf^{-1}, creșterile vitezei critice sînt de 16% și 26%, care pot fi considerate importante, mai ales în ultimul caz. Îndeosebi în situația cînd vitezele critice sînt sub 100 km·h^{-1}, deci în domeniul vitezelor maxime de circulație obișnuite pe șoselele moderne, mărirea vitezelor critice cu aproximativ 20 km. h^{-1} este deosebit de importantă contribuind în măsura însemnată la îmbunătățirea stabilității.

O anumită comportare la stabilitate se obține în cea mai mare măsură prin alegerea corespunzătoare a rigidităților la deviere ale pneurilor și a poziției centrului de greutate. Din considerente legate de organizarea generală a automobilului, nu întotdeauna este posibil să se aleagă poziția centrului de greutate al automobilului astfel încît să fie satisfăcute condițiile de mai sus, mai ales dacă se ține seamă că starea de încărcare a automobilului variază și, o dată cu ea, și poziția centrului de greutate. De asemenea, nici raportul C_1/C_2 nu poate depăși anumite limite. Întrucît pneurile sînt identice, modificarea rigidităților se realizează prin modificarea presiunii aerului, care nu poate fi coborîtă sub anumite limite din considerente legate de durabilitatea pneurilor, de oscilații ale roților de direcție sau de ușurința conducerii.

Or, introducerea diferențialului autoblocabil permite constructorului o mai mare libertate în alegerea elementelor amintite, fără ca stabilitatea să fie nesatisfăcătoare.

5. CONCLUZII

În lucrare s-a studiat stabilitatea la perturbații mici a automobilelor cu diferențial autoblocabil precizîndu-se toate situațiile cînd automobilul prezintă stabilitate sau instabilitate în funcție de valorile lui $aC_1 - bC_2 - C_m$, $aC_1 - bC_2$ și k_{mz}. Rezultatele obținute generalizează pe acelea din cazul automobilului cu diferențial normal [16], aducîndu-se și alte precizări suplimentare. În cazul neglijării efectelor aerodinamice se deduce o formulă simplă care permite calculul vitezei critice a automobilului cu diferențial autoblocabil.

Montarea diferențialului autoblocabil conduce la îmbunătățirea stabilității automobilului prin mărirea vitezei critice (la automobilele actuale $k_{mz} > 0$).

Creșterea vitezei critice în comparație cu cea din cazul diferențialului normal este cu atît mai mare, cu cît ultima viteză critică este mai mică. Această creștere poate atinge 45%.

De asemenea, ameliorarea stabilității este cu atît mai importantă, cu cît rigiditatea tangențială a pneurilor este mai mare și cu cît rigiditatea la deviere a lor este mai mică.

Prin montarea diferenţialului autoblocabil, care nu implică complicaţii constructive deosebite sau cheltuieli mari, se pot obţine calităţi de stabilitate corespunzătoare, mai ales cînd celelalte metode şi-au epuizat posibilităţile, în cadrul unei anumite soluţii constructive.

Primită la redacţie la 31 octombrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Barth, R., *Luftkräfte am Kraftfahrzeug*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkehrstechnick, Heft, *184*, 14 (1966).
2. Ciudakov, E. A., *Teoriia avtomobilea*, I: Ustoicivost avtomobilea protiv zanosa, Iz-vo Akademii Nauk SSSR, Moskva — Leningrad, 1944.
3. Ciudakov, E. A., *Bokovaia ustoicivost bezdifferenţialnogo avtomobilea*, Iz-vo Akademia Nauk SSSR, Moskva — Leningrad, 1945.
4. Ciudakov, E. A., *Vlieanie tangeţinalnoi elasticinosti koles na bokovuiu ustoicivost avtomobile*, Iz-vo Akademii Nauk SSSR, Moskva — Leningrad, 1947.
5. Dieakov, I. Ia., Nosenkov, M. A., *Vlieanie samoblokiruiuşcegosea differenţiala na ustoicivost gruzugo avtomobilea tipa 4 × 2 protiv zanosa*, Avtomobilnaia promîşlennost, **XXXII**, *5*, 8—11 (1966).
6. Divakov, N. V., *Kriterii oţenki avtomobilnîh differenţialov*, în Avtomobilnaia promîşlennost, **XXVI**, *6*,7—11 (1960).
7. Dolmatovski, Iu. A., Zeibang, K. V., *Issledovaniia obtekaemosti sovremennogo legkogo avtomobilea*, Issledovanie kuzovov i ram avtomobilei, NAMI, vîpusk 58, Maşghiz, Moskva 1950, p. 3—31.
8. Freudenstein, G., *Luftreifen vei Schräg-und Kurvenlauf- Experimentelle und theoretische Untersuchungen an Lkw-Reifen*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkehrstechnick, *152* (1961).
9. Gauss, F., Wolff, H., *Über die Seitenführungskraft von Personenwagen-Reifen*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkeherstechnick, *133* (1959).
10. Koessler, P., Senger, G. *Vergleichende Untersuchungen des Seitenführungseigenschaften von Personenwagen-Reifen*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkehrstechnick, *162* (1964).
11. Korotkov, L. I., *O vlieanii differenţiala v veduşcei osi na ustoicivost avtomobilea v preamolineainom dvijenii*, Avtomobilnaia promîşlennost, **XXXII**, *11*, 13—15 (1961).
12. Lefarov, A. H., *O primenenii blokiruiuşcihsea differenţialov*, Avtomobilnaia promîşlennost, **XXVIII**, *11*, 16—18 (1962).
13. Malkin, I. I., *Teoriia ustoicivosti dvijeniia*, Iz-vo Nauka, Moskva, 1966.
14. Mihailovski, E. V., Tur, E. Ia., *Aerodinamiceskie ispîtaniia obtekaniia legkovîh avtomobilei nesimetricinîm vozdušnîm potokom*, Avtomobilnaia promîşlennosti, **XXX**, *8*, 22—24 (1964).
15. Pevzner, Ia. M., *Teoriia ustoicivosti avtomobilea*, Maşghiz, Moskva, 1947.
16. Reikert, P., Schunck, T. E., *Zur Fahrmechanik des gummibereiften Kraftfahrzeugs*, Ingenieur-Archiv, **XI**, *30*, 210—224 (1940).
17. Sawatzki, E., *Die Luftkräfte und ihre Momente am Kraftwagen*, Deutsche Kraftfahrtforschung, *50* (1940).

18. SEGEL, L., *Theoretical Prediction and Experimental Substantiation of the Response of the Automobile to Steering Control*, Proceedings of the Automobile Division, The Institutional of Mechanical Engineers, *7*, 310—330 (1956—57).
19. STOICESCU, A. P., *Asupra frînării automobilului pe transmisie*, Buletinul Institutului politehnic, „Gh. Gheorghiu-Dej" — București, **XXVIII**, *5*, 93—106 (1966).
20. STOICESCU, A. P., *Contribuții la studiul influenței reacțiunilor tangențiale la roți asupra stabilității și maniabilității automobilului*, Teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1971.
21. ȘAHBAZOV, O. K., *K analizu vlianiia differențiala v vedușcei osina bokovuiu ustoicevost avtomobilea*, Izvestiia vîsșih ucebnîh zavedenii — Mașinostroenie, nr. *2*, 111—118 (1964).

METODE DE ANALIZĂ GRAFICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC AL SISTEMELOR MECANICE

de M. RADEŞ

Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se prezintă modul de utilizare a diagramelor polare ale răspunsului în frecvenţă, la determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor. Se arată importanţa definirii corecte a rezonanţei şi antirezonanţei, precum şi dificultăţile pe care le ridică determinarea experimentală a acestora. Se propune un criteriu de localizare a rezonanţei şi o metodă pentru calculul factorului de amortizare al elementelor folosite în izolarea antivibratorie.

1. INTRODUCERE

În analiza dinamică a structurilor mecanice complexe, diagramele polare ale răspunsului în frecvenţă sînt în prezent larg utilizate la determinarea frecvenţelor proprii, a formei modurilor principale de vibraţie şi a factorilor de amortizare.

Mai întîi metoda propusă de Kennedy şi Pancu [1], apoi metoda forţelor în cvadratură a lui de Vries [2] au impus determinarea experimentală separată a componentelor reală şi imaginară (în fază şi în cvadratură cu excitaţia) ale răspunsului. Folosirea intensivă a acestor metode în studiul structurilor aerospaţiale a dus la dezvoltarea unui echipament adecvat de produs şi măsurat vibraţii, care permite fie citirea directă a valorilor celor două componente, fie măsurarea modulului şi fazei răspunsului, fie chiar trasarea diagramelor polare pe un inscriptor $X-Y$. Existenţa acestui tip de aparatură în cadrul laboratorului de Rezistenţa materialelor din Institutul politehnic Bucureşti a făcut posibilă utilizarea largă a acestor metode experimentale şi elaborarea unor metode noi, bazate pe analiza grafică a diagramelor polare.

Într-un articol anterior [3] s-a prezentat baza analitică a cîtorva „metode de rezonanţă" folosite la determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor deformabile, cu referire în special la modelul cu un grad de libertate excitat prin masă. În lucrarea de faţă, studiul este extins şi la alte modele, se arată dificultăţile întîlnite în aplicarea diferitelor criterii de localizare a rezonanţei la analiza răspunsului sistemelor mai complicate şi se indică modul de interpretare corectă a datelor furnizate de curbele răspunsului staţionar prezentate sub formă polară. De asemenea, se pre-

zintă limitele de aplicabilitate ale metodei forţelor în cvadratură şi avantajul folosirii unor „metode de antirezonanţă".

2. SISTEMUL CU UN GRAD DE LIBERTATE EXCITAT PRIN MASĂ

Cea mai simplă reprezentare a unei structuri rezonante cu un grad de libertate este modelul cu parametri concentraţi din figura 1 compus din o masă, un element elastic şi un amortizor, legate în *paralel* [4]. Acesta poate descrie fie mişcarea într-un mod principal de variaţie a unei structuri cu parametri distribuiţi [5], fie răspunsul unui corp rigid rezemat pe un izolator deformabil.

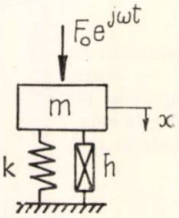


Fig. 1

Dacă mişcarea este armonică, atunci este convenabilă folosirea conceptului de *amortizare histeretică echivalentă* [6], în care coeficientul de amortizare histeretică are o astfel de valoare încît energia disipată într-un ciclu de deplasare armonică, la o anumită amplitudine şi frecvenţă, este aceeaşi ca cea disipată de sistemul amortizat real, în acelaşi ciclu de deplasare. În acest caz, forţa de amortizare este echivalentă cu o forţă proporţională cu deplasarea, dar în fază cu viteza, iar energia disipată pe ciclu este independentă de frecvenţă [5].

Conceptul de amortizare histeretică (structurală) a fost postulat pentru cazul excitaţiei armonice staţionare, dovedindu-se însă nefondat fizic pentru alte regimuri de solicitare [7]. Folosirea lui a dat rezultate bune în analiza vibraţiilor sistemelor slab amortizate, în special în cazul structurilor aerospaţiale (unde de fapt a şi fost introdus). Utilizarea unui coeficient de amortizare histeretică *echivalentă* permite extinderea folosirii aceluiaşi aparat matematic şi model fizic la studiul structurilor cu amortizare puternică, desigur pe domenii de frecvenţă limitate.

2.1 ANALIZA RĂSPUNSULUI ÎN FRECVENŢĂ

Ecuaţia de mişcare a masei sistemului din figura 1 se scrie sub forma

$$m\ddot{x} + (k + jh)\, x = F_0 e^{j\omega t}, \tag{1}$$

unde m, k şi h reprezintă masa, constanta elastică, respectiv coeficientul de amortizare histeretică echivalentă, $F_0\, e^{j\omega t}$ este o forţă perturbatoare armonică aplicată masei, de pulsaţie ω şi amplitudine constantă F_0, iar $x(t)$ este deplasarea masei m.

Soluţia staţionară a ecuaţiei (1) se alege de forma

$$x(t) = Xe^{j\omega t}, \tag{2}$$

unde X este amplitudinea complexă a deplasării.

În punctul de aplicație a forței, receptanța complexă este

$$\frac{X}{F_0} = \frac{1}{k - m\omega^2 + jh}. \tag{3}$$

Se introduce funcția adimensională de răspuns în frecvență

$$\mu = \frac{X}{F_0/k} = \mu_R + j\mu_I = |\mu| e^{j\theta}, \tag{4}$$

unde μ_R și μ_I sînt componenta reală, respectiv cea imaginară, $|\mu|$ este modulul funcției, iar argumentul $\theta = \text{arc tg} \frac{\mu_I}{\mu_R}$.

Folosind notațiile (4) și

$$p = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \Omega = \frac{\omega}{p}, \qquad g = \frac{h}{k}, \tag{5}$$

ecuația (3) devine,

$$\mu = \frac{1}{1 - \Omega^2 + jg}, \tag{6}$$

iar

$$\mu_R = \frac{1 - \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}, \qquad \mu_I = \frac{-g}{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}, \tag{7}$$

$$|\mu| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}}, \qquad \theta = \text{arctg} \frac{-g}{1 - \Omega^2}. \tag{8}$$

Dacă se elimină Ω între relațiile (7), rezultă un cerc de ecuație

$$\left(\mu_I + \frac{1}{2g}\right)^2 + \mu_R^2 = \frac{1}{4g^2}, \tag{9}$$

care reprezintă locul geometric al vîrfului vectorului μ (4) în planul complex (fig. 2). Experimental, acest cerc se trasează cu ajutorul unui inscriptor în coordonate X-Y, la intrările căruia se introduc semnale reprezentînd partea reală, respectiv cea imaginară ale deplasării (răspunsului), pentru o excitație cu o forță armonică $F_0 \cos \omega t$. În modul acesta se obține o diagramă vectorială reprezentînd receptanța X/F_0 și avînd drept parametru frecvența. Pentru analiza teoretică însă este preferabilă folosirea mărimilor adimensionale (4) și (5).

În cazul figurii 2, fiecărui punct P de pe cerc îi corespunde o anumită valoare a variabilei Ω, deci o anumită pulsaţie ω. Cînd $\Omega = 0$, vîrful vectorului μ este în punctul $P_0 \left(\frac{1}{1+g^2}, \frac{-g}{1+g^2} \right)$. Pe măsura creşterii pulsaţiei excitatoare, punctul P parcurge cercul în sens orar, iar pentru $\Omega \to \infty$ el se confundă cu originea O.

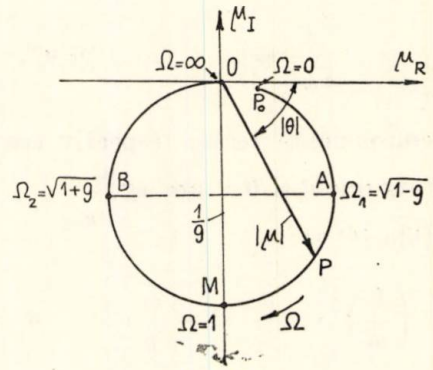


Fig. 2

Punctul M, de intersecţie a cercului cu semi-axa imaginară negativă, defineşte pulsaţia de rezonanţă $\omega = p$ ($\Omega = 1$), atît pentru „rezonanţa de amplitudine" cît şi pentru cea „de fază". Diametrul cercului la rezonanţă este $OM = 1/g$. Diametrul AB, perpendicular pe OM, intersectează cercul în punctele „de putere jumătate" A şi B, definite de $\Omega_{1,2} = \sqrt{1 \mp g}$ (căci le corespund unghiuri de fază $|\theta| = 45°$ şi $135°$), astfel că pentru calculul lui g se poate folosi relaţia

$$g = \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2p^2}, \tag{10}$$

care, pentru valori mici ale amortizării, cînd $\omega_1 \cong \omega_2 = p$, devine

$$g \cong \frac{\omega_2 - \omega_1}{p}. \tag{10,a}$$

Rezultă că determinarea factorului de amortizare g este condiţionată de localizarea precisă a rezonanţei pe curba răspunsului în frecvenţă. Acest lucru se poate face cel mai uşor pe curba *polară* a răspunsului, deoarece zona din vecinătatea rezonanţei, mai precis — cea dintre frecvenţele corespunzătoare punctelor „de putere jumătate", este mult extinsă în comparaţie cu zonele corespunzătoare ale diagramelor amplitudine-frecvenţă sau fază-frecvenţă [8]. Dar în condiţii practice, chiar pentru sistemul simplu din figura 1, localizarea rezonanţei este dificilă. Aceasta deoarece uneori, din punct de vedere experimental, se realizează cu greu un montaj în care modul de vibraţie studiat (de ex : translaţie verticală) este perfect izolat. Cea mai mică imprecizie de aliniere face ca forţa aplicată să producă răspuns şi în alte moduri (de ex : modul de rotaţie în

jurul unei axe orizontale). În această situaţie diagrama polară nu mai este un cerc perfect, ea conţinînd mai multe bucle, cîte una pentru fiecare mod de vibraţie (fig. 3).

Chiar în cazul unui montaj bun, cînd modul de vibraţie studiat este predominant, se poate întîmpla ca cercul care aproximează bucla corespunzătoare a curbei de răspuns să nu mai treacă prin originea axelor, iar diametrul la rezonanţă să nu mai coincidă cu axa imaginară (desigur aceasta se poate datori şi altor efecte). Înseamnă că aplicarea fără precauţii a *criteriului amplitudinii maxime* poate duce la o localizare incorectă a rezonanţei, datorită contribuţiei celorlalte moduri la frecvenţa de rezonanţă a modului studiat. De asemenea, criteriul rezonanţei de fază nu mai poate fi folosit, datorită deplasării cercului faţă de sistemul de axe.

În aceste condiţii, se impune folosirea unor criterii de localizare a rezonanţei independente de sistemul de axe şi prin care să se elimine contribuţia altor moduri de vibraţie [9].

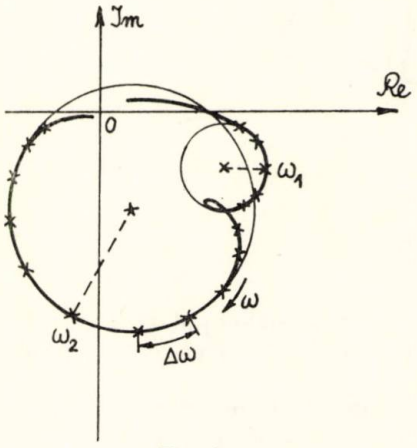


Fig. 3

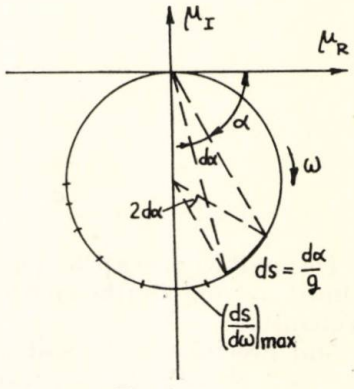


Fig. 4

Dacă se notează prin ds elementul de arc de cerc corespunzător unei variaţii $d\alpha = -d\theta$ a unghiului de fază (fig. 4), atunci

$$ds = \text{raza} \times \text{unghiul la centru} = \frac{1}{2g} 2\, d\alpha = \frac{d\alpha}{g},$$

iar

$$\frac{ds}{d\Omega^2} = -\frac{1}{g}\frac{d\theta}{d\Omega^2} = \frac{1}{(1-\Omega^2)^2 + g^2} = |\mu|^2. \tag{11}$$

Deoarece cantitatea $|\mu|^2$ este maximă pentru $\Omega = 1$, rezultă că derivata $\frac{ds}{d\Omega^2}$ este maximă la rezonanţă. Prin urmare, dacă pe cercul (9) se marchează puncte corespunzătoare unor creşteri egale $\Delta\Omega$ ale parametrului Ω (deci $\Delta\omega$ ale lui ω), atunci lungimea arcului Δs între două puncte consecutive va fi maximă la rezonanţă. Această observaţie stă

la baza *criteriului Kennedy-Pancu* de localizare a rezonanţei [1].

Practic, prin punctele fiecărei bucle a curbei de răspuns se trasează „cel mai potrivit cerc", iar în zona unde raportul $\Delta s/\Delta\omega$ este maxim, deci unde raza vectoare mătură un unghi maxim pentru o creştere dată $\Delta\omega$ a pulsaţiei excitatoare, se localizează rezonanţa. Pe diagrame polare pe care nu se pot citi valorile pulsaţiilor punctelor de putere jumătate (fig. 5), se măsoară unghiurile α_1 şi α_2 ce definesc poziţia vectorilor OP şi OQ, corespunzători punctelor P şi Q alese în vecinătatea lui M, iar factorul de amortizare se determină cu relaţia [6]:

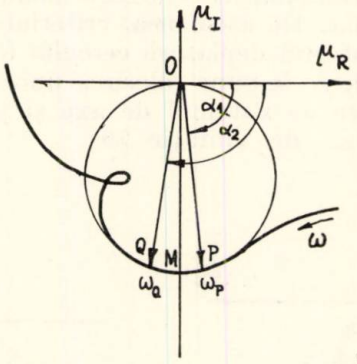


Fig. 5

$$g = \frac{\omega_Q^2 - \omega_P^2}{p^2} \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{12}$$

De notat că prin aproximarea cu cercuri a curbei polare a răspunsului, se admite o contribuţie constantă în raport cu frecvenţa modurilor nerezonante.

Mai precisă s-a dovedit a fi „metoda forţelor în cvadratură" [2], cu diversele ei variante [3], care este legată însă de folosirea unui echipament specializat (existent în comerţ), incluzînd excitatori electrodinamici, capabili să introducă în sistem „constante elastice adiţionale", deci să producă modificarea unghiului de fază al forţei produse de vibrator.

2.2 EXCITAŢIA CU FORŢE ÎN CVADRATURĂ

Dacă la forţa perturbatoare $F_0 e^{j\omega t}$ se adaugă o componentă de aceeaşi pulsaţie şi de amplitudine proporţională cu F_0, însă defazată cu 90° sau −90° faţă de aceasta, expresia forţei perturbatoare totale va fi

$$F(t) = F' + jF'' = (1 + j\lambda)F_0 e^{j\omega t}, \tag{13}$$

unde $\lambda = F''/F'$ este raportul dintre amplitudinile componentelor în cvadratură şi iniţială ale forţei. Funcţia de răspuns în frecvenţă (6) devine

$$\mu = \frac{1 + j\lambda}{1 - \Omega^2 + jg}. \tag{14}$$

Partea reală şi cea imaginară ale funcţiei (14) au expresiile

$$\mu_R = \frac{1 - \Omega^2 + \lambda g}{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}, \qquad \mu_I = \frac{\lambda(1 - \Omega^2) - g}{(1 - \Omega^2)^2 + g^2}. \tag{15}$$

Dacă se elimină Ω între relaţiile (15), rezultă ecuaţia locului geometric al extremităţii vectorului μ în planul complex atunci cînd Ω variază,

$$\left(\mu_R - \frac{\lambda}{2g}\right)^2 + \left(\mu_I + \frac{1}{2g}\right)^2 = \frac{1 + \lambda^2}{4g^2}, \tag{16}$$

reprezentînd cercuri ce trec prin origine şi prin punctul $M\left(0, -\frac{1}{g}\right)$.

În figura 6 s-au reprezentat prin linii continue două astfel de cercuri, pentru două valori diferite ale parametrului λ. Ambele intersectează cercul (C) de ecuaţie (9), corespunzător valorii $\lambda = 0$ (desenat cu linie întreruptă), pe axa imaginară, în punctul M ce defineşte rezonanţa în cazul excitaţiei fără forţe în cvadratură.

Pulsaţia corespunzătoare punctului M pe cercul (C_1), de parametru λ_1, este $\omega' = p\sqrt{1 + \lambda_1 g}$, iar pe cercul (C_2), de parametru λ_2, este $\omega'' = p\sqrt{1 + \lambda_2 g}$. Pe baza acestor valori determinate experimental, factorul de amortizare se calculează cu relaţia

$$g = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{p^2}. \tag{17}$$

În cazul particular cînd $\lambda_1 = +1$, iar $\lambda_2 = -1$, $\omega' = \omega_2$, $\omega'' = \omega_1$, iar factorul de amortizare se calculează cu relaţia (10).

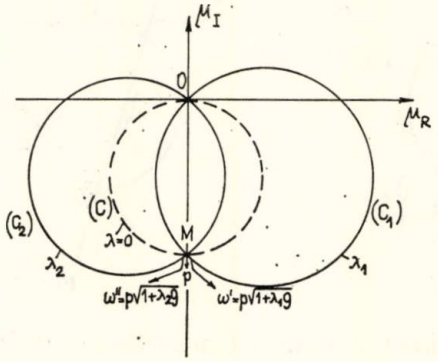


Fig. 6

Localizarea rezonanţei este independentă de sistemul de axe, pentru calcularea lui g fiind suficiente valorile frecvenţelor corespunzătoare punctului de intersecţie M de pe cele trei cercuri. Din acest motiv, metoda este deosebit de eficace în cazul sistemelor continue cu frecvenţe proprii

apropiate. Metoda este de asemenea adecvată analizei sistemelor neliniare. Determinarea celor trei frecvenţe se face în acelaşi punct M, deci pentru o *deplasare constantă* OM, variind pentru aceasta numai faza şi modulul forţei excitatoare $F(t)$.

În practică, în cazul izolării imperfecte a modului de vibraţie studiat, cercurile (C_1) şi (C_2) intersectează cercul (C) în două puncte diferite, dar foarte apropiate, localizarea rezonanţei făcîndu-se cu uşurinţă între acestea (fig. 7).

Dacă se elimină λ între relaţiile (15), se obţine ecuaţia unei familii de *drepte de pulsaţie constantă* care trec prin punctul $M\left(0, -\frac{1}{g}\right)$

$$\mu_I = \frac{1 - \Omega^2}{g}\,\mu_R - \frac{1}{g}. \tag{18}$$

Rezultă că localizarea rezonanţei se poate face şi prin intersectarea cercului (C) preferabil cu două drepte (18), de pulsaţii Ω diferite (fig. 8).

Trasarea lor se face prin puncte, menţinînd constantă pulsaţia excitatoare şi variind parametrul λ. Determinînd valoarea lui λ corespunzătoare punctului de intersecţie al liniei $\Omega = \text{const.}$ cu cercul, factorul de amortizare se calculează cu relaţia

$$g = \frac{\Omega^2 - 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\omega^2}{p^2} - 1\right). \tag{19}$$

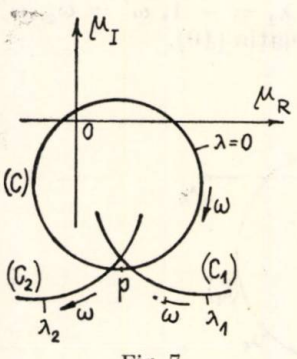


Fig. 7

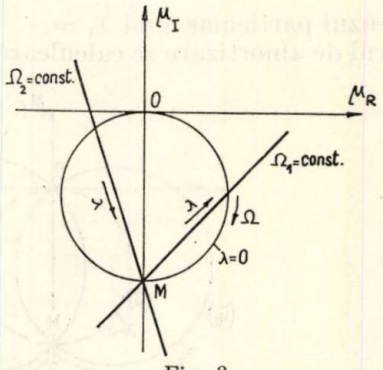


Fig. 8

Dezvoltarea relativ recentă a captorilor de forţe piezoelectrici şi a „capetelor de impedanţă" permite efectuarea unor măsurări în care se menţine constantă amplitudinea deplasării armonice, variind amplitudinea forţei exterioare. Funcţia adimensională de răspuns în frecvenţă care interesează în acest caz este (fără forţe în cvadratură)

$$\nu = \mu^{-1} = \frac{F_0/k}{X} = (1 - \Omega^2) + jg, \tag{20}$$

fiind reprezentată în planul complex prin o dreaptă (fiind inversa funcției (6) care este un cerc) paralelă cu axa reală (fig. 9). La rezonanță, forța excitatoare armonică este minimă, punctul corespunzător aflîndu-se la intersecția dreptei (20) cu axa imaginară în punctul N ($\Omega = 1$).

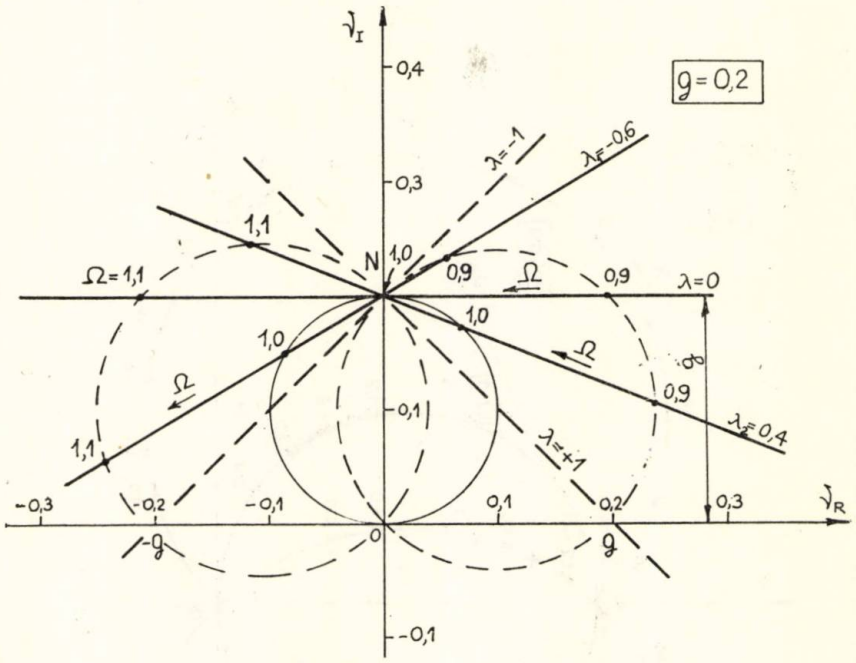


Fig. 9

În cazul excitației cu forțe în cvadratură, dacă forța perturbatoare este de forma (13), funcția de răspuns (20) devine

$$\nu = \frac{1 - \Omega^2 + j\,g}{1 + j\,\lambda} = \nu_R + j\,\nu_I, \tag{21}$$

unde

$$\nu_R = \frac{1 - \Omega^2 + g\lambda}{1 + \lambda^2}, \qquad \nu_I = \frac{g - \lambda\,(1 - \Omega^2)}{1 + \lambda^2}. \tag{22}$$

Prin eliminarea lui Ω între expresiile (22), rezultă că pentru $\lambda =$ const. extremitatea vectorului (21) parcurge drepte de ecuație

$$\nu_I = -\,\lambda\,\nu_R + g. \tag{23}$$

Orice dreaptă $\lambda =$ const. intersectează dreapta $\lambda = 0$ (20) în punctul N de pulsație $\Omega = 1$ (la rezonanță, fără forțe în cvadratură) (fig. 9). Pe o dreaptă de parametru λ_1 punctul N corespunde unei pulsații $\Omega' = \sqrt{1 + g\lambda_1}$,

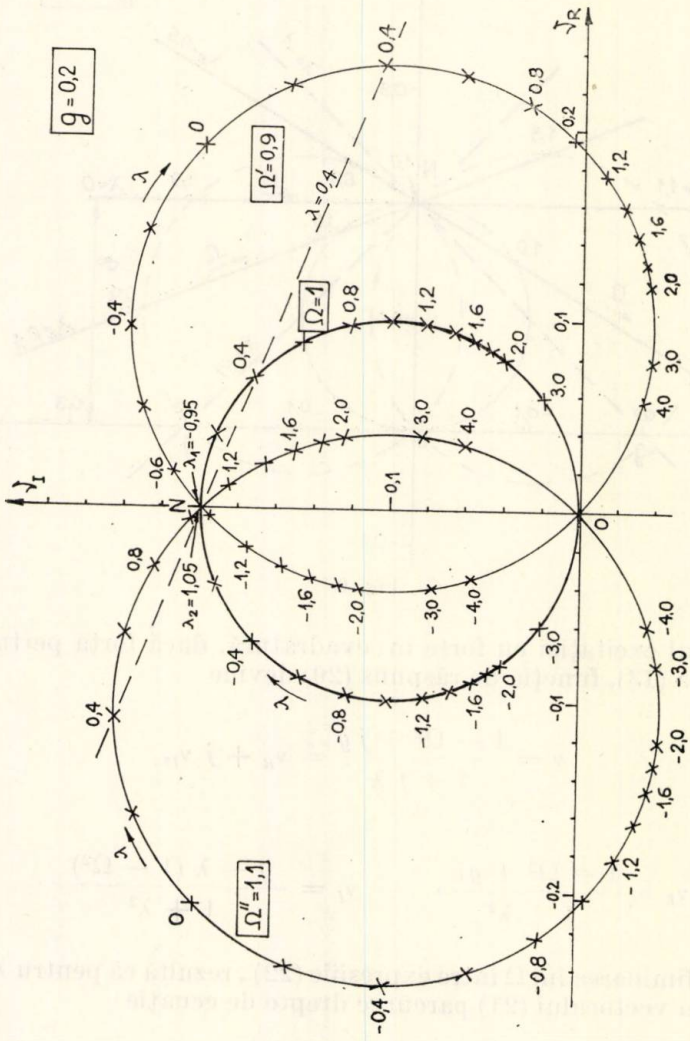


Fig. 10

iar pe o dreaptă de parametru λ_2 — unei pulsații $\Omega'' = \sqrt{1+g\lambda_2}$. Factorul de amortizare se calculează deci cu relația

$$g = \frac{\Omega'^2 - \Omega''^2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{p^2},$$

identică cu (17).

Tot datorită inversiunii, prin eliminarea lui λ între expresiile (22) se deduce că, menținînd Ω = const., vîrful vectorului ν descrie un cerc de ecuație

$$\left(\nu_R - \frac{1-\Omega^2}{2}\right)^2 + \left(\nu_I - \frac{g}{2}\right)^2 = \frac{g^2 + (1-\Omega^2)^2}{4}. \tag{24}$$

Toate cercurile Ω = const. intersectează cercul $\Omega = 1$ pe axa imaginară în punctul N corespunzător rezonanței (fig. 10). Pentru două cercuri trasate la pulsații constante Ω', respectiv Ω'', punctul N corespunde unor valori $\lambda_1 = \frac{1-\Omega'^2}{g}$, respectiv $\lambda_2 = \frac{1-\Omega''^2}{g}$ care se determină experimental, astfel că g se poate calcula cu relația (17).

3. SISTEMUL CU UN GRAD DE LIBERTATE EXCITAT PRIN ELEMENTUL DEFORMABIL

Fie sistemul din figura 11 excitat la bază de o forță armonică de amplitudine constantă $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$.

Dacă se notează cu $x_1 = X_1 e^{j\omega t}$ deplasarea bazei și cu $x_2 = X_2 e^{j\omega t}$ deplasarea masei, echilibrul dinamic se poate scrie folosind metoda matricelor de transfer [10] sub forma

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k+jh} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ F_0 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

Folosind notațiile (5), din (25) se obține

$$\frac{X_1}{F_0/k} = -\frac{1}{\Omega^2} \frac{1-\Omega^2+jg}{1+jg} = \left(\frac{1}{1+g^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right) - j\frac{g}{1+g^2}, \tag{26}$$

$$\frac{X_2}{F_0/k} = -\frac{1}{\Omega^2}, \tag{27}$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1+jg}{1-\Omega^2+jg}. \tag{28}$$

Reprezentarea expresiei (26) în planul complex este o linie dreaptă, paralelă cu axa reală (fig. 12). La intersecţia acesteia cu axa imaginară, vectorul funcţiei de răspuns în frecvenţă (26) este minim, deci punctul corespunde *antirezonanţei* [4]. Pulsaţia de antirezonanţă este $\Omega_A = \sqrt{1+g^2}$.

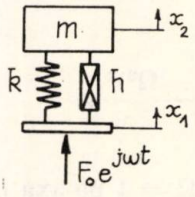


Fig. 11

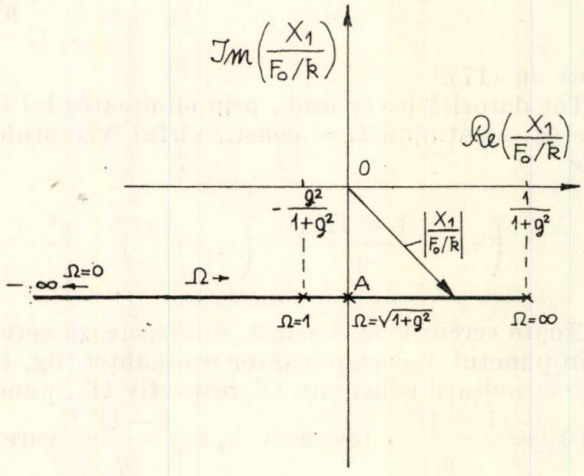


Fig. 12

Mai utilă din punct de vedere practic este trasarea diagramei polare a transmisibilităţii complexe (28)

$$T^* = T_R + jT_I = \frac{X_2}{X_1}, \tag{28, a}$$

prezentată în fig. 13 (pentru $g = 0{,}2$) prin cercul de ecuaţie

$$\left(T_R - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(T_I + \frac{1}{2g}\right)^2 = \frac{1+g^2}{4g^2}. \tag{29}$$

Toate calculele se reduc la cele din paragraful 2.2, dacă se observă că înlocuind $\lambda = g$ în (14) se obţine relaţia(28).

Valoarea maximă a transmisibilităţii corespunde pulsaţiei $\Omega_M = 1$, deci $\omega_M = \sqrt{k/m_2}$, care poate fi determinată cu criteriul Kennedy-Pancu, în zona unde unor creşteri egale ale pulsaţiei excitatoare le corespund arce de cerc de lungime maximă. Diametrul OM face cu semiaxa imaginară negativă un unghi $\alpha = \text{arctg}\, g$. Ducînd diametrul BC perpendicular pe OM, se determină pulsaţiile $\Omega_B = \sqrt{1-g}$ şi $\Omega_C = \sqrt{1+g}$, deci se poate calcula

$$g = \frac{\Omega_C^2 - \Omega_B^2}{2} = \frac{\Omega_C^2 - \Omega_B^2}{2\,\Omega_M^2} = \frac{\omega_C^2 - \omega_B^2}{2\,\omega_M^2}. \tag{30}$$

Criteriul rezonanței de fază duce la determinarea pulsației de antirezonanță $\Omega_A = \sqrt{1+g^2}$ la intersecția cercului cu axa imaginară. Pentru valori mici ale amortizării $\Omega_A \cong \Omega_M$.

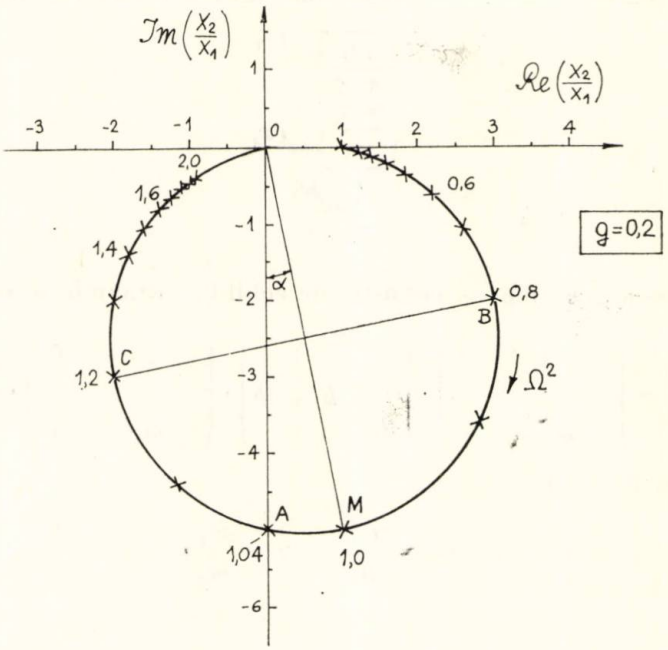


Fig. 13

Pentru trasarea experimentală a curbei polare a transmisibilității, se folosesc aparate care permit citirea directă fie a modulului și fazei unor semnale proporționale cu mărimile X_1 și X_2, fie a părților reală și imaginară ale acestora, la diferite frecvențe excitatoare. După efectuarea calculelor legate de determinarea mărimilor corespunzătoare ale raportului X_2/X_1, pentru fiecare frecvență de lucru se marchează cîte un punct pe o diagramă polară, trasîndu-se apoi „cel mai potrivit cerc" printre acestea. Trebuie avut însă în vedere că folosirea criteriului Kennedy-Pancu nu duce la determinarea pulsației „de rezonanță", ci a valorii corespunzătoare transmisibilității maxime, foarte apropiată de pulsația de antirezonanță a sistemului.

4. SISTEMUL CU UN GRAD DE LIBERTATE, CU DOUĂ MASE

Realizarea experimentală a schemei de solicitare din figura 11 întîmpină greutăți datorită faptului că forța excitatoare, în general, nu poate fi aplicată direct elementului deformabil al sistemului studiat. Fie bobina mobilă a excitatorului electrodinamic, fie partea captorului de forțe sau a capului de impedanțe dispusă între elementul piezoelectric al acestora și elementul deformabil al sistemului studiat, fie chiar captorul

de deplasări, introduc o masă suplimentară, astfel că este necesară analiza răspunsului dinamic al sistemului din figura 14.

Folosind metoda matricelor de transfer şi notînd cu $x_1 = X_1 e^{j\omega t}$ deplasarea masei m_1 şi cu $x_2 = X_2 e^{j\omega t}$ deplasarea masei m_2 (unde X_1 şi X_2

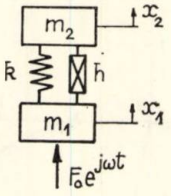


Fig. 14

sînt amplitudini complexe), condiţia de echilibru dinamic se scrie :

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m_2\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k+jh} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m_1\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ F_0 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

de unde, cu notaţiile

$$p = \sqrt{\frac{k}{m_2}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{p}, \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2}, \quad g = \frac{h}{k}, \tag{32}$$

rezultă

$$\frac{X_1}{F_0/k} = -\frac{1}{(1+\gamma)\,\Omega^2} \cdot \frac{1-\Omega^2+jg}{1-\dfrac{\gamma}{1+\gamma}\Omega^2+jg}, \tag{33}$$

$$\frac{X_2}{F_0/k} = -\frac{1}{(1+\gamma)\,\Omega^2} \cdot \frac{1+jg}{1-\dfrac{\gamma}{1+\gamma}\Omega^2+jg}, \tag{34}$$

$$\frac{X_1 - X_2}{F_0/k} = \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{\gamma}{1+\gamma}\Omega^2+jg}, \tag{35}$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1+jg}{1-\Omega^2+jg}. \tag{36}$$

Expresiile (33) — (35) sînt reprezentate grafic în figurile 15 — 17 (linie continuă) pentru $\gamma = 2$ şi $g = 0{,}2$, diagramele polare avînd drept parametru variabil Ω^2. Cu linii întrerupte s-au trasat curbele de răspuns în cazul folosirii excitaţiei cu forţe în cvadratură, indicîndu-se valoarea corespunzătoare a lui λ. Expresia (36) este identică cu (28) şi a fost reprezentată în figura 13.

Analizînd figura 15 se observă că la măsurarea deplasării masei m_1 antirezonanța apare aproximativ la pulsația $\Omega_A = 1$, corespunzînd răspunsului minim la o forță excitatoare armonică de amplitudine constantă. Aparent, rezonanța apare la o pulsație $\Omega'_R \cong \sqrt{1,6}$, în zona unde forța constantă produce un răspuns maxim.

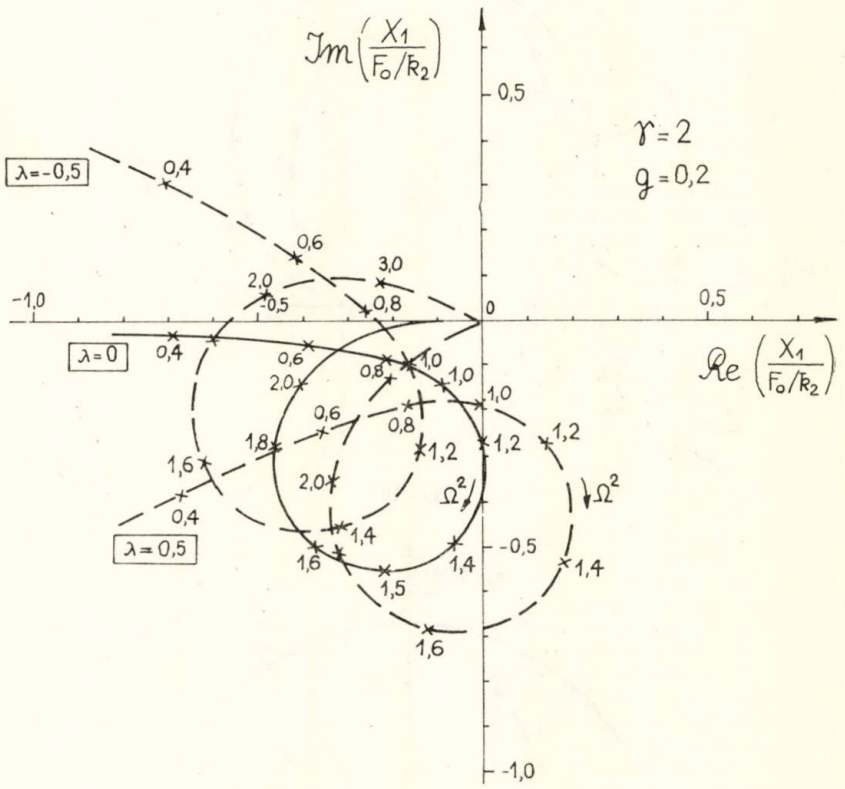


Fig. 15

Faptul că în această zonă diagrama polară a *receptanței directe* poate fi aproximată cu un cerc, poate duce la încercarea *greșită* de a localiza rezonanța prin intersectarea acestuia cu două curbe obținute folosind excitație cu forțe în cvadratură. Deși rezultatul este aproximativ același ca în cazul aplicării criteriului amplitudinii maxime, el diferă de cel obținut folosind criteriul Kennedy-Pancu ($\Omega_R = \sqrt{1,5}$) și poate duce la erori mari în evaluarea amortizării dacă se folosește direct una din relațiile (10) sau (17).

Analizînd în continuare răspunsul masei m_2 (fig. 16), se remarcă și pe diagrama polară a *receptanței de transfer* prezența unei antirezonanțe (răspuns minim) și a unei „rezonanțe" (răspuns maxim), însă la pulsații diferite de cele determinate pentru masa m_1. Din nou, criteriul Kennedy-Pancu duce la rezultate diferite de cele obținute prin metoda forțelor

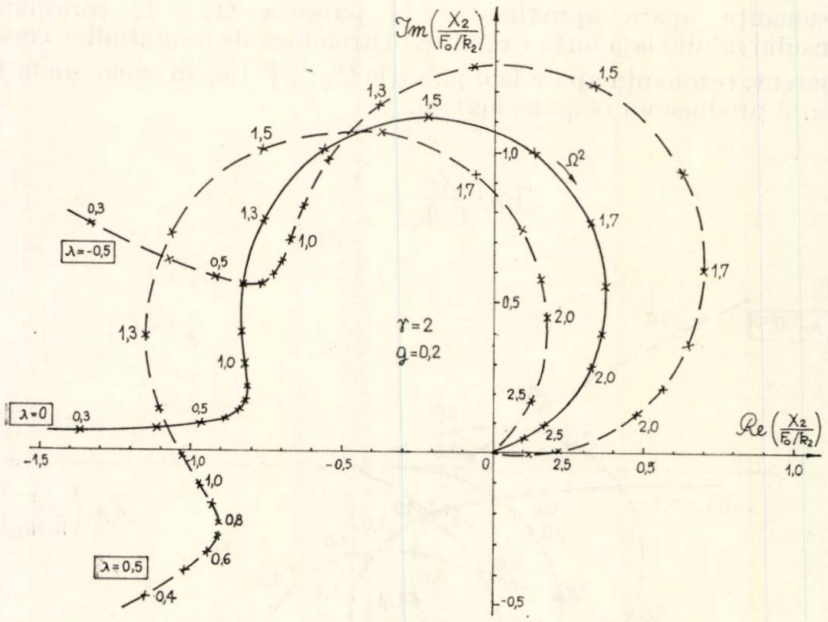

$\mathcal{I}m\left(\frac{X_2}{F_0/k_2}\right)$
$\mathcal{R}e\left(\frac{X_2}{F_0/k_2}\right)$
Ω^2
$\gamma=2$
$g=0,2$
$\lambda=-0,5$
$\lambda=0$
$\lambda=0,5$

Fig. 16

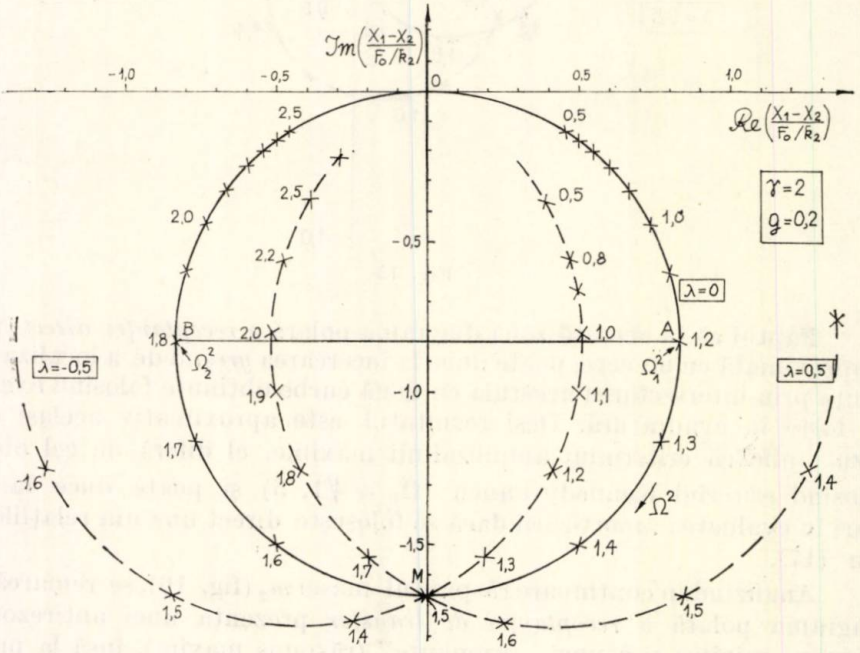

$\mathcal{I}m\left(\frac{X_1-X_2}{F_0/k_2}\right)$
$\mathcal{R}e\left(\frac{X_1-X_2}{F_0/k_2}\right)$
$\gamma=2$
$g=0,2$
$\lambda=-0,5$
$\lambda=0$
$\lambda=0,5$
Ω_2^2
Ω_1^2
Ω^2
A
B
M

Fig. 17

în cvadratură, iar criteriul rezonanței de fază nici nu poate fi luat în considerație. În plus, expresiile (33) și (34) nu oferă posibilitatea obținerii unor relații cît de cît simple pentru evaluarea amortizării.

În această situație se recomandă fie măsurarea directă a deplasării relative $(X_1 - X_2)$, fie determinarea diagramei polare corespunzătoare, prin compunerea grafică a curbelor din figurile 15 și 16. Sistemul din figura 14 are un grad de libertate în raport cu „coordonata" $(x_1 - x_2)$, diagrama polară respectivă (fig. 17) fiind *un cerc* ce trece prin origine, avînd centrul pe semiaxa imaginară negativă.

Rezonanța apare la pulsația corespunzătoare punctului M

$$\Omega_R^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma}, \tag{37}$$

deci la

$$\omega_R = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}, \tag{37a}$$

aceeași ca pentru sistemul neamortizat. Pentru localizarea ei se poate folosi oricare din criteriile de rezonanță utilizate în cazul sistemului din figura 1 : amplitudine maximă, unghi de fază $-90°$, variație maximă a unghiului de fază cu frecvența, metoda forțelor în cvadratură etc.

La frecvențe excitatoare joase, unde efectele inerțiale în elementul deformabil (propagarea undelor) pot fi neglijate, deplasarea relativă $(x_1 - x_2)$ este legată direct de deformația specifică dinamică ε_{din} a sistemului analizat. Aceasta este mărimea cea mai relevantă din punct de vedere fizic, deoarece majoritatea studiilor dinamice se fac avînd în vedere posibilitatea ruperii prin oboseală. Este normal, deci, de a defini rezonanța în raport cu această mărime și nu cu deplasarea uneia din cele două mase.

Revenind totuși la figurile 15 și 16, se observă că *pulsația de rezonanță* astfel definită (în cazul numeric considerat $\Omega_R = \sqrt{1{,}5}$) *corespunde punctelor în care componenta imaginară a receptanței directe* X_1/F_0 *sau a receptanței de transfer* X_2/F_0 *are o valoare extremă.*

Deși acest mod de determinare a rezonanței este implicit legat de sistemul de axe și deci de o izolare cît mai corectă a modului de vibrație analizat, observația este deosebit de utilă în măsurările experimentale, oferind un *criteriu de localizare a rezonanței* similar celui propus de Overton și Mills [11] pentru studiul suspensiei automobilelor. În schimb, evaluarea precisă a amortizării trebuie făcută prin analiza grafică a curbei din figura 17.

Trasînd diametrul AB, perpendicular pe OM, se determină pulsațiile

$$\Omega_1^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma}(1 - g), \quad \Omega_2^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma}(1 + g)$$

şi apoi se calculează

$$g = \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\Omega_2^2-\Omega_1^2}{2} = \frac{\Omega_2^2-\Omega_1^2}{2\,\Omega_R^2} = \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\,\omega_R^2}. \tag{38}$$

Aceleaşi pulsaţii corespund punctului M de pe cercurile de răspuns obţinute folosind $\lambda = \pm 1$ la excitaţia cu forţe în cvadratură. În cazul folosirii altor valori λ, se aplică formula (17). Constanta elastică dinamică k se determină din relaţia (37, a).

5. SISTEME CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

5.1 SISTEMUL EXCITAT PRIN MASA INTERMEDIARĂ

Uneori, la măsurarea caracteristicilor dinamice ale unor elemente deformabile folosite la izolarea antivibratorie, se impune analiza răspunsului staţionar al sistemului din figura 18, în care k_2 şi h_2 reprezintă constanta elastică dinamică, respectiv coeficientul de amortizare histeretică echivaentă ale izolatorului studiat, k_1 şi h_1 — mărimile corespunzătoare suspensiei bobinei mobile a excitatorului electrodinamic, m_2 — o masă suplimentară plus masa mobilă a captorului folosit la măsurarea deplasării x_2, iar m_1 — masa bobinei mobile a excitatorului şi a elementelor de asamblare, plus masa mobilă a captorului folosit la măsurarea deplasării x_1, plus, eventual, masa unui captor de forţe piezoelectric (în domeniul de frecvenţe în care rigiditatea elementului deformabil al acestuia se poate considera infinită).

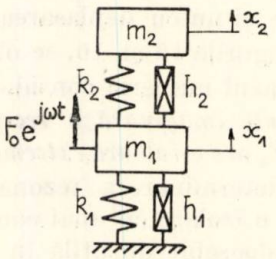


Fig. 18

Ecuaţiile de mişcare ale celor două mase au forma :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^* + k_2^* & -k_2^* \\ -k_2^* & k_2^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 e^{j\omega t} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{39}$$

unde

$$k_1^* = k_1 + jh_1 = k_1 (1 + j\, g_1), \qquad (40)$$
$$k_2^* = k_2 + jh_2 = k_2 (1 + j\, g_2).$$

Încercînd soluţii de forma

$$x_1 = X_1 e^{j\omega t}, \qquad x_2 = X_2 e^{j\omega t}, \qquad (41)$$

unde X_1 şi X_2 sînt amplitudini complexe, se obţine

$$X_1 = \frac{F_2 (k_2^* - \omega^2 m_2)}{(k_2^* + k_1^* - \omega^2 m_1)(k_2^* - \omega^2 m_2) - k_2^{*2}}, \qquad (42)$$

$$X_2 = \frac{F_0 k_2^*}{(k_2^* + k_1^* - \omega^2 m_1)(k_2^* - \omega^2 m_2) - k_2^{*2}}. \qquad (43)$$

Dacă se notează

$$p_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \qquad \Omega = \frac{\omega}{p_2}, \qquad \gamma = \frac{m_1}{m_2}, \qquad \beta = \frac{k_1}{k_2} \qquad (44)$$

şi se neglijează, în primă aproximaţie, amortizarea din suspensia bobinei vibratorului (fiind în general mică în comparaţie cu cea a izolatorului studiat), deci dacă se consideră

$$g_1 = 0, \qquad g_2 = g, \qquad (45)$$

relaţiile (42) şi (43) se pot scrie sub forma

$$\frac{X_1}{F_0/k_2} = \frac{1 - \Omega^2 + jg}{[(1 - \Omega^2)(\beta - \gamma\Omega^2) - \Omega^2] + jg[\beta - \Omega^2(1 + \gamma)]}, \qquad (46)$$

$$\frac{X_2}{F_0/k_2} = \frac{1 + jg}{[(1 - \Omega^2)(\beta - \gamma\Omega^2) - \Omega^2] + jg[\beta - \Omega^2(1 + \gamma)]}, \qquad (47)$$

de unde se deduce

$$\frac{X_2 - X_1}{F_0/k_2} = \frac{1}{\left[(1 - \Omega^2)\left(\frac{\beta}{\Omega^2} - \gamma\right) - 1\right] + jg\left[\frac{\beta}{\Omega^2} - (1 + \gamma)\right]}, \qquad (48)$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{1 + jg}{1 - \Omega^2 + jg}. \qquad (49)$$

Relaţia (49) este identică cu (28) şi (36), iar pentru $\beta = 0$ expresiile (46) — (48) devin (33) — (35). Rezultă că atunci cînd rigiditatea suspensiei bobinei este neglijabilă faţă de cea a izolatorului ($k_1 \ll k_2$), analiza se poate face pe modelul simplificat din figura 14.

Părţi din diagramele polare ale funcţiilor de răspuns în frecvenţă (46) — (48) sînt reprezentate grafic în figurile 19 — 21 (prin linie continuă) pentru $\beta = 1$, $\gamma = 2$ şi $g = 0{,}2$. Curbele trasate cu linii întrerupte reprezintă aceleaşi funcţii, corespunzătoare însă excitaţiei cu forţe în cvadratură, indicîndu-se valoarea parametrului λ. Nu s-au desenat porţiu-

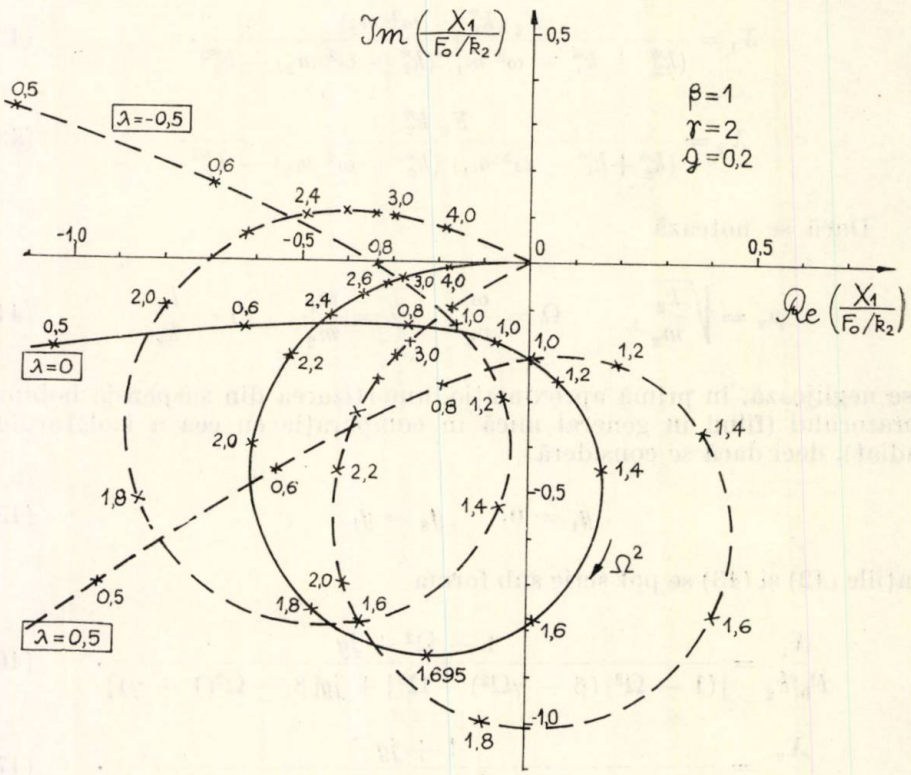
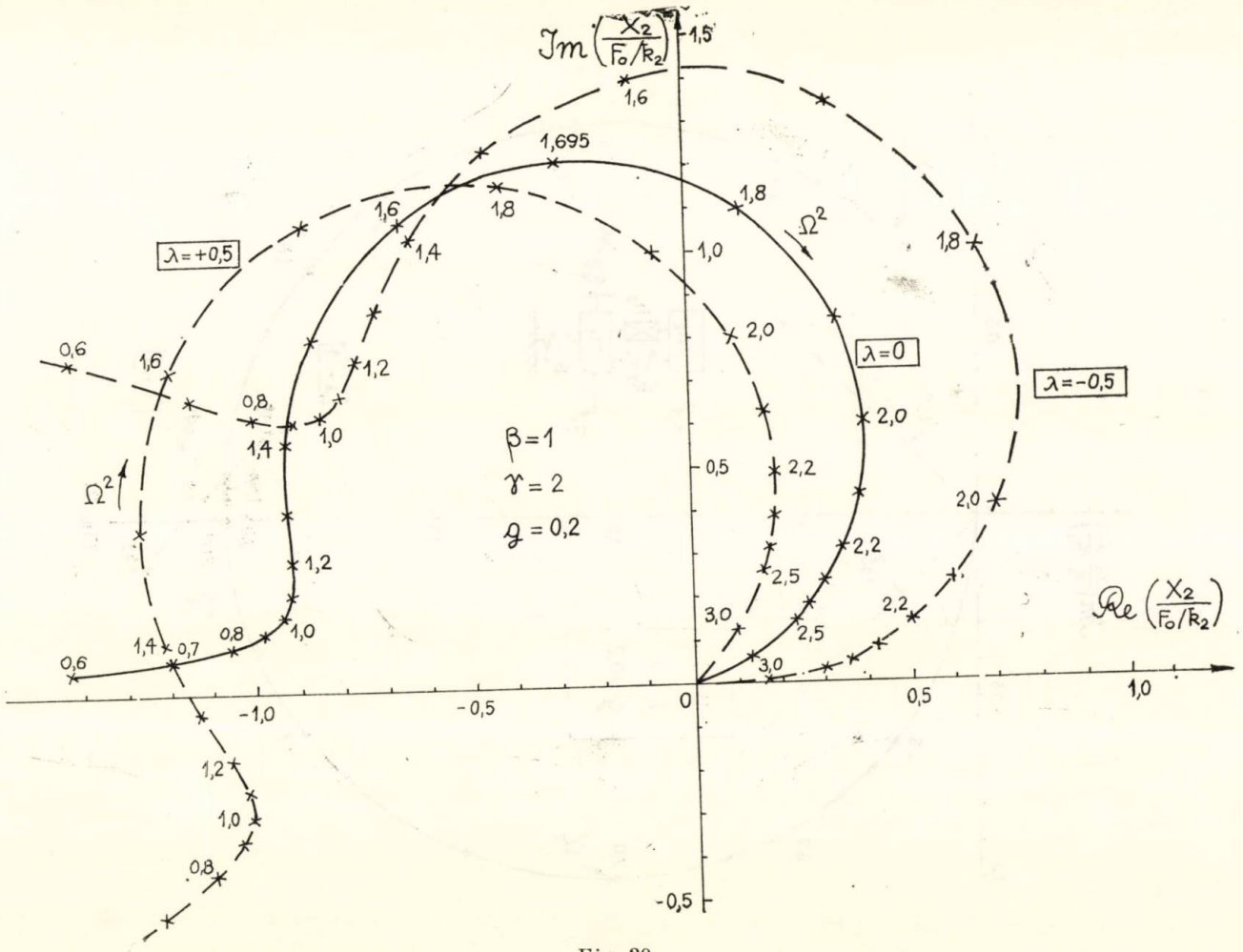


Fig. 19

nile din diagramele polare corespunzătoare primei rezonanţe a sistemului. Ca şi în exemplele precedente, s-a ales o valoare mare a factorului de amortizare, pentru a arăta posibilitatea folosirii diagramelor polare la studiul caracteristicilor dinamice ale materialelor cu proprietăţi disipative accentuate.

Se observă că atît receptanţa directă X_1/F_0 (fig. 19), cît şi cea de transfer X_2/F_0 (fig. 20) prezintă o antirezonanţă la pulsaţia $\Omega_A = 1$ şi o a



$\mathcal{I}m\left(\frac{X_2}{F_0/k_2}\right)$
$\mathcal{R}e\left(\frac{X_2}{F_0/k_2}\right)$
$\lambda=+0,5$
$\lambda=0$
$\lambda=-0,5$
Ω^2
$\beta=1$
$\gamma=2$
$g=0,2$
1,695
1,5
1,0
0,5
-0,5
-1,0
0

Fig. 20

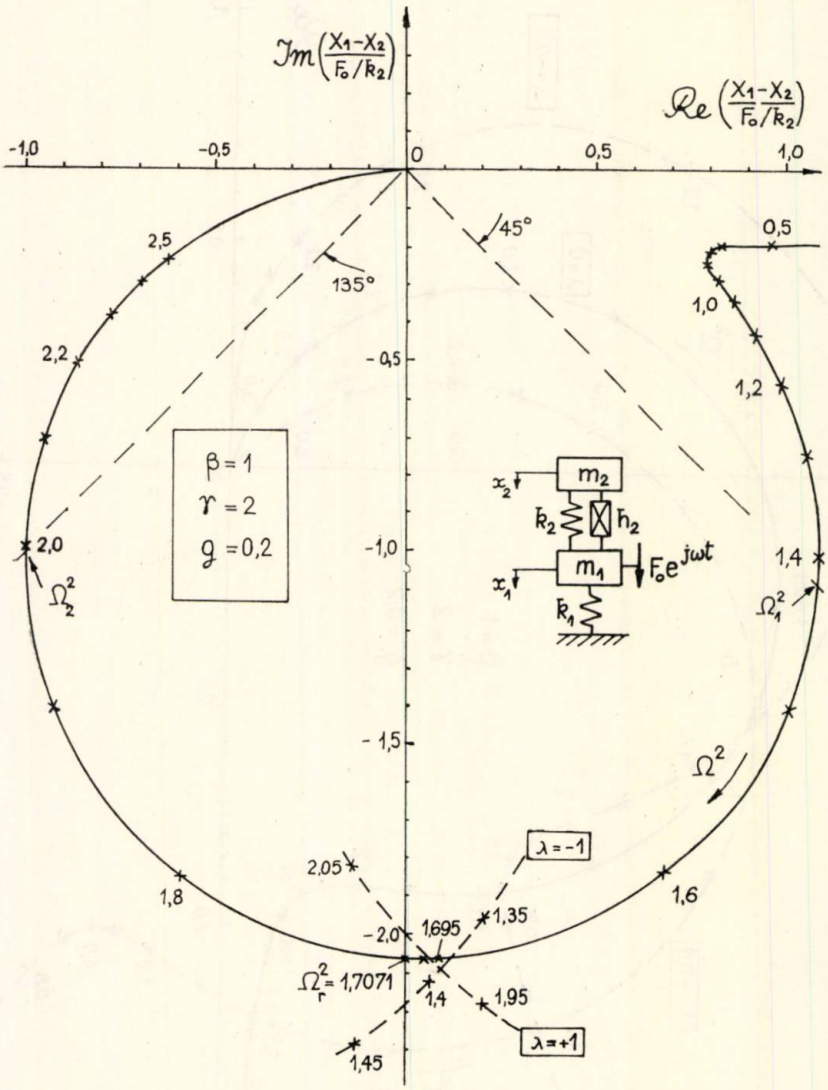

Im(X1-X2 / F0/k2)
Re(X1-X2 / F0/k2)
-1,0
-0,5
0
0,5
1,0
45°
135°
2,5
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,5
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
β = 1
γ = 2
g = 0,2
m2
m1
k2
h2
k1
x2
x1
F0e^jωt
Ω2²
Ω1²
Ω²
λ = -1
λ = +1
2,05
1,695
1,35
1,7071
1,4
1,95
1,45

Fig. 21

doua rezonanţă la o pulsaţie a cărei valoare diferă în funcţie de criteriul de localizare utilizat (vezi tabela 1).

Tabela 1

Funcţia de răspuns în frecvenţă	Ω^2			
	Amplitudinea maximă	Unghiul de fază $-90°(+90°)$	Valoarea extremă a componentei imaginare	Metoda forţelor în cvadratură
$\frac{X_1}{F_0/k_2}$	1,754	1,612	1,695	1,758
$\frac{X_2}{F_0/k_2}$	1,639	1,765	1,705	1,637
$\frac{X_1 - X_2}{F_0/k_2}$	1,695	1,7071	1,701	1,694
$\frac{F_0}{k_2 X_1}$	1,007	1,093	1,040	—

Deşi analitic nu mai este descrisă de ecuaţia unui cerc, diagrama din figura 21 poate fi aproximată în vecinătatea rezonanţei printr-un arc de cerc (chiar pentru amortizare mare), iar pulsaţia de rezonanţă $\Omega_R = \sqrt{1{,}695}$ poate fi regăsită pe curba din figura 19 aplicînd *criteriul valorii extreme a componentei imaginare* propus anterior.

Metoda forţelor în cvadratură este ineficientă în localizarea rezonanţei pe curbele (46) şi (47), în schinb permite o suficient de bună localizare a antirezonanţei pe curba (46).

În figura 22 s-a desenat o porţiune din diagrama polară a funcţiei $F_0/(k_2X_1)$, prin linie continuă — pentru excitaţie fără forţe în cvadratură şi prin linie întreruptă — pentru excitaţie cu forţe în cvadratură. Experimental, diagrama funcţiei F_0/X_1 se trasează efectuînd măsurări în care se menţine X_1 constant şi se variază amplitudinea F_0 a forţei excitatoare. În figura 22 localizarea antirezonanţei $\Omega_A = 1$ se poate face atît cu criteriul amplitudinii maxime, cît şi cu criteriul Kennedy-Pancu, în schimb, metoda forţelor în cvadratură nu mai poate fi folosită, punctele de intersecţie a curbei $\lambda = 0$ fiind prea depărtate.

Aceste concluzii, deşi exemplificate pe un singur caz particular, au fost stabilite în urma analizei unui mare număr de diagrame polare, trasate pentru diverse valori ale parametrilor β, γ şi g, fiind confirmate experimental [12].

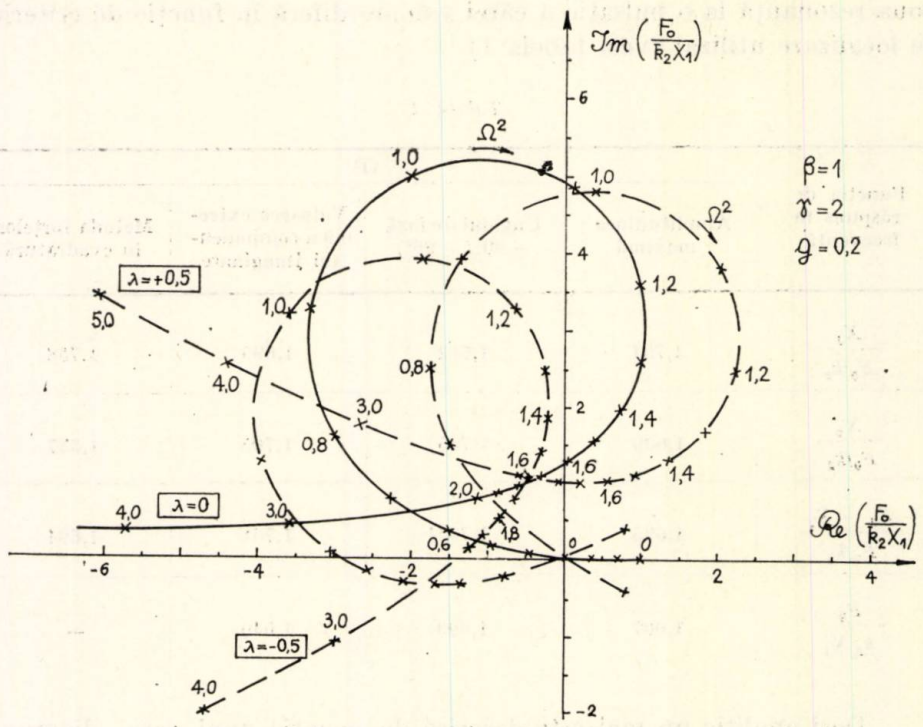


Fig. 22

Determinarea valorii factorului de amortizare se poate face utilizînd diagrama din figura 21. Din relaţia (48) rezultă că unghiul de fază între forţa excitatoare şi deplasarea relativă $(X_2 - X_1)$ este

$$\theta = -\operatorname{arctg} \frac{g\left[\frac{\beta}{\Omega^2} - (1+\gamma)\right]}{(1-\Omega^2)\left(\frac{\beta}{\Omega^2} - \gamma\right) - 1}. \tag{50}$$

„Rezonanţa de fază" apare pentru $\theta = -90°$ la pulsaţia adimensională Ω_r dată de relaţia

$$(1 - \Omega_r^2)\left(\frac{\beta}{\Omega_r^2} - \gamma\right) - 1 = 0. \tag{51}$$

Dacă se notează cu Ω_1 pulsaţia adimensională corespunzătoare unui unghi $\theta_1 = -45°$ şi cu Ω_2 — cea corespunzătoare unui unghi $\theta_2 = -135°$, se poate stabili expresia

$$g = \frac{(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)(\beta - \gamma\Omega_1^2\Omega_2^2)}{\beta(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2(1+\gamma)\Omega_1^2\Omega_2^2}, \tag{52}$$

în care parametrul β se calculează din relaţia (51)

$$\beta = \Omega_r^2 \left(\gamma - \frac{1}{\Omega_r^2 - 1} \right), \tag{51, a}$$

iar γ se determină experimental.

Pulsaţiile adimensionale Ω_r, Ω_1 şi Ω_2 se calculează cu relaţiile

$$\Omega_r = \frac{\omega_r}{\omega_A}, \qquad \Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_A}, \qquad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_A}, \tag{53}$$

unde pulsaţia de antirezonanţă $\omega_A = \sqrt{k_2/m_2}$ precum şi ω_r, ω_1, ω_2 se determină experimental cum s-a arătat mai sus.

5.2 SISTEMUL EXCITAT LA BAZĂ

Pentru exemplificarea aplicabilităţii criteriului de rezonanţă propus în paragraful 4, se va considera sistemul din figura 23.

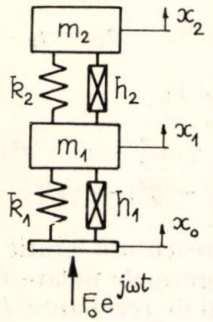


Fig. 23

Folosind metoda matricelor de transfer, condiţia de echilibru dinamic se scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m_2\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k_2 + jh_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m_1\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \tag{54}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k_1 + jh_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ -F_0 \end{bmatrix},$$

de unde se deduce expresia receptanței directe

$$\frac{X_0}{F_0} = \frac{m_2\omega^2(k_2 + jh_2) - (k_1 - m_1\omega^2 + jh_1)(k_2 - m_2\omega^2 + jh_2)}{m_2\omega^2(k_1+jh_1)(k_2+jh_2)+m_1\omega^2(k_1+jh_1)(k_2-m_2\omega^2+jh_2)}. \tag{55}$$

Folosind notațiile

$$p_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \Omega_1 = \frac{\omega}{p_1}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega}{p_2},$$

$$g_1 = \frac{h_1}{k_1}, \quad g_2 = \frac{h_2}{k_2}, \quad \beta = \frac{k_1}{k_2}, \tag{56}$$

relația (55) devine

$$\frac{X_0}{F_0/k_1} = \frac{\Omega_2^2(1 + jg_2) - \beta(1 - \Omega_1^2 + jg_1)(1 - \Omega_2^2 + jg_2)}{\Omega_2^2(1 + jg_1)(1 + jg_2) + \beta\Omega_1^2(1 + jg_1)(1-\Omega_2^2 + jg_2)}. \tag{57}$$

Pentru cazul particular $m_1 = \gamma \cdot m_2$, $k_1 = k_2$, $h_1 = h_2$, rezultă

$$\beta = 1, \quad g_1 = g_2 = g,$$

care, înlocuite în (57), conduc la

$$\frac{X_0}{F_0/k_1} = -\frac{1}{\Omega_2^2} \frac{\gamma\Omega_2^4 - (2 + \gamma)\Omega_2^2 + (1-g^2) + jg[2 - (\gamma + 2)\Omega_2^2]}{(1 + \gamma)(1 - g^2) - \gamma\Omega_2^2 + jg[2(1 + \gamma) - \gamma\Omega_2^2]}. \tag{58}$$

Expresia (58) este reprezentată grafic în figurile 24 și 25 pentru $g = 0{,}1$, $\gamma = 1$ și $\gamma = 5$. Diagramele polare respective au două puncte de antirezonanță A_1 și A_2 și unul de rezonanță R.

În ambele cazuri se observă că aplicînd criteriul valorii extreme a componentei imaginare a răspunsului se obține punctul de pulsație adimensională $\Omega_2 = \sqrt{(\gamma + 1)/\gamma}$, căreia îi corespunde

$$\omega = \sqrt{k_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)},$$

adică pulsația de rezonanță a sistemului $m_1 - k_2 - m_2$. Se confirmă astfel faptul că excitarea prin intermediul elementului deformabil k nu modifică frecvența de rezonanță a sistemului $m_1 - k_2 - m_2$.

6. CONCLUZII

Analiza modelelor mecanice cu parametri concentrați prezentate în cadrul lucrării permite unele aprecieri de ordin general: a) utilitatea

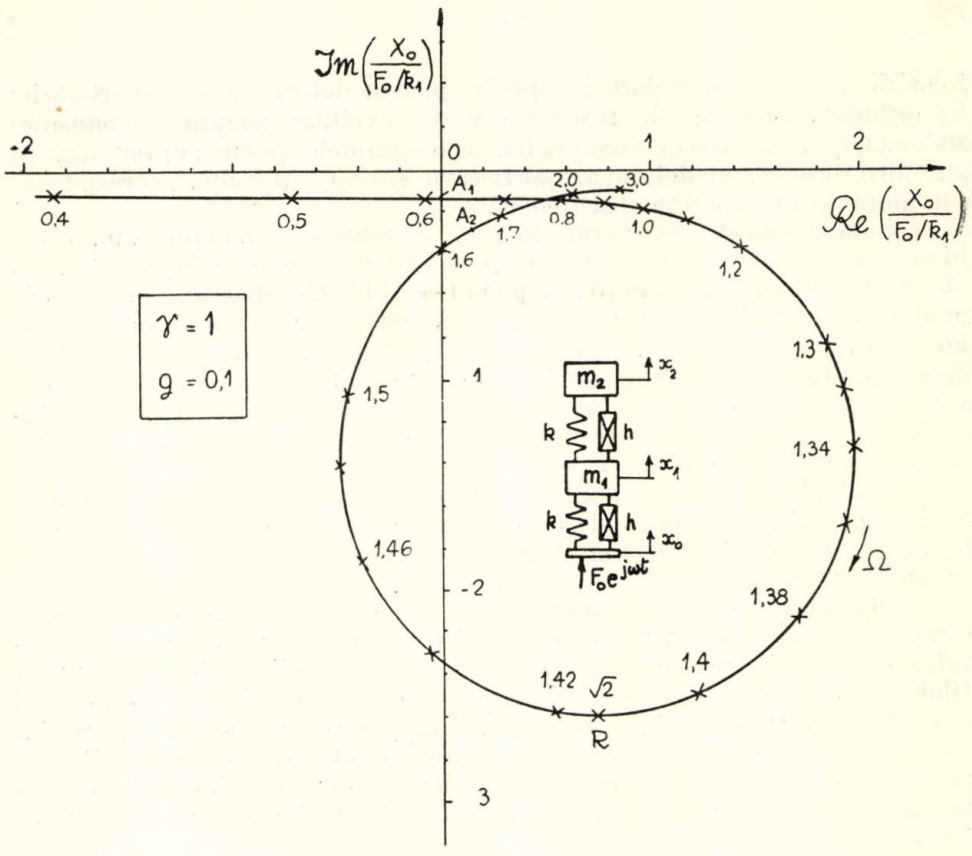

Im(X₀/F₀/k₁)
Re(X₀/F₀/k₁)
-2
0
1
2
A₁
A₂
0,4
0,5
0,6
2,0
3,0
1,7
0,8
1,0
1,2
1,3
1,34
1,38
1,4
1,42
√2
R
1,46
1,5
1,6
1
-2
3
Ω
γ = 1
g = 0,1
m₂
m₁
k
h
x₂
x₁
x₀
F₀e^jωt

Fig. 24

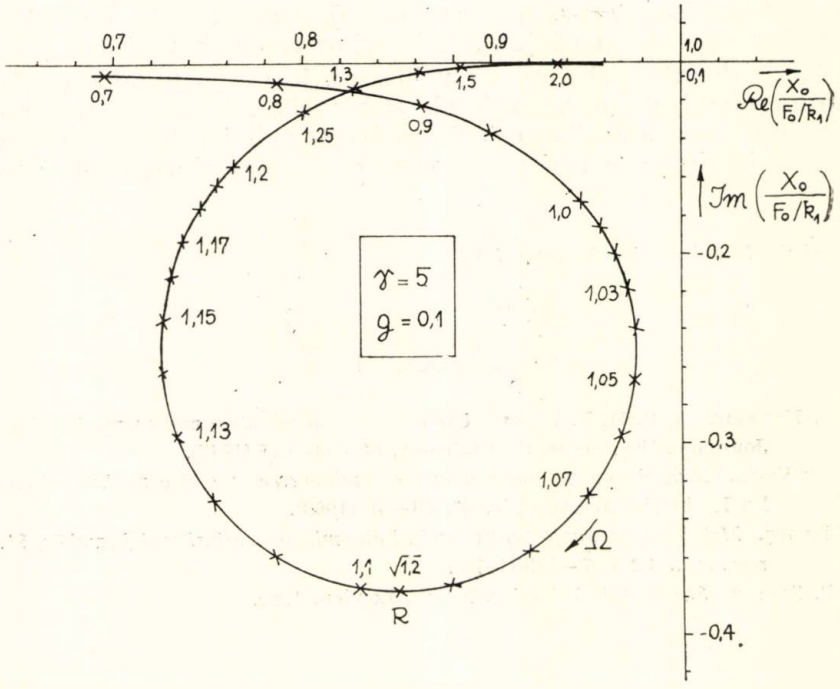

0,7
0,8
0,9
1,0
1,3
1,5
2,0
0,1
Re(X₀/F₀/k₁)
Im(X₀/F₀/k₁)
1,25
1,2
1,17
1,15
1,13
1,1
√1,2
R
1,0
1,03
1,05
1,07
Ω
-0,2
-0,3
-0,4
γ = 5
g = 0,1

Fig. 25

folosirii diagramelor polare în special pentru determinarea amortizării; b) influenţa modului de rezemare şi de excitare asupra răspunsului sistemelor mecanice şi deci asupra formei diagramelor polare; c) importanţa stabilirii corecte a modelului ataşat fiecărui sistem real studiat, corespunzător montajului experimental folosit.

S-au elaborat atît lucrări în care se foloseşte modelul amortizării histeretice [1], [5]— [9], [11], cît şi lucrări în care s-a adoptat modelul amortizării vîscoase liniare [3], [5], [11] — [14]. Alegerea „apriori" a unui model de amortizare nu limitează însă generalitatea analizei dacă se lucrează cu „coeficienţi de amortizare echivalentă", iar o serie de „metode de rezonanţă", elaborate în special pentru studiul structurilor slab amortizate ($g < 0{,}01$), pot fi aplicate cu succes în studiul caracteristicilor dinamice ale materialelor cu proprietăţi disipative accentuate, folosite în izolarea antivibratorie [12].

Pentru fiecare sistem analizat în parte este necesar un studiu detaliat al răspunsului în frecvenţă, definirea corectă a rezonanţei şi a modului de localizare a acesteia, precum şi stabilirea relaţiei de calcul a factorului de amortizare.

În analiza răspunsului unor sisteme în care au fost înglobate elemente deformabile ale căror proprietăţi dinamice trebuie determinate experimental, se recomandă trasarea diagramei polare a *deplasării relative* a extremităţilor acestor elemente, care permite cea mai corectă definire a rezonanţei şi evaluare a amortizării. Este indicată de asemenea folosirea criteriului valorii extreme a componentei imaginare a deplasării pentru localizarea rezonanţelor şi a metodei forţelor în cvadratură — pentru localizarea antirezonanţelor pe curba receptanţei directe a sistemelor nelegate de o bază fixă.

Analiza grafică a diagramelor polare este folosită tot mai intens în studiul vibraţiilor forţate ale rachetelor [15], avioanelor [16], navelor [17], automobilelor [18], maşinilor unelte [19], maşinilor de ridicat [20], elementelor de construcţii [21], izolatorilor contra vibraţiilor [22] etc.

Particularităţile legate de utilizarea lor la determinarea formei modurilor principale de vibraţie ale structurilor, la studiul materialelor folosite în izolarea antivibratorie, în probleme neliniare precum şi în cazul excitaţiei simultane în mai multe puncte vor face obiectul unor lucrări viitoare.

Primită la redacţie la 20 august 1973

BIBLIOGRAFIE

1. C. C. KENNEDY şi C. D. P. PANCU, *Use of vectors in vibration measurement and analysis*, Journal of the Aeronautical Sciences, **14**, 603—625 (1947).
2. G. DE VRIES, *Remarks on the analysis of the admittance curves of a mechanical structure*, La Recherche Aerospatiale, **95**, 49—55 (1963).
3. M. RADEŞ, *Metode de rezonanţă pentru studiul dinamic al structurilor deformabile*, St. cerc. mec. apl., **32**, 607—633 (1973).
4. J. P. SALTER, *Steady-state Vibration*, Mason, London, 1969.

5. R. E. D. Bishop şi D. C. Johnson, *The Mechanics of Vibration*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
6. D. J. Mead, *The internal damping due to structural joints and techniques for general damping measurement*, AR.C. Rep. 19870 (1958).
7. B. M. Fraeijs de Veubeke, *Influence of internal damping on aircraft resonance*, Manual of Aeroelasticity, vol. 1, cap. 3, A.G.A.R.D..
8. R.E.D. Bishop şi G. M. L. Gladwell, *An investigation into the theory of resonance testing*, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, **255 A**, *1055*, 241—273 (1963).
9. J. W. Pendered şi R. E. D. Bishop, *A critical introduction to some industrial resonance testing techniques*, Journal of Mechanical Engineering Science, **5**, 345—367 (1963).
10. E. C. Pestel şi F. A. Leckie, *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.
11. J. A. Overton şi B. Mills, *The use of mobility methods for the dynamic analysis of mechanical systems*, Environmental Engineering, *46*, 7—12 (1970).
12. M. Radeş, *A technique for the dynamic analysis of anti-vibration mountings*, Proc. of the 44th Euromech Colloquium „The Dynamics of Machine Foundations", Bucharest, 29—31 October, 363—378, 1973.
13. Elena Mihăilescu şi M. Radeş, *Dynamic structural measurement using the method of forces in quadrature*, Symposium „Experimental Techniques in Applied Mechanics", Bucharest, 21—34 (1972).
14. D. L. Woodcock, *On the interpretation of the vector plots of forced vibrations of a linear system with viscous damping*, The Aeronautical Quarterly, **14**, 45—62 (1963).
15. K. S. Kolesnikov, *Prodolnie kolebaniia rakeli s jidkostnim]raketnim]dvigatelem*, [Maşinostroenie, Moscova, 1971.
16. M. R. Turner, *Analysis techniques in aircraft flutter testing*, Symposium „Experimental Techniques in Applied Mechanics", Bucharest, 1972.
17. R. G. White, *The application of a transient test technique to the study of the local vibration characteristics of ship structures*, I.S.V.R. Technical Report No. 31, May, 1970.
18. J. A. Overton şi C. R. Ennos, *Some uses of electro-hydraulic vibrators in the development of road vehicles*, Environmental Engineering, *28*, 21—25 (1967).
19. N. H. Hanna şi S. A. Tobias, *The non-linear dynamic behaviour of a machine-tool structure*, Internat Jnl. Machine Tool Design Research, **9**, 293—307 (1969).
20. O. B. Sluţkaia şi N. P. Lihovid, *Opredelenie sobstvennih kolebanii mehaniceskoi sistemi so mnoghimi stepeniami svobodi*, Dinamika i procinosti maşin, **14**, 59—64 (1971).
21. D. V. Mallick, *Resonance testing of multistorey infilled frames*, Proc. 4 th World Conference on Earthquake Engineering, Santiago de Chile, **1**, 136—149 (1969).
22. M. Radeş, *Vibraţiile verticale axial-simetrice ale unui corp rigid rezemat pe o fundaţie inerţială de tip Pasternak*, St. cerc., mec. apl., **32**, 231—253 (1973).

PROCEDEE PENTRU DETERMINAREA EFORTURILOR DIN PRĂJINILE INSTALAȚIILOR DE POMPAJ A ȚIȚEIULUI, ÎN REGIM DINAMIC, PRIN UTILIZAREA SISTEMELOR DE CALCUL AUTOMAT

de I. DUMITRESCU C. VENETE și GH. DODESCU

Institutul de petrol și gaze Ploiești,
Uzina de reparații a utilajului petrolier Teleajen,
Academia de studii economice București

În articol este prezentat un nou procedeu de analiză a comportării în regim dinamic a garniturilor de prăjini ale instalațiilor cu pompaj de adîncime pentru extracția țițeiului, prin utilizarea metodelor și tehnicilor de calcul specifice informaticii aplicate.

Analiza urmărește — în principal — să determine repartiția eforturilor în lungul prăjinilor de pompaj, precum și variația locală a acestor eforturi în timp, în cadrul procesului de pompare a țițeiului. Procedeul pus la punct pentru determinarea acestor eforturi constă :

— în descrierea exactă a repartiției eforturilor (local și în timp), cu considerarea fenomenelor de propagare și reflectare a eforturilor în lungul prăjinilor de pompaj (care pot apare în special la unitățile de extracție pentru adîncimi și viteze de pompaj mari), prin modele formate din ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic ;

— în rezolvarea acestor ecuații prin metode numerice bazate pe aproximarea ecuațiilor cu derivate parțiale prin ecuații cu diferențe (conform metodei rețelelor, de directizare) și

— în elaborarea unor algoritmi și proceduri de calcul general valabile (scrise în limbajul de programare FULL FORTRAN IV) — care au fost testate pe sistemele de calcul automat IBM 360/40 F de la Centrul de calcul al A.S.E. București și FELIX C 256 de la C.T.C.E. Ploiești — ce permit oricărui utilizator să întocmească programe de calcul a eforturilor pentru orice unitate de pompaj studiată în mod particular.

Autorii acestui articol vor răspunde oricăror solicitări din partea celor interesați să concretizeze procedeul descris aici, prin rutinele de calcul pe care le-au elaborat și prin indicații de utilizare a acestor rutine.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 1, 1974, P. 105—120

1. INTRODUCERE

De-a lungul anilor, dinamometrul a fost principalul dispozitiv pentru analizarea comportării sondelor exploatate prin pompaj de adîncime. După cum se ştie, dinamometrul este un aparat care înregistrează curba variaţiei sarcinilor în prăjina lustruită în funcţie de timp. Forma acestei curbe (numită „dinagramă") este influenţată de condiţiile de funcţionare din gaura de sondă; cu cît condiţiile de pompare sînt mai severe (debite sporite de lichid şi adîncimi mari de pompare) cu atît informaţia dată de dinagrame, prin interpretarea vizuală a datelor de suprafaţă, este mai puţin precisă.

Semnalele transmise de la adîncimea pompei şi înregistrate la prăjina lustruită sînt deformate cu atît mai mult cu cît viteza de pompare şi adîncime de la care sînt transmise sînt mai mari [2]. De aceea, pentru o cercetare cît mai corectă a funcţionării întregului sistem , este necesar să se cunoască sarcinile, vitezele şi deplasările la pistonul pompei şi la nivelele tronsoanelor de prăjini cele mai solicitate [1]. Aceste date se pot obţine, în „laborator", prin integrarea unor ecuaţii cu derivate parţiale de tip hiperbolic, ce conţin parametrii arătaţi mai sus.

Rezolvarea analitică a acestor ecuaţii este, practic, imposibilă, iar rezolvarea numerică — prin metode de discretizare — necesită un volum mare de calcule pentru rezolvarea unor sisteme de ecuaţii algebrice liniare (care înlocuiesc problema cu condiţii iniţiale şi la limită ce conţine ecuaţiile hiperbolice), care nu poate fi efectuat decît cu ajutorul unor tehnici de calcul automat.

De aceea se impune elaborarea unor metode de simulare numerică, cu ajutorul sistemelor de calcul automat, care să rezolve modelele concrete de analiză a procesului de pompaj [7].

Metoda simulării prin utilizarea sistemelor de calcul automat permite un studiu complex pentru unităţile de pompare din cadrul schelelor petroliere, de orice tip. Prin folosirea calculatoarelor automate se poate ajunge la o înţelegere mai bună a fenomenelor dinamice care au loc în instalaţia de fund; se pot cerceta diferite regimuri în pompajul de adîncime, simulîndu-se funcţionarea instalaţiilor existente pentru a se obţine date asupra unor parametri (sarcinile maxime şi minime, debitul pompei etc.); se poate determina domeniul de aplicabilitate a diferitelor formule de calcul existente în privinţa sarcinii maxime şi minime şi a cursei reale a pistonului ş.a.m.d. [9].

Cunoscînd limitele de adîncime şi debitele care se pot obţine cu instalaţiile existente, se pot face cercetări asupra unor regimuri care în prezent nu sînt aplicate în schelele noastre, dînd indicaţii preţioase asupra parametrilor necesari la proiectarea unităţilor de pompare.

În plus, din cercetarea regimurilor de pompaj existente, se pot determina cauzele anumitor anomalii de funcţionare a sistemelor. Pe baza acestor constatări se modelează mai multe regimuri de pompare îmbunătăţite, alegîndu-se regimul cel mai eficace (deci o problemă de optimizare).

La sondele cu pompele fixate la adîncimi mari, acţionate cu un număr relativ mare de curse (pe minut), forţele dinamice care iau naştere în garnitura de prăjini deformează atît de mult aspectul diagramelor de dinamo-

metrare încît interpretarea lor directă devine extrem de dificilă. În aceste condiţii, pentru cunoaşterea funcţionării pompei, ar trebui să se efectueze o măsurătoare de fund pentru a se obţine la piston diagrama variaţiei sarcinii într-un ciclu de pompaj ; de asemenea, ar fi util să se obţină diagrame cu viteze şi deplasarea pistonului în funcţie de timp.

Din aceste date se pot obţine informaţii cu privire la fenomenele oscilatorii care iau naştere în garnitura de prăjini.

Măsurarea de fund a sarcinii la piston necesită introducerea unor aparate în sondă şi uneori şi canale de transmisiune a indicaţiilor aparatelor din sondă. Executarea acestei aparaturi şi a operaţiilor este dificilă şi poate cauza întreruperi destul de mari în exploatarea sondei.

Din această cauză, apare necesitatea determinării datelor de fund sau din orice secţiune (S_x) a garniturii prin metode analitice sau de modelare — simulare.

2. ELABORAREA MODELULUI

Pentru determinarea ecuaţiilor (modelului), se consideră un element finit din garnitura de prăjini, de lungime Δx, orientat astfel încît axa lui să coincidă cu axa Ox (fig. 1).

Se admit următoarele ipoteze principale :

— garnitura este construită din prăjini cu acelaşi diametru,confecţionate din acelaşi material ;

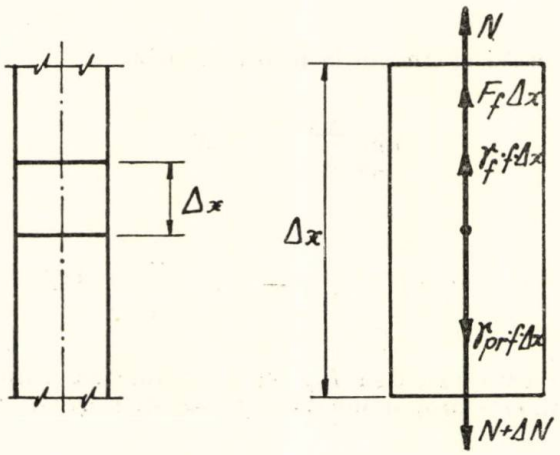


Fig. 1

— garnitura de ţevi de extracţie este introdusă într-o coloană de exploatare cu deviaţie mică, astfel încît ţevile de extracţie şi prăjinile de pompaj sînt în poziţie verticală ;

— lichidul pompat este omogen şi incompresibil;

— se utilizează următoarele notaţii :

N — forţa axială din elementul de prăjină ;

f — aria secţiunii transversale a prăjinii ;

σ — efortul unitar din secţiunea S_x;
E — modulul de elasticitate al materialului din care este confecţionată prăjina;
$\bar{u}$ — deplasarea secţiunii S_x;
x — coordonata secţiunii S_x;
t — timpul;
g — acceleraţia gravitaţională;
γ_{pr} — greutatea specifică a materialului prăjinii;
γ_l — greutatea specifică a materialului ţevilor;
b^* — coeficient de frecare;
F_{fr} — forţa de frecare pe unitate de lungime.

Scriind condiţia de echilibru pentru toate forţele care solicită elementul de prăjină Δx (sensul de referinţă pozitiv, pe axa Ox, fiind îndreptat „în jos") se obţine:

$$N + \Delta N + \gamma_{pr} \cdot f \cdot \Delta x - \gamma_l \cdot f \cdot \Delta x - F_{fr} \cdot \Delta x - N =$$

$$= \frac{\gamma_{pr}}{g} f \cdot \mathrm{D}_{t^2}^2 \bar{u} \cdot \Delta x$$

sau

$$\Delta N + (\gamma_{pr} \cdot f - \gamma_l \cdot f) \cdot \Delta x - F_{fr} \cdot \Delta x = \frac{\gamma_{pr} \cdot f}{g} \cdot \mathrm{D}_{t^2}^2 \bar{u} \cdot \Delta x.$$

Împărţind cu Δx şi trecînd la limită rezultă

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta x} = \mathrm{D}_x N$$

şi deci

$$\mathrm{D}_x N + \gamma_{pr} \cdot f - \gamma_l \cdot f - F_{fr} = \frac{\gamma_{pr}}{g} f \cdot \mathrm{D}_{t^2}^2 \bar{u}. \tag{1}$$

Forţa de frecare vîscoasă F_{fr}, care acţionează asupra unităţii de lungime a prăjinii, este proporţională cu viteza de mişcare, adică

$$F_{fr} = b^* \cdot \mathrm{D}_t u,$$

unde

$$b^* = b \cdot \frac{\gamma_{pr} \cdot f}{g}.$$

Întrucît

$$N = \sigma \cdot f,$$

iar pe de altă parte, conform legii lui Hooke,

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - E \cdot \mathrm{D}_x u,$$

rezultă

$$N = f \cdot E \cdot \mathrm{D}_x u,$$

iar

$$\mathrm{D}_x N = D_x(E \cdot f \cdot \mathrm{D}_x u) = E \cdot f \cdot \mathrm{D}^2_{x^2} u.$$

Atunci ecuația (1) devine :

$$E \cdot f \cdot \mathrm{D}^2_{x^2} u + \gamma_{pr} \cdot f - \gamma_l \cdot b - F_{fr} = \frac{\gamma_{pr} \cdot b}{g} \cdot \mathrm{D}^2_{t^2} u$$

sau

$$E \cdot f \cdot \mathrm{D}^2_{x^2} u = \frac{\gamma_{pr} \cdot f}{g} \cdot \mathrm{D}^2_{t^2} u + F_{fr} - b(\gamma_{pr} - \gamma_l).$$

Introducînd și expresiile forțelor de frecare se obține

$$E \cdot f \cdot \mathrm{D}^2_{x^2} u = \frac{\gamma_{pr} \cdot f}{g} \mathrm{D}^2_{t^2} u + b^* \mathrm{D}_t u - f(\gamma_{pr} - \gamma_l). \qquad (2-a)$$

Deoarece fenomenele elastice din garniturile de prăjini lungi sînt descrise de către un model de tipul ecuației undelor, rezultă că repartiția eforturilor este ondulatorie, în sensul că în garnitură apar unde elastice care se propagă în lungimea ei.

Dacă ținem seamă de principiul superpoziției, ecuația (2—a), obținută mai sus, se poate scrie sub forma mai generală :

$$K\mathrm{D}^2_{x^2} u - F\mathrm{D}_t u = \frac{P}{g} \mathrm{D}^2_{t^2} u, \qquad (2-b)$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de tip hiperbolic [3].

Rezolvarea acestei ecuații, cu condiții inițiale și la limită, se face prin metoda „tehnica valorilor limită". Pe spațiul **R** se consideră ecuația cu derivate parțiale de tip hiperbolic :

$$\mathrm{D}^2_{x^2} u - \mathrm{D}^2_{t^2} u = \Phi(x, t, \mathrm{D}_x u, \mathrm{D}_t u). \qquad (3)$$

Cu aceste elemente introduse, problema cu valori inițiale și la limită constă în a găsi pe **R** o soluție u(x, t) a ecuației și care satisface condițiile :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{u}(x, 0) = f_1(x), \\ &\mathrm{D}_x \mathrm{u}(x, 0) = f_2(x), \end{aligned}\right\} \quad x \in I, \quad \text{condiții inițiale,}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{u}(0, t) = g_1(t), \\ &\mathrm{u}(a, t) = g_2(t), \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &t \geqslant 0, \\ &t \geqslant 0. \end{aligned} \quad \text{condiții la limită.}$$

Metoda de rezolvare prin aproximaţie numerică constă în a înlocui mărimile continue prin mărimi discrete şi ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale printr-o ecuaţie cu diferenţe finite [4].

Rezultă o schemă de aproximaţie cu diferenţe care conduce în mod sigur la o matrice asociată cu o uşoară preponderenţă diagonală. Această preponderenţă diagonală a matricei va fi foarte utilă la rezolvarea sistemului algebric obţinut în urma discretizării, influenţînd procesul de convergenţă al metodei iterative utilizate pentru rezolvarea numerică a sistemului [5].

Metoda de discretizare a ecuaţiilor de tipul (3) pentru rezolvarea numerică a problemelor cu condiţii iniţiale şi la limită constă în următoarele :

Se consideră operatorul undă definit prin

$$L[u] = D^2_{x^2}u - D^2_{t^2}u.$$

Pentru un pas de discretizare $h > 0$ se alege următoarea mulţime de puncte de discretizare : (x, t); $(x, t + h)$; $(x, t - h)$; $(x; t - 2h)$; $(x - h, t)$; $(x + h, t)$, care vor fi notate cu numerele 0,1,..., 5, ce formează o reţea de discretizare în care aceste puncte au o dispunere ca în figura 2.

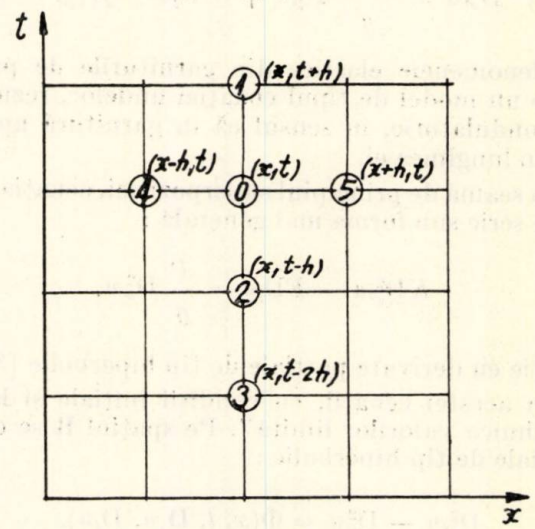


Fig. 2

Pentru simplificarea notaţiei se scrie numai simbolul u_i, $i = 0,1,\ldots,5$, care va reprezenta valoarea funcţiei u(x, t) în punctul i.

În continuare se caută să se determine un grup de coeficienţi B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 şi un operator cu diferenţe a cărei expresie să fie de forma [4], [8]

$$L_h[u] = \sum_{i=0}^{5} B_i u_i.$$

Determinarea coeficienților $B_i (i = 0, 1, \ldots, 5)$ trebuie făcută astfel încît în $\forall (x, t) \in \mathbf{R}$ să fie satisfăcută pentru orice $u \in C^2(\mathbf{R})$ următoarea condiție

$$\lim_{h \to 0} |\mathrm{L}[u] - \mathrm{L}_h[u]| = 0.$$

Pentru fiecare punct 0, 1, 2, 3, 4, 5 se scrie relația

$$\mathrm{D}^2_{x^2} u - \mathrm{D}^2_{t^2} u \Big|_0 = \sum_{i=0}^{5} B_i u_i,$$

adică

$$\mathrm{D}^2_{x^2} u - \mathrm{D}^2_{t^2} u|_0 = B_0 \mathrm{u}(x, t) + B_1 \mathrm{u}_1(x, t + h) + B_2 \mathrm{u}_2(x, t - h) +$$
$$+ B_3 \mathrm{u}_3(x, t - 2h) + B_4 \mathrm{u}_4(x - h, t) + B_5 \mathrm{u}_5(x + h, t).$$

Introducînd dezvoltările în serie ale lui u în jurul punctului (x, t), din această dezvoltare luînd numai primii trei termeni, se obține

$$D^2_{x^2} u - D^2_{t^2} u|_0 = B_0 \mathrm{u}(x, t) + B_1 \mathrm{u}(x, t) +$$
$$+ B_1 \frac{\mathrm{u}'_t(x, t)\, h}{1!} + B_1 \frac{\mathrm{u}''_{tt}(x, t)\, h^2}{2!} + \ldots$$
$$+ B_2 \mathrm{u}(x, t) - B_2 \frac{\mathrm{u}'_t(x, t)\, h}{1!} + B_2 \frac{\mathrm{u}''_{tt}(x, t)\, h^2}{2!} + \ldots$$
$$+ B_3 \mathrm{u}(x, t) - B_3 \frac{\mathrm{u}'_t(x, t)\, 2h}{1!} + B_3 \frac{\mathrm{u}''_{tt}(x, t)\, 4h^2}{2!} + \ldots$$
$$+ B_4 \mathrm{u}(x, t) - B_4 \frac{\mathrm{u}'_x(x, t)\, h}{1} + B_4 \frac{\mathrm{u}''_{xx}(x, t) \cdot h^2}{2!} + \ldots$$
$$+ B_5 \mathrm{u}(x, t) + B_5 \frac{\mathrm{u}'_x(x, t)\, h}{1!} + B_5 \frac{\mathrm{u}''_{xx}(x, t)\, h^2}{2!} + \ldots,$$

unde, pentru simplificarea scrierii, derivatele parțiale ale funcției u s-au notat prin $\mathrm{u}'_t(x, t) = \mathrm{D}_t \mathrm{u}(x, t)$, $\mathrm{u}''_{tt}(x, t) = \mathrm{D}^2_{t^2} \mathrm{u}(x, t)$, $\mathrm{u}'_x(x, t) = \mathrm{D}_x \mathrm{u}(x, t)$ și $\mathrm{u}''_{xx}(x, t) = \mathrm{D}^2_{x^2} \mathrm{u}(x, t)$.

Prin identificarea termenilor rezultă următorul sistem :

$$\begin{aligned}
B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 &= 0,\\
- B_4 + B_5 &= 0,\\
B_1 - B_2 - 2B_3 &= 0,\\
- B_4 + B_5 &= \frac{2}{h^2},\\
B_1 + B_2 + 4B_3 &= \frac{2}{h^2}.
\end{aligned}$$

Rezolvînd sistemul în funcţie de una din necunoscute se obţin următoarele relaţii

$$B_1 = -\frac{1}{h^2} - \frac{B_0}{3}.$$

$$B_2 = -\frac{1}{h^2} - B_0,$$

$$B_3 = \frac{B_0}{3},$$

$$B_4 = B_5 = \frac{1}{h^2}.$$

Atunci, expresiile operatorului $\mathrm{L}_h[\mathrm{u}]$ ia forma

$$\mathrm{L}_h[u] = B_0 u_0 + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{B_0}{3}\right) u_1 +$$

$$+\left(-\frac{1}{h^2} - B_0\right) u_2 + \frac{B_0}{3} u_3 + \frac{1}{h^2} u_4 + \frac{1}{h^2} u_5. \tag{4}$$

Operatorul satisface forma $\mathrm{L}_h[u] = \sum_i B_i u_i$. În acest caz ecuaţia cu diferenţe $\mathrm{L}_h[u] = 0$ se va numi „aproximaţia ecuaţiei diferenţiale $\mathrm{L}[u] = 0$".

Dacă se dau trei puncte care sînt notate cu 0, 1, 2 atunci aproximarea cu diferenţe la dreapta pentru $\mathrm{D}_t u$ în punctul numerotat cu 0 este determinată în felul următor :

Operatorul de derivare se poate exprima cu ajutorul diferenţelor la dreapta Δ (vezi [4]) prin expresia

$$h\mathrm{D} = \left(\Delta - \frac{1}{2}\cdot\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \dots\right).$$

Dacă se iau în consideraţie, din această dezvoltare, numai primii doi termeni rezultă

$$\mathrm{D}_t\mathrm{u}(x,t) = \frac{\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2\right)\mathrm{u}(x,t)}{h} = \frac{2\Delta\mathrm{u}(x,t) - \Delta^2\mathrm{u}(x,t)}{2h} =$$

$$= -\frac{3\mathrm{u}(x,t) + 4\mathrm{u}(x,t+h) - \mathrm{u}(x,t+2h)}{2h} =$$

$$= -\frac{3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h},$$

deci

$$D_t u = \frac{1}{2h}(-3u_0 + 4u_1 - u_2). \tag{5}$$

3. ALGORITMUL PENTRU REZOLVAREA NUMERICĂ A PROBLEMELOR DISCRETE CU CONDIȚII INITIALE ȘI LA LIMITĂ

Ecuația care descrie repartiția (locală și în timp) a eforturilor din garnitura de prăjini a unei unități de pompaj a țițeiului, pe care am stabilit-o în paragraful precedent și pe care trebuie să o rezolvăm, este

$$KD_{x^2}^2 u - FD_t u = \frac{P}{g} D_{t^2}^2 u \tag{6}$$

(vezi ecuațiile 2—*a* și 2—*b*).

Pentru exemplificarea modului cum se rezolvă această ecuație prin metode de aproximare numerică vom considera un caz oarecare, în care coeficienții sînt constanți și au valorile :

$$K = 9.800 \text{ (în dN)},$$

$$F = 300 \text{ (în dN)},$$

$$\frac{P}{g} = 1.160 \text{ (în kg)},$$

iar condițiile inițiale și la limită sînt :

$$u(x, 0) = x,$$

$$u(0, t) = \frac{a}{b} r(1 - \cos \omega t) + \frac{r}{2l} \sin^2 \omega t,$$

$$u(l, t) = 3{,}3(1 + 0{,}23 \cos \omega t),$$

$$D_t u(x, 0) = \frac{x}{l} e^{-t},$$

în care $a + b$ reprezintă lungimea balansierului unității de pompaj, r — raza manivelei, ω — accelerația unghiulară la manivelă și l — lungimea manivelei. În program s-a considerat $l = 1$ m.

Se caută ca pentru orice $x \in (0,1)$ să fie satisfăcută relația

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = 0.$$

Alegînd pașii $\Delta t = 0{,}2$ s și $\Delta x = \frac{1}{5}$ m rezultă atunci o rețea de puncte în **R** numerotate ca în figura 3, cu 1, 2, 3, 4 și 5, i fiind nodul central („curent").

Se calculează primele valori ale funcţiei u în punctele de forma $(x,0)$; $(0, t)$ şi $(1, t)$. Apoi se asociază punctelor de forma (x, h) cîte o ecuaţie care reprezintă pur şi simplu aproximarea derivatei aplicată în punctele $(x, 0)$.

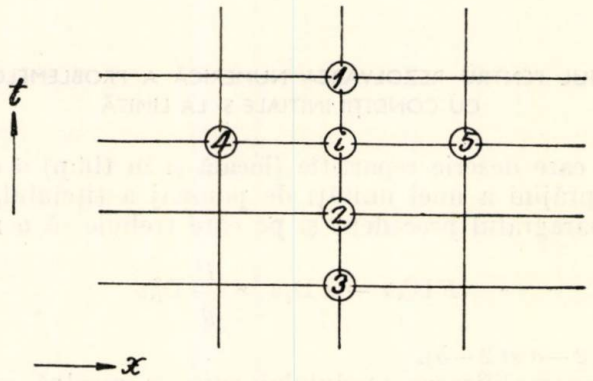


Fig. 3

Deoarece punctele de forma (x, h) sînt patru, numerotate cu 1, i, 2, 3, rezultă pentru ecuaţii şi anume :

$$-3\left(\frac{1}{2}\right)+4u_1-u_5=-\frac{1}{2},$$

$$-3\left(\frac{1}{4}\right)+4u_2-u_6=-\frac{1}{4},$$

$$-3\left(\frac{1}{6}\right)+4u_3-u_7=-\frac{1}{6},$$

$$-3\left(\frac{1}{8}\right)+4u_4-u_8=-\frac{1}{8}.$$

Dacă se consideră

$$B_0=-4/h^2 \text{ şi } \mathrm{D}_t u \cong \frac{u_0-u_2}{h},$$

atunci ecuaţia diferenţială (6) poate fi aproximată prin ecuaţia cu diferenţe :

$$-\frac{4}{h^2}u_0+\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{4}{3h^2}\right)u_1+\left(-\frac{1}{h^2}+\frac{4}{h^2}\right)u_2+$$

$$+\left(-\frac{4}{3h^2}\right)u_3+\frac{1}{h^2}u_4+\frac{1}{h^2}u_5-\frac{u_0-u_2}{h}=0. \qquad (7)$$

Pentru $h = 1/5$ rezultă

$$-105\,u_0 + \frac{25}{3}u_1 + 80\,u_2 - \frac{100}{3}u_3 + 25u_4 + 25u_5 = 0,$$

$$-63u_0 + 5u_1 + 48u_2 - 20u_3 + 15u_4 + 15u_5 = 0. \qquad (8)$$

În urma alegerii făcute pentru B_0 şi $D_x u$, B_0 îndeplineşte condiţia dată

$$|B_0| > |B_i| \quad \text{pentru} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Dacă se aplică ecuaţia pentru toate punctele din reţea, numerotate prin 5, 6, 7, ... rezultă un sistem de $M \cdot N$ ecuaţii cu $M \cdot N$ necunoscute.

Ecuaţia (8) se aplică cu ajutorul şablonului. Acest şablon va fi deplasat pe reţeaua din figura 4 în forma („poziţia") din figura 3, astfel încît să se suprapună în cele $M \cdot N$ poziţii cu punctele numerotate prin

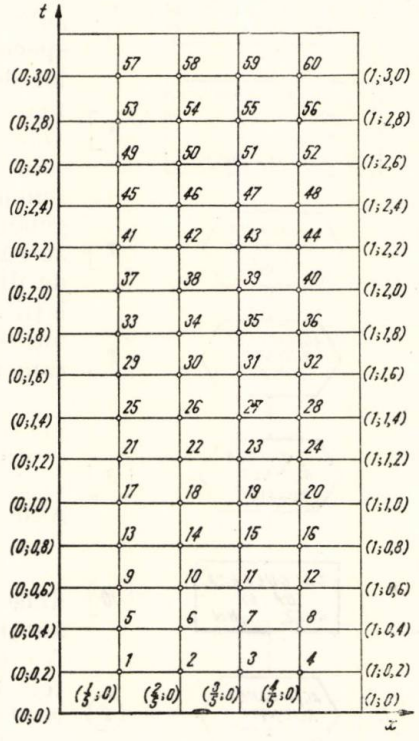


Fig. 4

5, 6, 7, ... Pentru o exemplificare mai clară cititorului am luat un caz care conduce la o ecuaţie cu 56 soluţii [9].

Folosind şablonul din figura 3, obţinem un sistem de ecuaţii care poate fi rezolvat cu metoda lui Gauss-Seidel, cu un vector iniţial zero [5].

4. PROCEDEURI BAZATE PE UTILIZAREA SISTEMELOR DE CALCUL AUTOMAT

Rezolvarea problemei discrete, redusă — în esență — la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu preponderență diagonală și cu matricea coeficienților în formă de bandă, însă de mari dimensiuni, nu se poate efectua decît cu ajutorul unor sisteme de calcul automat, cu o memorie (operativă și externă) corespunzătoare dimensiunilor sistemului.

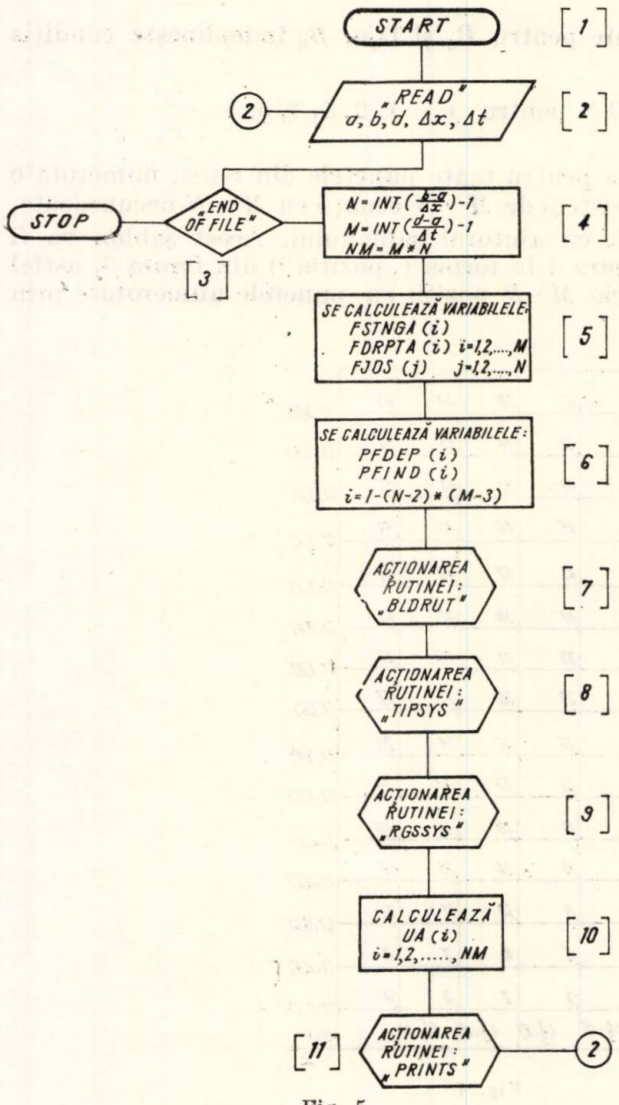


Fig. 5

Problema, complicată deci numai ca volum de calcul, se poate rezolva conform schemei de calcul prezentată în figura 5.

Această schemă are în vedere scrierea unui program sursă în limbajul FULL FORTRAN IV și utilizarea unui număr de 4 subprograme (rutine) — specifice rezolvării sistemelor de ecuații algebrice liniare prin metoda lui Gauss — Seidel și scrierii soluțiilor — ceea ce conferă schemei un mare grad de generalitate în privința rezolvării problemelor legate de diferite tipuri de instalații de pompaj de adîncime și care lucrează cu parametri oricît de diverși.

În schema din figura 5, „blocurile" de calcul (notate în figură cu $[i]$, $i \in N$), au următoarele semnificații :

blocul $[1]$ — start ;

blocul $[2]$ — introduce în sistemul de calcul automat parametrii rețelei Δx și Δt, precum și limitele domeniului considerat $x \in [a, b]$ și $t \in (a, d)$;

blocul $[3]$ — este un bloc de decizie binară, care permite reluarea programului pentru diverși parametri (N, Δx, Δt) ai rețelei cu ajutorul unui fișier de cartele, operație care este întreruptă în momentul cînd în acest grup de cartele e întîlnită una ce conține, pe coloana 1 și 2, caracterele/

şi respectiv $\divideontimes$ care la sistemul I B M/360 marchează sfîrşitul de fişier de cartele;

blocul [4] — determină punctele pe Ox şi Ot şi generează numărul de puncte din reţea (numărul de ecuaţii), adică:

$$N = \left(\frac{b - a}{\Delta x}\right) - 1,$$

$$M = \left(\frac{d - a}{\Delta t}\right) - 1,$$

$$N \cdot M = M \divideontimes N,$$

unde N este numărul de puncte de pe axa Ox, M — numărul de puncte de pe axa Ot şi $N \cdot M$ — numărul de puncte din reţea;

blocul [5] — calculează funcţia $u(x, t)$ pe cele trei segmente — frontieră: „frontieră jos" (*FJOS*), „frontieră stînga" (*FSTINGA*), şi frontieră dreapta" (*FDREAPTA*), în punctele reţelei situate pe frontiere, care se depun în memorie sub forma unor vectori coloană;

blocul [6] — calculează partea dependentă de u, din membrul drept al ecuaţiei diferenţiale, în toate punctele reţelei: pe linii (exceptînd liniile 1, 2 şi M) şi pe coloanele *1* şi N. Aceste valori intervin în calculul coeficienţilor $(I \cdot I)$ din matricea sistemului de ecuaţii liniare. La fel se procedează şi pentru partea independentă de u din termenul liber al ecuaţiei diferenţiale. Valorile termenilor dependenţi de u şi independenţi de u, calculate ca mai sus, se depun sub forma unor masivi bidimensionali de dimensiuni $(N - 2, M - 3)$;

blocul [7] — activează o rutină de construire a sistemului de ecuaţii. Apelul acestei rutine presupune transferul următorilor parametri din programul principal, în ordinea indicată mai jos:

— un vector de dimensiune $N \cdot M$ necesar pentru construirea matricei coeficienţilor sistemului,
— vectorul „frontieră stînga",
— vectorul „frontieră jos",
— vectorul „frontieră dreapta",
— vectorul „parte funcţie dependentă" de u,
— vectorul „parte funcţie independentă" de u,
— M, N, Δx;

blocul [8] — activează rutina pentru tipărirea sistemului. Apelul acestei rutine presupune transferul următorilor parametri din programul principal, în ordinea indicată mai jos:

— masivul matricei coeficienţilor,
— M, N;

blocul [9] — activează rutina de rezolvare a sistemului de ecuaţii. Activarea ei pentru început se face prin punctul normal de intrare furnizîndu-se următorii parametri:

— masivul matricei coeficienţilor ca zonă de lucru,
— M şi N,

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR

— *EPS* (condiția de convergență și extragerea soluției),
— *IT* (numărul de iterații),
— *IND* (o variabilă întreagă ce ia valoarea zero dacă s-a atins precizia în numărul de iterații fixat sau valoarea 1 în caz contrar),
— *NIT* (o variabilă în care rutina pune numărul efectiv de iterații atunci cînd controlul revine parametrului principal);

blocul [*10*] — calculează soluția analitică în punctele rețelei, dacă este cunoscută, pentru testarea preciziei metodei utilizate. Calculul acestei soluții analitice se face în punctele rețelei de linie și se depun într-un masiv de dimensiuni $NM(UA)$, explorat linie cu linie după valorile crescînde ale lui M;

blocul [*11*] — activează rutina de tipărire a soluției numerice, deoarece rutina lucrează în două moduri (primul mod fiind condiționat de calculul soluției analitice), iar apelarea ei cere următorii parametri:
— UN, UA, M * N,
— MT (o variabilă întreagă ce ia următoarele valori 1 și 2; pentru MT = 1 subrutina tipărește numai soluția numerică, iar pentru MT = 2 subrutina tipărește UN, UA și ε),
— NIT, EPS, IND.

După executarea blocului [*11*], programul se reia de la blocul [*2*], pentru eventualitatea că se iau și alți parametri ai rețelei.

Programul a fost scris în limbaj FFORTRAN și executat pe calculatorul IBM/360 al Catedrei de cibernetică din Academia de studii economice București, dar poate fi executat de orice calculator care dispune de un sistem de operare și de un compilator FFORTRAN și care are cel puțin configurația:
— lector de cartelă,
— imprimantă rapidă,
— o unitate de discuri pentru memoria externă.

Programul este modular, compus din patru rutine care sînt asamblate după necesități de un program general. Indiferent de natura problemei, rutinele rămîn aceleași, dar în funcție de specificul problemei se scrie programul general de asamblare. Programul conține următoarele rutine:

— rutina BLDRUT care are rolul de a construi sistemul de ecuații liniare, asociat în punctele rețelei considerate, după metoda șablonului prezentată în cadrul algoritmului de mai sus. Această rutină creează sistemul asociat pe discuri sau pe bandă magnetică de unde îl extrage rutina RGSSYS, care îl rezolvă. Datorită acestei metode de lucru este posibilă tratarea unor sisteme de dimensiuni foarte mari;
— rutina TIPSYS care are rolul de a tipări cele două matrice (matricea coeficienților și matricea termenilor liberi ai sistemului);
— rutina RGSSYS care are rolul de a tipări și a rezolva sistemul prin metoda Gauss — Seidel într-un număr de iterații dat și pentru o precizie impusă;
— rutina PRINTS este destinată tipăririi și poate să lucreze în două moduri:

1° tipărirea unui tablou numai cu soluția numerică în punctele rețelei (dacă soluția analitică este cunoscută),

2° tipărirea unui tablou numai cu soluţia numerică în punctele reţelei (dacă soluţia analitică nu este cunoscută).

5. CONCLUZII

Prin utilizarea procedeului propus în cadrul acestui articol se pot studia eforturile din garnitura prăjinilor de pompaj prin considerarea influenţei unui mare număr de factori.

De asemenea, se pot determina eforturile la piston numai în funcţie de datele de la suprafaţă, fără să fie nevoie să se oprească unitatea de pompaj şi fără să fie nevoie de o aparatură complicată.

Cunoscînd distribuţia eforturilor din garnitură (în timp şi în lungul garniturii) se poate face o dimensionare şi o „tronsonare" a garniturii de prăjini corectă, evitînd prin aceasta numărul mare de ruperi.

În comparaţie cu o dinagramă trasată în funcţie de un mare număr de parametri care influenţează procesul de pompaj, se poate aprecia că folosirea acestui procedeu reprezintă o necesitate pentru efectuarea unui studiu complet şi eficient. Posibilităţile noului procedeu, faţă de metoda analizei calitative a dinagramei de suprafaţă ridicate cu dinamometrul mecanic, pot fi prezentate calitativ în următorul tabel :

Denumirea parametrului (procesului) ce poate fi analizat	Felul analizei	
	Prin dinamometrare mecanică	Prin tehnică de calcul automat
— Sarcina la suprafaţă	Da	Da
— Analiza torsională	Da	Da
— Dinagrama la pompă	Nu	Da
— Cursa maximă la piston	Nu	Da
— Cursa efectivă la piston	Nu	Da
— Producţia pompei	Nu	Da
— Eficienţa pompajului	Nu	Da
— Lunecări la piston (scurgeri)	Nu	Da
— Supapa fixă defectă	Posibil	Da
— Supapa mobilă defectă	Posibil	Da
— Interferenţă cu gaze	Posibil	Da
— Presiunea la aspiraţie	Nu	Da
— Sarcina pe treptele garniturii de prăjini	Nu	Da
— Mişcarea ţevilor de extracţie	Nu	Da
— Ancora ţevilor defectă	Nu	Da
— „Packer" defect	Nu	Da

Prin abonarea unei schele petroliere la un centru de calcul, în vederea aplicării procedeului descris mai sus, se poate urmări comportarea unui număr mare de unităţi de pompare, în funcţie de datele de la suprafaţă, ceea ce asigură posibilitatea avertizării rapide (în „real-time") a eventualelor defecte şi a naturii lor, asigurîndu-se prin aceasta o intervenţie promptă în determinarea regimului optim de funcţionare a instalaţiei de pompare

Primită la redacţie la 12 septembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. GR. IOACHIM, *Extracția petrolului și gazelor*, București, Edit. tehnică, 1965.
2. N. D. DRĂGOTESCU, *Pompajul sondelor de țiței*, București, Edit. tehnică, 1965.
3. N. TEODORESCU, V. OLARU, *Ecuațiile fizicii matematice*—vol. II, București, Edit. didactică și pedagogică, 1965.
4. L. COLLATZ, *The numerical treatement of differential equations*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer — Verlag, 1966.
5. A. RALSTON, S. H. WILF, *Mathematical methods for digital computers* — volume 1. New York, London, Sydney, John Wiley § Sons, 1967.
6. M. L., JAMES, G. M. SMITH, F. C. WOLFORD, *Applied numerical methods for digital computation with FORTRAN*, Scranton —Pennsylvania, International Textbook Company, 1970.
7. I. DUMITRESCU, *Simularea cîmpurilor potențiale cu aplicații la exploatarea zăcămintelor de petrol* (rezumatul tezei de doctorat). București, Litografia I.P.G.G., 1970.
8. GH. DODESCU, *Metode de calcul ale sistemelor oscilante descrise de ecuația undelor, cu aplicații în industria petrolului* (rezumatul tezei de doctorat). București, Institutul de petrol, gaze și geologie, 1972.
9. C. VENETE, *Modelarea și simularea proceselor cinematice și dinamice din garniturile prăjinilor de pompaj a unităților cu balansier de mare adîncime* (proiect de diplomă). Ploiești, Institutul de petrol, și gaze, 1973.

STUDII

VIBRAȚIILE LATERALE DE ÎNCOVOIERE - RĂSUCIRE ALE GRINZII-PENDUL. I.

de T. PANĂ și VASILICA COSAC
Institutul politehnic București

În lucrare se stabilește sistemul de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea vibratorie de încovoiere-răsucire a grinzii, produsă de oscilațiile pendulare laterale ale acesteia, și se studiază soluțiile lui atît pentru regimul staționar de vibrație, cît și pentru cel de rezonanță. Sistemul oscilant fiind autoexcitat, în apropierea rezonanței au loc interferențe între oscilațiile pendulare și cele de încovoiere, care, în anumite condiții, conduc la apariția bătăilor. Se ajunge la concluzia că perioada bătăilor crește rapid odată cu apropierea de rezonanță, devenind infinită la atingerea acesteia.

Grinzile suspendate pendular au multiple aplicații în diferite domenii ale tehnicii, motiv pentru care, în ultimii ani, au fost studiate numeroase probleme legate de proiectarea, construcția și exploatarea lor [1], [2], [3], [5]. De regulă atît la proiectare, cît și în studiile teoretice aceste elemente de construcție sînt schematizate sub forma unei grinzi subțiri de secțiune dreptunghiulară, suspendată la extremități de două articulații, prin intermediul unor tendoane rigide și de masă neglijabilă, solidare cu grinda. Reazemele sînt astfel construite încît permit tendoanelor să efectueze rotiri atît în planul transversal al grinzii, cît și în planul longitudinal. Întrucît în prezenta lucrare se studiază vibrațiile grinzii produse de oscilațiile pendulare laterale se poate considera că tendoanele se pot roti numai în jurul unei axe paralele cu linia centrelor de greutate ale secțiunilor transversale.

Dacă grinda este scoasă din poziția sa de echilibru vertical, ea execută o serie de oscilații laterale în jurul liniei reazemelor. Forțele de inerție distribuite ce apar în grindă, în timpul acestor oscilații, constituie sarcinile perturbatoare periodice care produc vibrațiile elastice ale grinzii. Întrucît există posibilitatea realizării rezonanței între oscilația pendulară și vibrația elastică, obiectul acestei lucrări îl constituie studiul comportării grinzii în asemenea condiții de lucru.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 1, 1974, P. 121–136

1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII VIBRATORII

Se raportează grinda la un sistem de referință mobil — solidar cu secțiunea transversală de la extremitatea din stînga — avînd axa Ox dirijată în direcția lungimii, iar ca axe Oy și Oz, axele principale centrale ale secțiunii (fig. 1). Poziția instantanee a sistemului de referință $Oxyz$ este dată de unghiul θ făcut de axa Oy cu verticala dusă prin reazem.

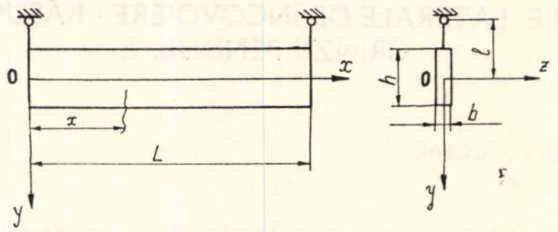


Fig. 1

Sub acțiunea sarcinilor perturbatoare, o secțiune oarecare de abscisă x se deplasează în direcțiile axelor Oy și Oz, respectiv cu cantitățile $\eta\ (x, t)$ și $\zeta\ (x, t)$ și se rotește în jurul centrului de greutate cu unghiul $\varphi\ (x, t)$ astfel încît diedrul format de axele principale centrale ale secțiunii — ini-

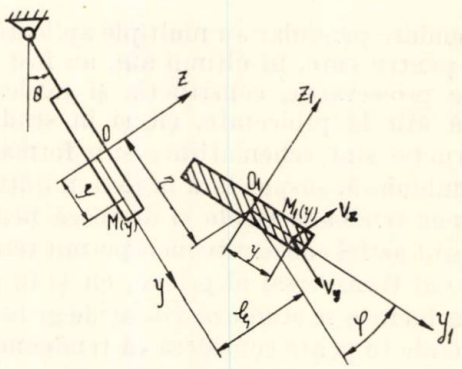


Fig. 2

țial confundat cu Oyz — se deplasează în poziția $O_1y_1z_1$ (fig. 2). În consecință, grinda este solicitată la încovoiere, în cele două plane longitudinale de simetrie, și la răsucire.

Ecuațiile mișcării vibratorii de încovoiere-răsucire a grinzii, ce apare în timpul oscilației pendulare laterale a tendoanelor, considerate solidare cu secțiunile extreme ale acesteia, se pot obține cu ajutorul ecuațiilor lui Lagrange. Pentru aceasta, se consideră pe axa Oy a secțiunii transversale un punct M situat la distanța y de origine (fig. 2). La un moment dat,

cînd tendonul se află rotit cu unghiul θ, ca urmare a deplasărilor și rotirii secțiunii, punctul M ocupă poziția M_1 și are vitezele

$$V_z = \zeta' + y\,\varphi' + l\theta' + (\eta + y\cos\varphi)\theta' \tag{1}$$

și

$$V_y = \eta' - (\zeta + y\,\sin\,\varphi)\;\theta',$$

respectiv după direcțiile axelor mobile Oy și Oz. În aceste relații, ca de altfel în întreaga lucrare, accentele reprezintă derivata în raport cu timpul. Deoarece unghiul de răsucire în general este mic, relațiile (1) se mai pot scrie :

$$\begin{aligned} V_z &= \zeta' + (l + \eta)\;\theta' + y(\theta' + \varphi'), \\ V_y &= \eta' - \zeta\theta'. \end{aligned} \tag{2}$$

Energia cinetică a grinzii este

$$T = \int_0^L \frac{m}{2}(V_z^2 + V_y^2)\,\mathrm{d}x = \frac{m}{2}\int_0^L [\eta' - \zeta\theta']^2\,\mathrm{d}x + \frac{m}{2}\int_0^L [(l+\eta)\theta']^2\,\mathrm{d}x + \tag{3}$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^L (\zeta')^2\mathrm{d}x + \frac{J}{2}\int_0^L (\theta' + \varphi')^2\mathrm{d}x + m\int_0^L (l + \eta)\theta'\zeta'\mathrm{d}x,$$

unde m și J reprezintă masa, respectiv momentul de inerție mecanic, ale unității de lungime de grindă.

Energia potențială se exprimă cu ajutorul relației

$$W = \frac{EI_z}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{EI_y}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \tag{4}$$

$$+\frac{GI_d}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x + mgl\int_0^L (1 - \cos\theta)\,\mathrm{d}x$$

în care s-a notat cu :

E și G — modulul de elasticitate longitudinal, respectiv transversal al materialului din care este confecționată grinda,
g — accelerația gravitației,
I_y și I_z — momentele de inerție axiale ale secțiunii transversale în raport cu axele Oy și Oz,
I_d — momentul de inerție redus al secțiunii transversale,
l — lungimea tendonului (fig. 1), și
L — lungimea grinzii.

Deplasările η, ζ și φ sînt funcții atît de abscisa x, cît și de timpul t; ele pot fi exprimate sub forma unor serii, fiecare termen al acestora fiind produsul a două funcții — una depinzînd numai de x, iar cealaltă numai de t. Întrucît tendoanele au fost considerate rigide și solidare cu secțiunile transversale extreme ale grinzii, funcțiile de x — care trebuie să îndeplinească condițiile la limite rezultate din modul de rezemare al acesteia — pot fi exprimate prin funcția $\sin \frac{n \pi x}{L}$, unde n reprezintă numărul de extreme produse pe lungimea L. Considerînd că fiecare serie are N termeni, deplasările η, ζ și φ se scriu:

$$\eta(x, t) = \sum_1^N u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$\zeta(x, t) = \sum_1^N v_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{5}$$

$$\varphi(x, t) = \sum_1^N w_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Înlocuind aceste expresii în relațiile (3) și (4) rezultă:

$$T = \frac{mL}{4}\left[\left(\sum_1^N u_n'\right)^2 + \left(\sum_1^N v_n'\right)^2\right] + \frac{JL}{4}\left(\sum_1^N w_n'\right)^2 + \frac{L}{2}\Big[ml^2 + J + 2l\,\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sum_1^N u_n\Big](\theta')^2 + \frac{mL}{4}\left[\left(\sum_1^N u_n\right)^2 + \left(\sum_1^N v_n\right)^2\right](\theta')^2 + \frac{mL}{2}\left[\sum_1^N u_n \cdot \sum_1^N v_n' - \sum_1^N u_n' \cdot \sum_1^N v_n\right]\theta' + \frac{L}{n\pi}[1-(-1)^n]\left[ml\sum_1^N v_n' + J\sum_1^N w_n'\right]\theta', \tag{6}$$

$$W = \frac{n^4\pi^4 EI_z}{4L^3}\left(\sum_1^N u_n\right)^2 + \frac{n^4\pi^4 EI_y}{4L^3}\left(\sum_1^N v_n\right) + \frac{n^2\pi^2 GI_d}{4L}\left(\sum_1^N w_n\right)^2 + mglL(1 - \cos\theta).$$

Păstrînd un singur termen al seriilor (5), și anume cel de ordinul n, și aplicînd ecuațiile lui Lagrange rezultă următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$u_n'' + \frac{n^4\pi^4 EI_z}{mL^4} u_n = 2v_n'\theta' + v_n\theta'' + \left[2l\,\frac{1-(-1)^n}{n\pi} + u_n\right](\theta')^2,$$

$$v_n'' + \frac{n^4\pi^4 EI_y}{mL^4} v_n + \frac{2l}{n\pi}[1-(-1)^n]\theta'' = v_n(\theta')^2 - 2u_n'\theta' - u_n\theta'',$$

$$w_n'' + \frac{n^2\pi^2 GI_d}{JL^2} w_n + \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\theta'' = 0, \tag{7}$$

$$2\left(l^2 + \frac{J}{m}\right)\theta'' + 2gl\sin\theta + \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\left(lv_n'' + \frac{J}{m}w_n''\right) =$$

$$= u_n''v_n - u_nv_n'' - [(u_n^2 + v_n^2)\,\theta']' - \frac{4l}{n\pi}[1-(-1)^n](u_n\,\theta')'.$$

Ecuațiile neliniare (7) alcătuiesc un sistem care descrie mișcarea vibratorie de încovoiere-răsucire a grinzii produsă în timpul oscilației pendulare laterale a acesteia, în jurul liniei reazemelor. Întrucît integrarea sistemului (7) este destul de dificilă, în prima parte a prezentei lucrări, acest sistem va fi simplificat renunțîndu-se la toți termenii neliniari care conțin funcțiile u_n, v_n și w_n sau derivatele acestora. Justificarea acestei simplificări constă în aceea că deformațiile η, ζ și φ fiind mici, produsele funcțiilor u_n, v_n și w_n sau ale derivatelor acestora cu derivata întîia sau a doua a rotirii θ, precum și produsele funcțiilor respective cu derivatele lor, sînt neglijabile în comparație cu termenii liniari ai ecuațiilor (7). Procedînd astfel sistemul (7) devine:

$$\begin{aligned}
&u_n'' + \frac{n^4\pi^4 EI_z}{mL^4} u_n = \frac{2l}{n\pi}[1-(-1)^n](\theta')^2,\\
&v_n'' + \frac{n^4\pi^4 EI_y}{mL^4} v_n + \frac{2l}{n\pi}[1-(-1)^n]\theta'' = 0,\\
&w_n'' + \frac{n^2\pi^2 GI_d}{JL^2} w_n + \frac{2l}{n\pi}[1-(-1)^n]\theta'' = 0,\\
&\left(l^2 + \frac{J}{m}\right)\theta'' + gl\theta + \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]\left(l\,v_n'' + \frac{J}{m}w_n''\right) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Se observă că sistemul (8) conține o singură ecuație neliniară, celelalte trei sînt liniare și omogene.

Dacă se face schimbarea de variabilă,

$$\bar{t} = t\sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{9}$$

iar funcţiile u_n, v_n şi w_n se scriu sub formă adimensională cu ajutorul relaţiilor:

$$u_n = \frac{\pi l}{2}\bar{u}_n; \quad v_n = \frac{\pi l}{2}\bar{v}_n; \quad w_n = \frac{\pi}{2}\bar{w}_n; \quad \theta = \frac{\pi}{2}\bar{\theta}, \tag{10}$$

sistemul (8) se scrie:

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_n'' + \beta_y^2\bar{u}_n = \left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right](\bar{\theta}')^2,\\
&\bar{v}_n'' + \beta_z^2\bar{v}_n + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\bar{\theta}'' = 0,\\
&\bar{w}_n'' + \beta_x^2\bar{w}_n + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\bar{\theta}'' = 0,\\
&\frac{1}{2}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\left(\bar{v}_n'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}_n''\right) + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}'' + \frac{\pi}{2}\bar{\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

În acest sistem au fost utilizate notaţiile:

$$\beta_x^2 = \frac{n^2\pi^2 lGI_d}{JgL^2}; \quad \beta_y^2 = \frac{n^4\pi^4 lEI_z}{mgL^4}, \quad \beta_z^2 = \frac{n^4\pi^4 lEI_y}{mgL^4}. \tag{12}$$

Fiecare ecuaţie a sistemului (11) conţine cîte un termen ce are ca factor expresia $\frac{1}{n}[1-(-1)^n]$. Pentru valori impare ale lui n paranteza este egală cu doi, iar pentru valori pare ea se anulează; în consecinţă, factorul respectiv devine $\frac{2}{n}$ (care tinde către zero cînd $n\to\infty$) sau zero. Cea mai mare valoare a acestui factor este 2 şi are loc pentru $n = 1$, ceea ce corespunde modului fundamental de vibraţie.

Din aceste considerente rezultă că pentru modurile de vibraţie de ordin par, adică antisimetrice, ecuaţiile (11) se decuplează, iar oscilaţiile de încovoiere şi de răsucire se produc independent unele de altele şi nu sînt afectate de oscilaţia pendulară a grinzii. Cuplarea oscilaţiilor elastice cu cele pendulare are loc numai pentru modurile simetrice (adică pentru n impar), factorul de cuplaj crescînd invers proporţional cu n.

Așadar, pentru primul mod de vibrație, sistemul (11) devine:

$$\begin{aligned}
&\bar{u}'' + \beta_y^2 \bar{u} = 2(\theta')^2,\\
&\bar{v}'' + \beta_z^2 \bar{v} + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}'' = 0,\\
&\bar{w}'' + \beta_x^2 \bar{w} + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}'' = 0,\\
&\bar{v}'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}'' + \frac{\pi}{2}\bar{\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

În cele ce urmează se studiază soluția acestui sistem atît pentru regimul staționar de vibrație, cît și în cazul rezonanței.

2. SOLUȚIA PERIODICĂ A SISTEMULUI

Pentru rezolvarea acestui sistem se aleg soluții de forma:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \epsilon\bar{u}_1 + \epsilon^2\bar{u}_2 + \epsilon^3\bar{u}_3 + \ldots,\\
\bar{v} &= \epsilon\bar{v}_1 + \epsilon^2\bar{v}_2 + \epsilon^3\bar{v}_3 + \ldots,\\
\bar{w} &= \epsilon\bar{w}_1 + \epsilon^2\bar{w}_2 + \epsilon^3\bar{w}_3 + \ldots,\\
\bar{\theta} &= \epsilon\bar{\theta}_1 + \epsilon^2\bar{\theta}_2 + \epsilon^3\bar{\theta}_3 + \ldots
\end{aligned} \tag{14}$$

unde ϵ este un parametru mic arbitrar. Înlocuind în ecuațiile (13) și identificînd termenii în ϵ rezultă sistemul:

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_1'' + \beta_y^2 \bar{u}_1 = 0,\\
&\bar{v}_1'' + \beta_z^2 \bar{v}_1 + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_1'' = 0,\\
&\bar{w}_1'' + \beta_x^2 \bar{w}_1 + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_1'' = 0,\\
&\bar{v}_1'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}_1'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_1'' + \frac{\pi}{2}\bar{\theta}_1 = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Prima ecuație a sistemului (15) este independentă de celelalte trei; ea admite soluția

$$\bar{u}_1 = A\cos(\beta_y \bar{t} - \Psi), \tag{16}$$

unde A și Ψ sînt constante.

Ultimele trei ecuații (15) alcătuiesc un sistem omogen avînd soluțiile:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= B\cos(r\bar{t} - \Phi), \\ \bar{w}_1 &= C\cos(r\bar{t} - \Phi), \\ \bar{\theta}_1 &= D\cos(r\bar{t} - \Phi), \end{aligned} \tag{17}$$

în care B, C, D și Φ sînt constante arbitrare, iar r se determină din condiția de compatibilitate a sistemului algebric omogen, rezultat din înlocuirea soluțiilor (17) în ecuațiile (15):

$$\begin{vmatrix} r^2 - \beta_z^2 & 0 & \frac{4}{\pi} r^2 \\ 0 & r^2 - \beta_x^2 & \frac{4}{\pi} r^2 \\ r^2 & \frac{J}{ml^2} r^2 & \frac{\pi}{2}\left[\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right) r^2 - 1\right] \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Identificînd termenii în ϵ^2 din ecuațiile (13), scrise explicit cu ajutorul soluțiilor (14), și ținînd seamă de ultima relație (17), rezultă sistemul:

$$\begin{aligned} &\bar{u}_2'' + \beta_y^2 \bar{u}_2 = 2D^2 r^2 \sin^2(r\bar{t} - \Phi), \\ &\bar{v}_2'' + \beta_z^2 \bar{v}_2 + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2'' = 0, \\ &\bar{w}_2'' + \beta_x^2 \bar{w}_2 + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2'' = 0, \\ &\bar{v}_2'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}_2'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_2'' + \frac{\pi}{2}\bar{\theta}_2 = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Prima ecuație are soluția :

$$\bar{u}_2 = \frac{D^2 r^2}{\beta_y^2}\left[1 + \frac{\beta_y^2}{4r^2 - \beta_y^2}\cos 2\,(r\bar{t} - \Phi)\right], \tag{20}$$

iar celelalte trei alcătuiesc un sistem ce admite soluții de forma (17) dar avînd alte constante de integrare. Întrucît soluția (20) conține constanta pin prima aproximație la puterea a doua, se poate presupune că și soluțiile ecuațiilor omogene (19) au constantele egale cu pătratele constantelor din prima aproximație. Aceasta revine la a scrie :

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= B^2 \cos\,(r\bar{t} - \Phi), \\ \bar{w}_2 &= C^2 \cos\,(r\bar{t} - \Phi), \\ \bar{\theta}_2 &= D^2 \cos\,(r\bar{t} - \Phi). \end{aligned} \tag{21}$$

Procedînd în mod similar pentru termenii în ξ^3, rezultă :

$$\begin{aligned} \bar{u}_3 &= \frac{2D^3 r^2}{\beta_y^2}\left[1 + \frac{\beta_y^2}{4r^2 - \beta_y^2}\cos 2\,(r\bar{t} - \Phi)\right], \\ \bar{v}_3 &= B^3 \cos\,(r\bar{t} - \Phi), \\ \bar{w}_3 &= C^3 \cos\,(r\bar{t} - \Phi), \\ \bar{\theta} &= D^3 \cos\,(r\bar{t} - \Phi). \end{aligned} \tag{22}$$

Atît din relația (20), cît și din prima relație (22) rezultă că pentru $\beta_y = 2r$, amplitudinea vibrației de încovoiere din planul Oxy, devine infinită, deci are loc rezonanța.

3. SOLUȚIA SISTEMULUI PENTRU REGIMUL DE REZONANȚĂ

În condițiile unui regim de vibrație nestaționar amplitudinile A, B, C și D ale soluțiilor (16) și (17) numai sînt constante în timp. De aceea pentru rezolvarea sistemului (13) se vor considera soluții de forma :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A\cos\,(\beta_y \bar{t} - \Phi) + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \ldots, \\ \bar{v} &= B\cos\,(r\bar{t} - \Phi) + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \ldots, \\ \bar{w} &= C\cos\,(r\bar{t} - \Phi) + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \ldots, \\ \bar{\theta} &= D\cos\,(r\bar{t} - \Phi) + \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3 + \ldots, \end{aligned} \tag{23}$$

în care cantităţile A, B, C, D, şi Φ reprezintă parametrii variaţionali ce descriu modificările de lungă perioadă ale formei de undă a principalelor armonice ale soluţiei, iar cantităţile $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ etc., arată corectările suplimentare ce depind de armonicile superioare ale soluţiei.

Ţinînd seama de faptul că parametrii variaţionali sînt funcţii de timp, prin înlocuirea soluţiilor (23) în ecuaţiile (13) rezultă următorul sistem :

$$
\begin{aligned}
&[A'' + 2\beta_y A\Psi' - A(\Psi')^2]\cos(\beta_y\bar{t} - \Psi) - [2A'(\beta_y - \Psi') - \\
&- A\Psi'']\sin(\beta_y\bar{t} - \Psi) + \epsilon(\bar{u}_2'' + \beta_y^2\bar{u}_2) + \epsilon^2(\bar{u}_3'' + \beta_y^2\bar{u}_3) = \\
&= 2\epsilon[D'\cos(r\bar{t} - \Phi) - D(r - \Phi')\sin(r\bar{t} - \Phi)]^2 + \\
&+ 4\epsilon^2[D'\cos(r\bar{t} - \Phi) - D(r - \Phi')\sin(r\bar{t} - \Phi)]\bar{\theta}_2', \\
&\left[B'' + \frac{4}{\pi}D'' + \left(B + \frac{4}{\pi}D\right)(2r - \Phi')\Phi'\right]\cos(r\bar{t} - \Phi) - \\
&-\left[2(r - \Phi')\left(B' + \frac{4}{\pi}D'\right) - \Phi''\left(B + \frac{4}{\pi}D\right)\right]\sin(r\bar{t} - \Phi) + \\
&+ \epsilon\left(\bar{v}_2'' + \beta_z^2\bar{v}_2 + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2''\right) + \epsilon^2\left(\bar{v}_3'' + \beta_z^2\bar{v}_3 + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_3''\right) = 0, \\
&\left[C'' + \frac{4}{\pi}D'' + \left(C + \frac{4}{\pi}D\right)(2r - \Phi')\Phi'\right]\cos(r\bar{t} - \Phi) - \qquad (24) \\
&-\left[2(r - \Phi')\left(C' + \frac{4}{\pi}D'\right) - \Phi''\left(C + \frac{4}{\pi}D\right)\right] \times \\
&\times\sin(r\bar{t} - \Phi) + \epsilon\left(\bar{w}_2'' + \beta_x^2\bar{w}_2 + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2''\right) + \epsilon^2\left(\bar{w}_3'' + \beta_x^2\bar{w}_3 + \right. \\
&\left. + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_3''\right) = 0, \\
&\left\{B'' + \frac{J}{ml^2}C'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)D'' + \left[B + \frac{J}{ml^2}C + \frac{\pi}{2}\left(1 + \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + \frac{J}{ml^2}\right)D\right](2r - \Phi')\Phi'\right\}\cos(r\bar{t} - \Phi) - \left\{2(r - \Phi')\left[B' + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{J}{ml^2}C' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)D'\right] - \Phi''\left[B + \frac{J}{ml^2}C + \frac{\pi}{2}\left(1 + \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + \frac{J}{ml^2}\right)D\right]\right\}\sin(r\bar{t} - \Phi) + \epsilon\left[\bar{v}_2'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}_2'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_2''\right] + \\
&+ \epsilon^2\left[\bar{v}_3'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}_3'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_3''\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Se observă că în cazul parametrilor constanți, termenii acestor ecuații, care nu conțin perturbația ϵ, sînt nuli; ceilalți termeni, prin identificarea după puterile lui ϵ, conduc la sistemele de ecuații studiate anterior, cu prilejul obținerii soluțiilor (21) și (22).

Dacă se consideră că derivatele parametrilor variaționali sînt de același ordin de mărime cu perturbația ϵ, neglijînd termenii care conțin puterile lui ϵ și identificînd coeficienții funcțiilor sinus și cosinus din ecuațiile (24), acestea se transformă, respectiv, în următoarele sisteme:

$$\left.\begin{aligned} &A'' + 2\beta_y A\Psi' - A\,(\Psi')^2 = -\epsilon D^2 r^2 \cos\omega,\\ &2A'(\beta_y - \Psi') - A\Psi'' = -\epsilon D^2 r^2 \sin\omega,\\ &\bar{u}_2'' + \beta_y^2 \bar{u}_2 = D^2 r^2, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} &B'' + \frac{4}{\pi} D'' + \left(B + \frac{4}{\pi} D\right)(2r - \Phi')\,\Phi' = 0,\\ &2(r - \Phi')\left(B' + \frac{4}{\pi} D'\right) - \Phi''\left(B + \frac{4}{\pi} D\right) = 0,\\ &\bar{v}_2'' + \beta_z^2 \bar{v}_2 + \frac{4}{\pi}\theta_2'' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} &C'' + \frac{4}{\pi} D'' + \left(C + \frac{4}{\pi} D\right)(2r - \Phi')\,\Phi' = 0,\\ &2\,(r - \Phi')\left(C' + \frac{4}{\pi} D'\right) - \Phi''\left(C + \frac{4}{\pi} D\right) = 0,\\ &w_2'' + \beta_x^2\, \bar{w}_2 + \frac{4}{\pi}\theta_2'' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} &B'' + \frac{J}{ml^2} C'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right) D'' + \left[B + \frac{J}{ml^2} C + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right) D\right](2r - \Phi')\,\Phi' = 0,\\ &2(r - \Phi')\left[B' + \frac{J}{ml^2} C' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right) D'\right] - \Phi''\left[B + \frac{J}{ml^2} C + \right.\\ &\qquad \left. + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right) D\right] = 0,\\ &\bar{v}_2'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}_2'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_2'' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

în care

$$\omega = 2\ (r\tilde{t} - \Phi) - (\beta_v \tilde{t} - \Psi). \tag{29}$$

Aceste sisteme permit studierea soluției (23) în zona de rezonanță care, așa cum s-a arătat mai sus, are loc atunci cînd $2r \to \beta_v$.

Ecuațiile prime ale sistemelor (26), (27) și (28) alcătuiesc un sistem care, după cîteva transformări simple, poate fi adus la forma :

$$\begin{aligned} B'' + B\ (2\ r - \Phi')\Phi' &= 0, \\ C'' + C\ (2\ r - \Phi')\Phi' &= 0, \\ D'' + D\ (2\ r - \Phi')\ \Phi' &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

Procedînd în mod similar cu ecuațiile secunde ale aceloraşi sisteme, rezultă ecuațiile :

$$\begin{aligned} 2\ (r - \Phi')\ B' - \Phi''\ B &= 0, \\ 2\ (r - \Phi')\ C' - \Phi''\ C &= 0, \\ 2\ (r - \Phi')\ D' - \Phi''\ D &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Întrucît ecuațiile (25), (26), (27) și (28) provin din acelaşi sistem, sistemul (24), ecuațiile (30) și (31) pot fi regrupate în următoarele trei sisteme :

$$\begin{aligned} 2\ (r - \Phi')\ B' - \Phi''\ B &= 0, \\ B'' + B\ (2r - \Phi')\ \Phi' &= 0\,; \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} 2\ (r - \Phi')\ C' - \Phi''\ C &= 0, \\ C'' + C\ (2r - \Phi')\ \Phi' &= 0\,; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} 2\ (r - \Phi')\ D' - \Phi''\ D &= 0, \\ D'' + D\ (2r - \Phi')\ \Phi' &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Aceste ecuații variaționale sînt echivalente cu sistemul :

$$\begin{aligned} B' &= 0, \\ C' &= 0, \\ D' &= 0, \\ \Phi' &= 0, \end{aligned} \tag{35}$$

din care rezultă

$$B = B_0,\ C = C_0,\ D = D_0,\ \Phi = \Phi_0, \tag{36}$$

unde B_0, C_0, D_0 și Φ_0 sînt constante.

Sistemul variațional alcătuit din primele două ecuații (25) este echivalent cu relațiile :

$$A' = -\frac{\epsilon D^2 r^2}{2r + \beta_y} \sin \omega,$$

$$\psi' = -\frac{\epsilon D^2 r^2}{A(2r + \beta_y)} \cos \omega. \tag{37}$$

Folosind relațiile (29) și (37) și ținînd seama de ultima ecuație (35), rezultă sistemul autonom :

$$\frac{d\omega}{d\bar{t}} = (2r - \beta_y) - \frac{\epsilon D^2 r^2}{A(2r + \beta_y)} \cos \omega, \tag{38}$$

$$\frac{dA}{d\bar{t}} = -\frac{\epsilon D^2 r^2}{2r+\beta_y} \sin \omega,$$

care conține numai variabilele A și ω. După eliminarea lui $\bar{t}$ acest sistem este complet integrabil. Împărțind cele două relații (38) rezultă ecuația

$$\left[(2r - \beta_y) A - \frac{\epsilon D^2 r^2}{2r + \beta_y} \cos \omega\right] dA + \frac{\epsilon D^2 r^2}{2r + \beta_y} A \sin \omega \, d\omega = 0, \tag{39}$$

care are integrala :

$$(2r - \beta_y) \frac{A^2}{2} - 2A \frac{\epsilon D^2 r^2}{2r + \beta_y} \cos \omega = \mathscr{C}, \tag{40}$$

unde $\mathscr{C}$ este constanta de integrare. Eliminînd variabila ω între prima ecuație (37) și ecuația (40) rezultă relația

$$d\bar{t} = \frac{-4A dA}{\sqrt{16 A^2 \left(\frac{\epsilon D^2 r^2}{2r + \beta_y}\right)^2 - [(2r-\beta_y) A^2 - 2\mathscr{C}]^2}}, \tag{41}$$

care, prin integrare, devine

$$t - t_0 =$$

$$= -2 \int \frac{d(\epsilon A)^2}{\sqrt{-(2r - \beta_y)^2 (\epsilon A)^4 + \left[\frac{(2\epsilon Dr)^4}{(2r+\beta_y)^2} + 4(2r - \beta_y) \epsilon^2 \mathscr{C}\right] (\epsilon A)^2 - 4\epsilon^4 \mathscr{C}^2}}. \tag{42}$$

Efectuînd integrala rezultă relaţia

$$\in A = \frac{1}{2r - \beta_y} \sqrt{-\frac{2\in^2 D^2 r^2}{2r + \beta_y} \sqrt{\frac{(2\in D r)^4}{(2r + \beta_y)^2} + 8 (2r - \beta_y) \in^2 \mathscr{C}}} \times$$

$$\times \sin \frac{2r - \beta_y}{2} (\bar{t} - \bar{t}_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{(2\in Dr)^4}{(2r+\beta_y)^2} + 4 (2r - \beta_y) \mathscr{C} \in^2 \right], \quad (43)$$

care reprezintă ecuaţia înfăşurătoarei oscilaţiilor de încovoiere ale grinzii, în planul Oxy.

Se observă că pentru $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\min}$, unde $\mathscr{C}_{\min}$ are expresia

$$\mathscr{C}_{\min} = - \frac{2\in^2 D^4 r^4}{(2r + \beta_y) (4r^2 - \beta_y^2)}, \quad (44)$$

amplitudinea $\in A$ devine independentă de timp şi are valoarea

$$\in A = \frac{2\in^2 D^2 r^2}{4r^2 - \beta_y^2}. \quad (45)$$

Deci, pentru această valoare a constantei $\mathscr{C}$, vibraţiile grinzii devin staţionare.

Ecuaţia înfăşurătoarei oscilaţiilor este definită pentru orice valoare a lui $\mathscr{C} > \mathscr{C}_{\min}$. Amplitudinea acestei înfăşurători este maximă pentru $\mathscr{C} = 0$ şi corespunde curbei de ecuaţie

$$\in A = \frac{4\in^2 D^2 r^2}{4r^2 - \beta_y^2} \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 - \sin \frac{2r - \beta_y}{2} (\bar{t} - \bar{t}_0). \right]} \quad (46)$$

Funcţia $\in A\ (\bar{t})$, descrisă de relaţia (46), se anulează pentru

$$\bar{t} - \bar{t}_0 = \frac{(4K + 1)\pi}{2r - \beta_y} \qquad (K = 0, 1, 2, 3 \ldots), \quad (47)$$

ceea ce conduce la constatarea că la $\mathscr{C} = 0$ au loc bătăi. Intervalul de timp scurs între două anulări consecutive ale amplitudinei $\in A$, reprezintă perioada bătăilor şi are valoarea

$$T = \frac{4\pi}{2r - \beta_y}. \quad (48)$$

Înfășurătorile tipice ale oscilațiilor grinzii, date de relația (43), sînt reprezentate în figura 3. Ecuația (46), corespunzătoare înfășurătoarei de amplitudine maximă, precum și oscilațiile de încovoiere modulate de aceasta, a fost reprezentată grafic în figura 4 pentru o grindă reală [2],

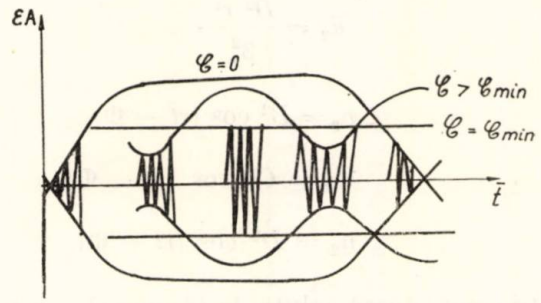


Fig. 3

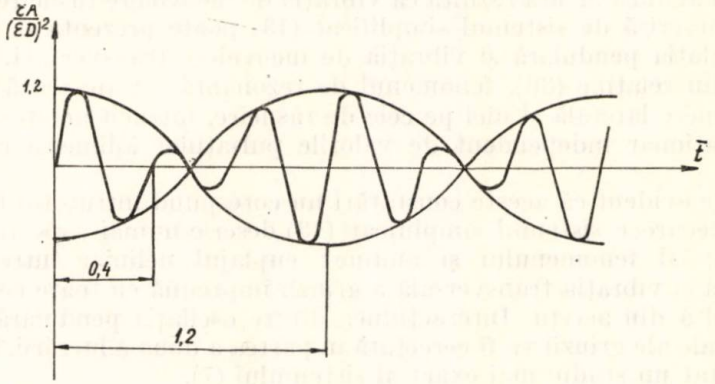


Fig. 4

caracterizată de rapoartele adimensionale : $\frac{b}{h}=\frac{1}{40}, \frac{b}{l}=\frac{1}{50}, \frac{l}{L}=\frac{5}{80}$.
Acestei grinzi îi corespund următoarele valori ale pulsațiilor adimensionale :

$$\beta_x^2 = 4\, n^2\, \pi^2\, \frac{G}{\gamma L}\left(\frac{b}{h}\right)^2\left(\frac{l}{L}\right) = 200,$$

$$\beta_y^2 = \frac{n^4\, \pi^4}{12}\,\frac{E}{\gamma L}\left(\frac{b}{l}\right)^2\left(\frac{l}{L}\right)^3 = 426, \qquad (49)$$

$$\beta_z^2 = \frac{n^4\, \pi^4}{12}\,\frac{E}{\gamma L}\left(\frac{b/l}{b/h}\right)^2\left(\frac{l}{L}\right)^3 = 0{,}263,$$

$$r^2 = 249\ ,$$

care conduc la constatarea că perioada bătăilor este de trei ori mai mare decît perioada oscilaţiei.

Ultimele ecuaţii ale sistemelor (25), (26), (27) şi (28) alcătuiesc un sistem asemănător ca formă cu sistemul (19). Acesta are soluţiile :

$$\bar{u}_2 = \frac{D^2 r^2}{\beta_y^2},$$

$$\bar{v}_2 = B^2 \cos (r\bar{t} - \Phi),$$

$$\bar{w}_2 = C^2 \cos (r\bar{t} - \Phi), \tag{50}$$

$$\bar{\theta}_2 = D^2 \cos (r\bar{t} - \Phi).$$

Aceste relaţii completează soluţia la rezonanţă a sistemului (13) care, cu suficientă acurateţe, poate fi limitată la primii doi termeni ai seriilor (23).

Din analiza făcută rezultă că vibraţia de încovoiere-răsucire a grinzii-pendul, descrisă de sistemul simplificat (13) poate prezenta o rezonanţă între oscilaţia pendulară şi vibraţia de încovoiere transversală. Aşa cum rezultă din relaţiile (36), fenomenul de rezonanţă nu afectează vibraţiile de încovoiere laterală şi nici pe cele de răsucire, întrucît acestea au loc în regim staţionar independent de valorile pulsaţiilor adimensionale r, β_x, β_y şi β_z.

Este evident că aceste constatări nu corespund întrutotul fenomenului real deoarece sistemul simplificat (13) descrie numai aspectul cel mai important al fenomenului şi anume : cuplajul neliniar între oscilaţia pendulară şi vibraţia transversală a grinzii împreună cu toate consecinţele care rezultă din acesta. Interacţiunea dintre oscilaţia pendulară şi vibraţiile laterale ale grinzii va fi cercetată în partea a doua a lucrării, în care va fi prezentat un studiu mai exact al sistemului (7).

Primită la redacţie la 13 martie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. Buzdugan, Gh., Segal, H., Blumenfeld, M., Petre, A., Cosac,., Dumitrescu E., Minca, I., *Studii experimentale de tensometrie şi vibraţii asupra unor grinzi rulante suspendate*, Construcţia de maşini, *6—7* (1965).
2. Cosac, V., *Studiul oscilaţiilor grinzilor pendulare (suspendate) continue sub acţiunea forţelor perturbatoare*, Teză de doctorat, Institutul politehnic, Bucureşti, 1972.
3. Drobota, V., *Studiul stabilităţii elastice a grinzilor continue pendulare încărcate cu sarcini transversale*. Teză de doctorat. Institutul politehnic Bucureşti, 1965.
4. Drobota, V., *Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare*, Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, *5* (1966).
5. Sevin, E., *On the Parametric Excitation of Pendulum-Type Vibration Absorber*, Journal of Applied Mechanics, *3* (1961).
6. Struble, R. A., Heinbockel, J. H., *Energy Transfer in a Beam-Pendulum System*, Journal of Applied Mechanics, *3* (1962).
7. Struble, R. A., Heinbockel, J. H., *Resonant Oscillations of a Beam-Pendulum System*, Journal of Applied Mechanics, *2* (1963).

STĂRI DE TENSIUNE ÎN TEORIA PLĂCILOR CURBE DE MICĂ CURBURĂ. I

de C. STĂNESCU şi V. VISARION
Centrul de mecanică a solidelor

Sistemul de ecuaţii, relativ simplu, al teoriei plăcilor curbe de mică curbură permite aplicarea, fără dificultăţi principiale deosebite, a metodei integrării asimptotice a ecuaţiilor cu derivate parţiale conţinînd un parametru mic şi deducerea pe această cale a stărilor de tensiune.
Metoda integrării asimptotice este utilizată sub forma axiomatizată propusă în lucrarea [1], generalizînd rezultatele deduse de A. L. Goldenweizer [2], [4].

1. SISTEMUL DE ECUAŢII AL TEORIEI PLĂCILOR CURBE DE MICĂ CURBURĂ

Dacă ne limităm la cazul unei încărcări exterioare normale Z se arată [2], [3] că sistemul de ecuaţii al acestei teorii este[1])

$$\begin{aligned} L(c) - \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta w + Z = 0, \\ L(w) + \frac{1}{2Eh}\Delta\Delta c = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Operatorul L este definit astfel :

$$L = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{AR_2'}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{R_{12}}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{BR_1'}\frac{\partial}{\partial\beta}\right), \tag{1.2}$$

iar Δ este operatorul lui Laplace în coordonatele curbilinii α, β avînd forma următoare :

$$\Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]. \tag{1.3}$$

[1]) Notaţiile folosite sînt cele din monografia [1].

Determinînd din sistemul (1.1) funcţia de tensiune $c\ (\alpha, \beta)$ şi deplasarea normală $w\ (\alpha, \beta)$, eforturile tangenţiale N_α, N_β, $N_{\alpha\beta}$ se deduc cu ajutorul relaţiilor

$$N_\alpha = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial c}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\alpha},$$

$$N_\beta = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial c}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial c}{\partial\beta}, \tag{1.4}$$

$$N_{\alpha\beta} = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial c}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\beta}\right).$$

Din relaţiile constitutive

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2Eh}(N_\alpha - \nu N_\beta); \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2Eh}(N_\beta - \nu N_\alpha), \qquad \omega = \frac{1+\nu}{Eh}N_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

rezultă componentele tangenţiale ale deformaţiei şi din sistemul

$$\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v = \varepsilon_1 + \frac{w}{R_1'}; \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u = \varepsilon_2 + \frac{w}{R_2'},$$

$$\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right) = \omega - \frac{2w}{R_{12}} \tag{1.6}$$

se obţin componentele tangenţiale u, v ale deplasării.

Acest sistem este compatibil, condiţia de compatibilitate coincizînd cu ultima ecuaţie (1.1).

Formulele

$$\gamma_1 = -\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}; \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} \tag{1.7}$$

şi

$$\varkappa_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta},$$

$$\varkappa_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}, \tag{1.8}$$

$$\tau = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right),$$

determină unghiurile de rotire γ_1, γ_2 și componentele de încovoiere $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ ale deformației.

Momentele sînt date de

$$M_\alpha = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2); \qquad M_\beta = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1)$$
$$M_{\alpha\beta} = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\tau, \tag{1.9}$$

iar din relațiile

$$Q_\alpha = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\Delta w); \qquad Q_\beta = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(\Delta w) \tag{1.10}$$

deducem eforturile tăietoare.

2. DEZVOLTĂRI ASIMPTOTICE

O funcție necunoscută oarecare (efort, moment, componentă a vectorului deplasare sau a deformației etc.) va fi notată cu F. Evident, F depinde atît de variabilele α, β, cît și de parametrul mic h (semigrosimea plăcii curbe).

Aplicînd axiomatizarea introdusă în [1] vom considera pentru necunoscuta F o dezvoltare asimptotică de forma

$$F(\alpha,\ \beta;\ h) = h^{q(F)}(F^{(0)} + h^{a_1}F^{(1)} + h^{a_2}F^{(2)} + \ldots), \tag{2.1}$$

unde $q\,(F)$ este o constantă atașată funcției F denumită indicele de intensitate al funcției, $F^{(k)}$ este funcția de ordin k, iar numerele reale, pozitive și crescătoare $a_1, a_2, \ldots$, sînt indicii de ordine.

Referitor la derivatele parțiale ale acestei funcții admitem că satisfac relația

$$\frac{\partial^{m+n}F}{\partial\alpha^m\,\partial\beta^n} \sim h^{-(mp+nq)}F, \tag{2.2}$$

unde p și q sînt constante reale pozitive denumite *indici de variație*. Semnul de echivalență „ $\sim$ ” între două funcții avînd dezvoltări asimptotice de forma (2.1), înseamnă numai faptul că ele au același indice de intensitate. Prin urmare, funcția F avînd indicele de intensitate $q\,(F)$, derivata sa mixtă $\partial^{m+n}F/\partial\alpha^m\,\partial\beta^n$ are indicele de intensitate $q(F) - mp - nq$. Prin definiție, spunem că o funcție care satisface relațiile (2.2) face parte din stare de tensiune (p, q).

Introducem noile variabile

$$\xi = h^{-p}\alpha; \qquad \eta = h^{-q}\beta, \tag{2.3}$$

care sînt denumite *variabilele proprii* ale stării de tensiune (p, q). Efectuînd schimbarea de variabile (2.3), relaţia (2.2) devine

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial \xi^m \partial \eta^n} \sim F, \tag{2.4}$$

adică faţă de variabilele proprii orice stare de tensiune are indici nuli de variaţie. Pentru o stare de tensiune cu indici de variaţie (p, q) cunoscuţi, funcţiile de ordine $F^{(k)}$ din dezvoltarea (2.1) depind numai de variabile proprii ξ, η ale acestei stări.

În ecuaţiile (1.1), precum şi în formulele de calcul care au fost date, intervin ca factori, pe lîngă funcţiile necunoscute, funcţii cunoscute depinzînd de coeficienţii primei şi celei de a doua forme fundamentale. Vom nota cu $\Phi(\alpha, \beta)$ o astfel de funcţie cunoscută şi vom presupune că ea are indici nuli de variaţie.

Dacă ne limităm la studiul stărilor de tensiune pentru care unul din indicii de variaţie este nul (de exemplu $q = 0$), conform cu (2.3) rezultă variabilele proprii stării de tensiune $(p, 0)$

$$\xi = h^{-p}\alpha, \qquad \eta = \beta. \tag{2.5}$$

În acest caz

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Phi(h^p \xi, \beta),$$

şi dezvoltînd această funcţie în serie Taylor, obţinem

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha_0, \beta) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} h^p(\xi - \xi_0) + \ldots \tag{2.6}$$

Evident, coeficienţii dezvoltării depind de variabila β care are rolul unui parametru.

Ecuaţia $\alpha = \alpha_0$ (deci $\alpha_0 = h^p \xi_0$), în vecinătatea căreia s-a dezvoltat funcţia Φ, corespunde unei curbe de pe suprafaţa mediană care generează o alteraţie. Această curbă poate coincide cu o porţiune a marginei plăcii curbe sau cu o linie de discontinuitate a sarcinilor exterioare aplicate pe placă.

Pentru starea de tensiune cu indicii de variaţie nuli $(p = q = 0)$, după cum rezultă din (2.3) variabilele proprii ale acestei stări coincid cu variabilele iniţiale α, β. Funcţia cunoscută $\Phi(\alpha, \beta)$ în raport cu variabilele proprii nu mai depinde de parametrul h astfel încît ea nu se mai dezvoltă într-o serie de puteri ale lui h.

În cazul cînd ambii indici de variaţie sînt diferiţi de zero, folosind variabilele proprii (2.3), vom avea

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Phi(h^p \xi, h^q \eta).$$

Dezvoltarea Taylor a acestei funcţii în vecinătatea unui punct ($\alpha_0 = h^p \xi_0$, $\beta_0 = h^q \eta_0$), care fizic poate coincide cu un punct unghiular al conturului plăcii curbe sau cu un punct de alterare interior, va fi

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha_0, \beta_0) + h^p \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=\beta_0}} (\xi - \xi_0) +$$

$$+ h^q \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=\beta_0}} (\eta - \eta_0) + \ldots \tag{2.7}$$

Asemenea stări de tensiune vor fi denumite stări de tensiune de colţ, permiţînd corectarea rezultatelor obţinute de stările cu cel puţin un indice de variaţie nul care introduc perturbări în zonele punctelor unghiulare. Într-o lucrare viitoare va fi prezentat studiul acestor stări de tensiune.

3. STAREA DE TENSIUNE CU INDICI DE VARIAŢIE NULI

Soluţia sistemului (1.1) va fi căutată sub forma

$$c = h^{q(c)}(c^{(0)} + h^{a_1} c^{(1)} + h^{a_2} c^{(2)} + \ldots), \tag{3.1}$$

$$w = h^{q(w)}(w^{(0)} + h^{a_1} w^{(1)} + h^{a_2} w^{(2)} + \ldots).$$

În ipoteza că funcţia cunoscută Z are indici nuli de variaţie, rezultă indicii de intensitate

$$q(c) = 0\,; \; q(w) = q(c) - 1 = -1, \tag{3.2}$$

indicii de ordine

$$a_1 = 1\,; \quad a_2 = 2\,; \ldots, \tag{3.3}$$

precum şi sistemele care determină, în mod iterativ, funcţiile de ordine $c^{(k)}$, $w^{(k)}$ din dezvoltările (3.1).

Sistemul primei aproximaţii este

$$L(c^{(0)}) = -Z\,; \; L(w^{(0)}) = -\frac{1}{2E} \Delta\Delta c^{(0)}, \tag{3.4}$$

iar iteraţia de ordinul $k \geqslant 1$ este determinată de sistemul

$$L(c^{(k)}) = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \Delta\Delta w^{(k-2)}\,; \; L(w^{(k)}) = -\frac{1}{2E} \Delta\Delta c^{(k)}, \tag{3.5}$$

urmînd ca în prima ecuaţie a sistemului (3.5) să considerăm $w^{(j)} = 0$ dacă $j < 0$.

Pentru restul funcţiilor necunoscute dezvoltările asimptotice vor fi de forma (2.1), indicii de ordine fiind daţi de (3.3).

Astfel, din (1.4), ţinînd seama de (3.2), rezultă

$$q(N_\alpha) = q(N_\beta) = q(N_{\alpha\beta}) = 0, \tag{3.6}$$

precum şi funcţiile de ordine $N_\alpha^{(k)}$, $N_\beta^{(k)}$, $N_{\alpha\beta}^{(k)}$ $(k \geqslant 0)$. Formulele care ne dau aceste funcţii sînt analoage relaţiilor (1.4), în locul lui c intervenind funcţia $c^{(k)}$.

Din (1.5) deducem

$$q(\varepsilon_1) = q(\varepsilon_2) = q(\omega) = -1 \tag{3.7}$$

şi

$$\varepsilon_1^{(k)} = \frac{1}{2E}(N_a^{(k)} - \nu N_\beta^{(k)}); \quad \varepsilon_2^{(k)} = \frac{1}{2E}(N_\beta^{(k)} - \nu N_\alpha^{(k)}),$$

$$\omega^{(k)} = \frac{1+\nu}{E} N_{\alpha\beta}^{(k)}, \tag{3.8}$$

iar din (1.6) avem

$$q(u) = q(v) = q(w) = -1, \tag{3.9}$$

precum şi sistemul care determină funcţiile $u^{(k)}$, $v^{(k)}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} v^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)} + \frac{w^{(k)}}{R_1'}, \\
&\frac{1}{B}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} u^{(k)} = \varepsilon_2^{(k)} + \frac{w^{(k)}}{R_2'}, \\
&\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u^{(k)}}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v^{(k)}}{B}\right) = \omega^{(k)} - \frac{2w^{(k)}}{R_{12}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Aplicînd formulele (1.7), (1.8) se deduc indicii de intensitate ai unghiurilor de rotire

$$q(\gamma_1) = q(\gamma_2) = -1 \tag{3.11}$$

şi ai componentelor de încovoiere ale deformaţiei

$$q(\varkappa_1) = q(\varkappa_2) = q(\tau) = -1, \tag{3.12}$$

rezultînd astfel pentru funcţiunile de ordine $\gamma_1^{(k)}$, $\gamma_2^{(k)}$, $\varkappa_1^{(k)}$, $\varkappa_2^{(k)}$, $\tau^{(k)}$ expresii identice cu (1.7), respectiv (1.8) în care apare $w^{(k)}$ în locul lui w.

În baza rezultatului (3.12) din relaţiile (1.9) obţinem

$$q(M_\alpha) = q(M_\beta) = q(M_{\alpha\beta}) = 2, \tag{3.13}$$

precum şi

$$M_\alpha^{(k)} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_1^{(k)} + \nu\varkappa_2^{(k)}); \quad M_\beta^{(k)} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_2^{(k)} + \nu\varkappa_1^{(k)}),$$
$$M_{\alpha\beta}^{(k)} = \frac{2E}{3(1+\nu)}\tau^{(k)}. \tag{3.14}$$

Folosind relaţiile (1.10) determinăm indicii de intensitate ai eforturilor tăietoare

$$q(Q_\alpha) = q(Q_\beta) = q(w) + 3 = 2 \tag{3.15}$$

şi funcţiile de ordine

$$Q_\alpha^{(k)} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\Delta w^{(k)}); \quad Q_\beta^{(k)} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(\Delta w^{(k)}). \tag{3.16}$$

În modul acesta au fost obţinute toate mărimile corespunzătoare stării de tensiune cu indici de variaţie nuli.

În tabela I este prezentat spectrul indicilor de intensitate ai acestei stări.

Tabela I

Element	u	v	w	ε_1	ε_2	ω	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	τ	γ_1	γ_2	N_α	N_β	$N_{\alpha\beta}$	M_α	M_β	$M_{\beta\alpha}$	Q_α	Q_β
Indice intensitate	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	0	2	2	2	2	2

4. ANALIZA STĂRII DE TENSIUNE CU INDICI DE VARIAŢIE NULI

În interaţia de ordinul k, funcţiile necunoscute $c^{(k)}$, $w^{(k)}$ se determină din sistemul de ecuaţii (3.5). Se observă că în ecuaţiile acestui sistem, termenii care figurează în membrul drept sînt cunoscuţi, ei depinzînd de mărimi obţinute în etapele anterioare. Pentru deplasările $u^{(k)}$ şi $v^{(k)}$ sistemul corespunzător este dat de (3.10). Restul necunoscutelor se obţin prin derivare. Vom stabili acum funcţiile arbitrare care intervin în soluţia generală a ecuaţiilor (3.5) şi (3.10) şi condiţiile la limită asociate acestor ecuaţii, care revin deci stării de tensiune cu indici de variaţie nuli.

Pentru sistemul (3.10) soluţia generală este dată de integrala generală a sistemului omogen asociat ($\varepsilon_1^{(k)} = \varepsilon_2^{(k)} = \omega^{(k)} = 0$; $w^{(k)} = 0$) căruia i se adaugă o soluţie particulară a sistemului neomogen. Sistemul omogen

asociat ecuațiilor (3.10) corespunde unei stări cu deformații nule și prin urmare soluția sa este o deplasare rigidă a suprafeței mediane în planul ei tangent. Deplasarea de rigid în direcția normalei va fi conținută în soluția generală a sistemului (3.5).

Vom presupune determinată o soluție particulară a sistemului neomogen (3.5). Atunci soluția lui generală se obține adăugînd soluțiile generale ale ecuațiilor

$$L(c^{(k)}) = 0\,; \quad L(w^{(k)}) = 0. \tag{4.1}$$

Din (4.1) rezultă că proprietățile stării de tensiune cu indici de variație nuli sînt strîns legate de proprietățile integralei generale a ecuației

$$L(\varphi) = 0, \tag{4.2}$$

operatorul liniar L, de ordinul doi, fiind dat de (1.2).

Partea principală a acestui operator, adică suma derivatelor de ordinul cel mai mare, este

$$L' = \frac{B}{A\,R_2'}\,\frac{\partial^2}{\partial\,\alpha^2} + \frac{2}{R_{12}}\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{A}{B\,R_1'}\,\frac{\partial^2}{\partial\,\beta^2} \tag{4.3}$$

și aplicînd metoda dată în [2][1] obținem ecuația diferențială a caracteristicilor operatorului L

$$\frac{A}{B\,R_1'}\,\mathrm{d}\alpha^2 - \frac{2}{R_{12}}\,\mathrm{d}\alpha\;\mathrm{d}\beta + \frac{B}{A\,R_2'}\,\mathrm{d}\beta^2 = 0. \tag{4.4}$$

Dar (4.4) este în același timp și ecuația diferențială a liniilor asimptotice ale suprafeței mediane și prin urmare acestea coincid cu caracteristicile operatorului L.

În consecință, operatorul L va fi de tip eliptic, hiperbolic sau parabolic după cum curbura gaussiană a suprafeței mediane este pozitivă, negativă sau nulă.

Această proprietate determină natura problemelor la limită care intervin în starea de tensiune (0,0) la rezolvarea sistemului (4.1).

În cele ce urmează vom studia caracterul acestei probleme în cîteva cazuri semnificative.

Cazul 1. *Suprafața mediană cu curbură totală pozitivă.* În acest caz nu există asimptote reale pe suprafața mediană și ca atare caracteristicile operatorului L, care intervine în sistemul (4.1), nu sînt reale. Operatorul L, care apare atît în determinarea tensiunilor, cît și a deplasărilor tangențiale, este deci eliptic. Problemele la limită asociate se caracterizează prin cîte o singură condiție pe fiecare curbă închisă care mărginește domeniul ocupat de placa curbă considerată (în sensul problemelor de tip Dirichlet, Neumann etc.) Vor putea fi satisfăcute pe marginea plăcii o condiție în tensiuni și una în deplasări (fig. 1).

[1]) pag. 284.

Restul de două condiţii la limită rămîn a fi satisfăcute de celelalte stări de tensiune.

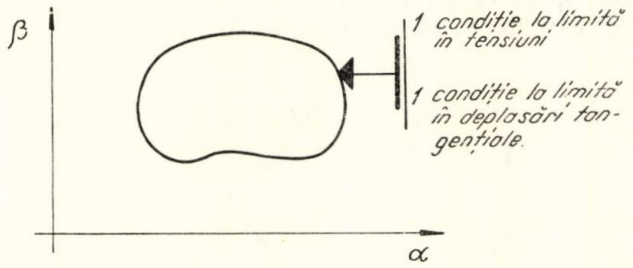


Fig. 1

Cazul 2. *Suprafaţă mediană cu curbură totală negativă.* În acest caz asimptotele suprafeţei mediane şi deci şi caracteristicile operatorului L alcătuiesc două familii distincte de curbe reale. Vom distinge două subcazuri esenţial diferite :

Cazul 2.1. Domeniul este mărginit de patru porţiuni continue de curbă fără puncte de tangenţă cu vreuna dintre liniile asimptotice.

Vom folosi două formulări corecte de probleme pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi de tip hiperbolic.

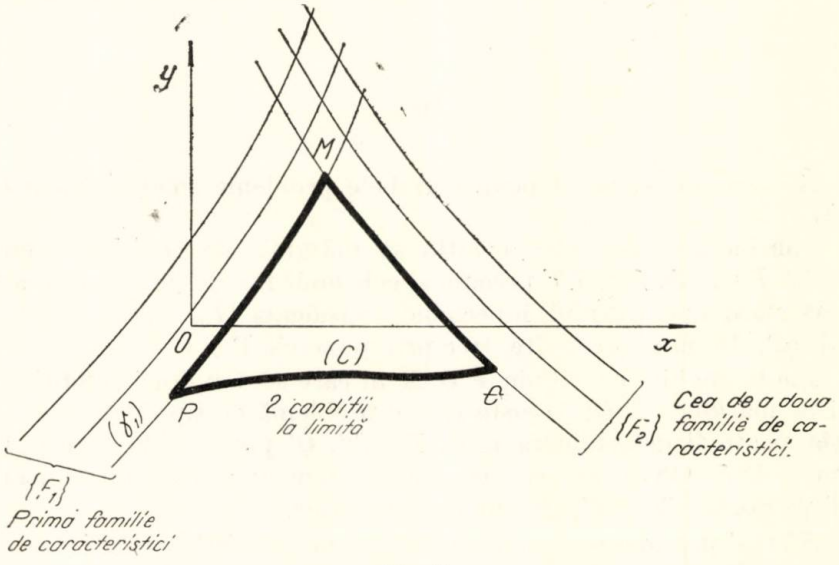


Fig. 2

Prima problemă (P1). Se caută soluţia în domeniul curbiliniu triunghiular delimitat de o porţiune (C) de curbă nicăieri tangentă la vreuna dintre curbele caracteristice, continuă şi cu tangentă continuă şi două curbe (γ_1), (γ_2), caracteristice din familii diferite care trec prin extremităţile porţiunii de curbă menţionate. Soluţia este determinată dacă pe curba (C) sînt impuse valoarea funcţiei necunoscute şi a derivatei ei normale, ca în figura 2.

Cea de a doua problemă (P 2). Se caută o soluție a ecuației cunoscînd valorile funcției necunoscute sau a derivatei ei normale, pe o curbă (Γ), care, de asemenea, nu este nicăieri tangentă la o curbă caracteristică cît și pe o curbă (γ) caracteristică ca în figura 3.

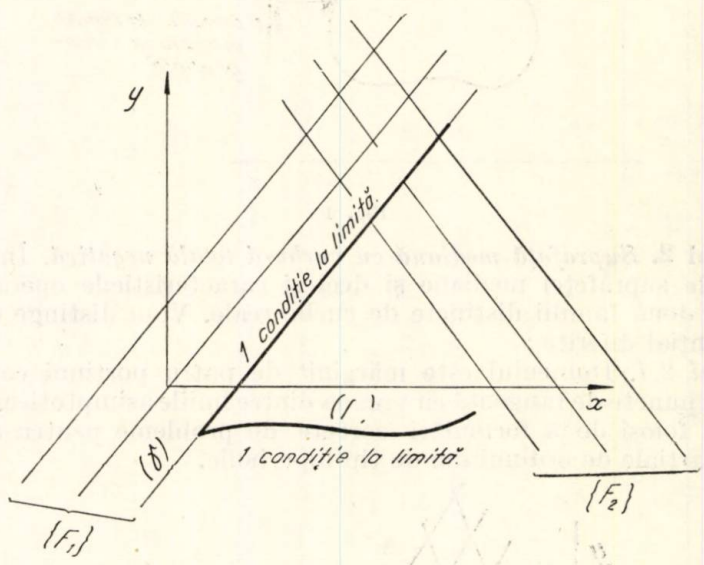


Fig. 3

Se demonstrează că pentru ambele probleme soluția există și este unică.

Considerăm domeniul menționat mărginit de cele patru porțiuni de curbă $P\,Q$, QS, SR, RP precum și cele două familii de curbe caracteristice asociate operatorului hiperbolic considerat $\{F_1\}$, $\{F_2\}$ dintre care (γ_1) și (γ_2), din familii diferite, trec prin punctele P și Q.

Fie triunghiul curbiliniu $P\,Q\,M$ în care se dau două condiții în tensiuni pe marginea $P\,Q$. Aceasta este o problemă de tip (P 1) pentru care soluția poate fi determinată unic. Fie P', Q' punctele în care (γ_1), (γ_2), întîlnesc $R\,S$. Observăm că acum avem tensiunile care apar în această etapă pe porțiunile PP', QQ' de caracteristice.

Să mai presupunem că pe curbele necaracteristice PR, SQ sînt date cîte o condiție formulată în tensiuni. Atunci, în sensul problemei (P 2), putem deduce starea de tensiune în triunghiurile curbilinii PRP' și QSQ'. În modul acesta sînt determinate eforturile ce apar în aproximația respectivă a stării de tensiune (0, 0) prin impunerea a două condiții marginale pe latura PQ, a cîte unei condiții pe laturile PR, QS și nici unei condiții pe RS ca în figura 5.

În continuare este limpede că la reapariția operatorului considerat în formularea problemei în deplasări vom putea, printr-un raționament

analog, impune, de data aceasta, două condiții marginale pe RS și cîte o condiție pe PR, SQ, toate formulate în deplasări.

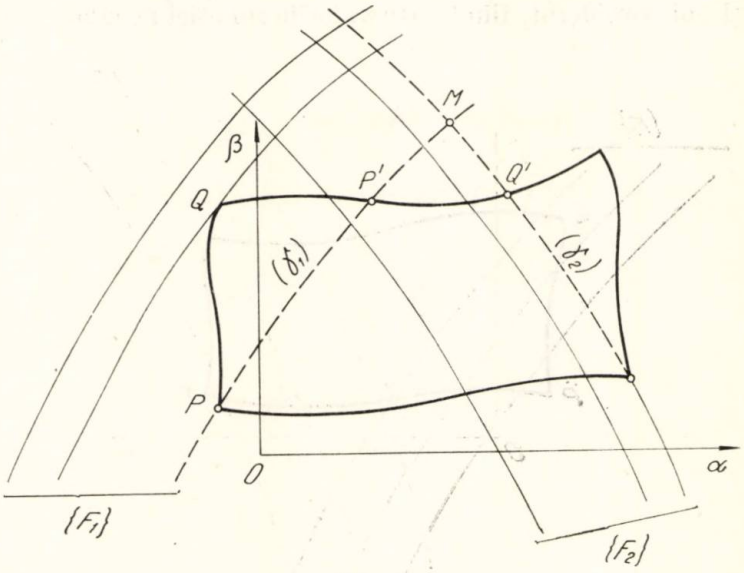


Fig. 4

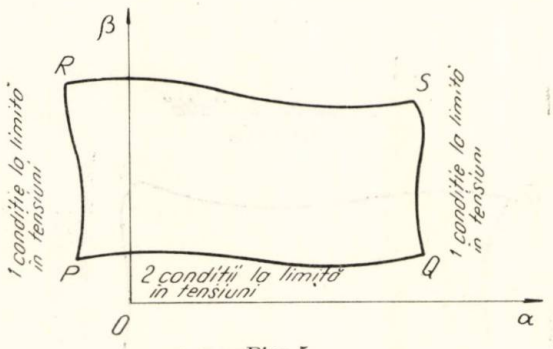


Fig. 5

Construcția soluției în deplasări se realizează ca în figura 6. Vor putea fi satisfăcute astfel condiții marginale ca în figura 7.

În concluzie, deducem că pe fiecare porțiune de curbă neasimptotică pot fi impuse, în fiecare aproximație a stării (0, 0), cîte două condiții.

Se observă că suprapunerea a două probleme de tip hiperbolic a condus la o problemă asemănătoare, de exemplu cu problema la limită generată de ecuația biarmonică. Aceasta cere determinarea unei soluții într-un domeniu închis, cu două condiții marginale în fiecare punct al frontierii.

Restul de condiții marginale rămîn a fi îndeplinite cu ajutorul celorlalte stări de tensiune.

Cazul 2.2. Domeniul este mărginit de patru curbe asimptotice. În acest caz vom folosi cunoscuta problemă a lui Goursat :

Problema lui Goursat. Se caută o soluție a operatorului hiperbolic de ordinul doi considerat, fiind date valorile funcției necunoscute pe două

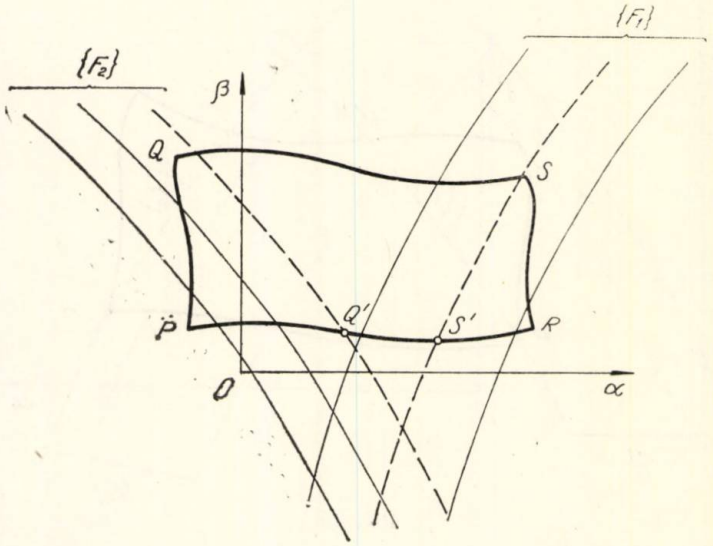


Fig. 6

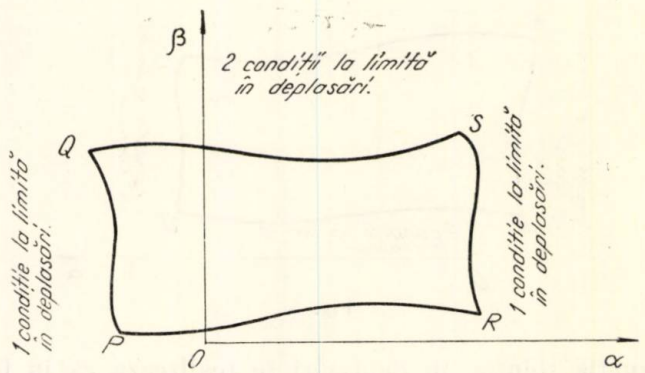


Fig. 7

caracteristici (γ_1), (γ_2) care fac parte din cele două familii diferite de curbe caracteristice, ca în figura 8, astfel încît valorile în punctul M comun să fie egale.

Această problemă are întotdeauna soluție care este unică.

Revenind acum la cazul 2.2 redat în figura 9, tensiunile ce apar în aproximația respectivă din starea (0, 0) pot fi determinate considerîndu-se problema lui Goursat pentru prima ecuație (3.5) dîndu-se cîte o condiție în tensiuni pe caracteristicile RS, RP.

Analog, deplasările corespunzătoare aproximației respective a stării (0, 0) pot fi determinate din rezolvarea tot a unei probleme de tip Goursat, pentru același operator, relativ însă la curbele caracteristice QP, QS cu cîte o dată în deplasări.

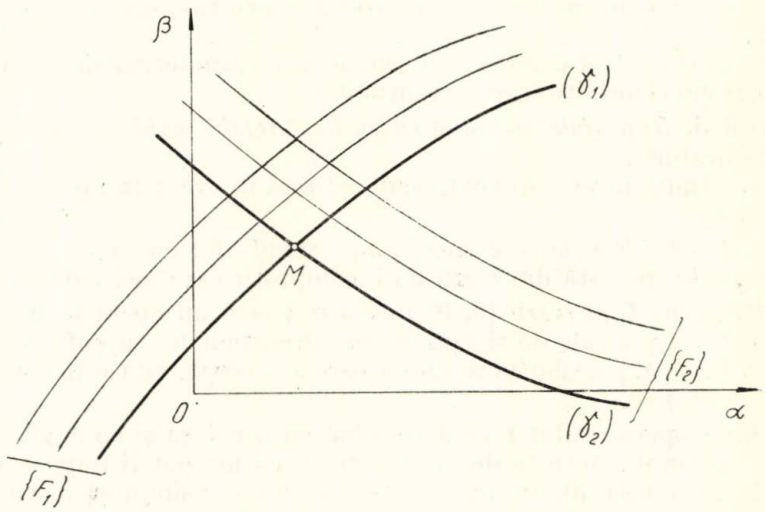


Fig. 8

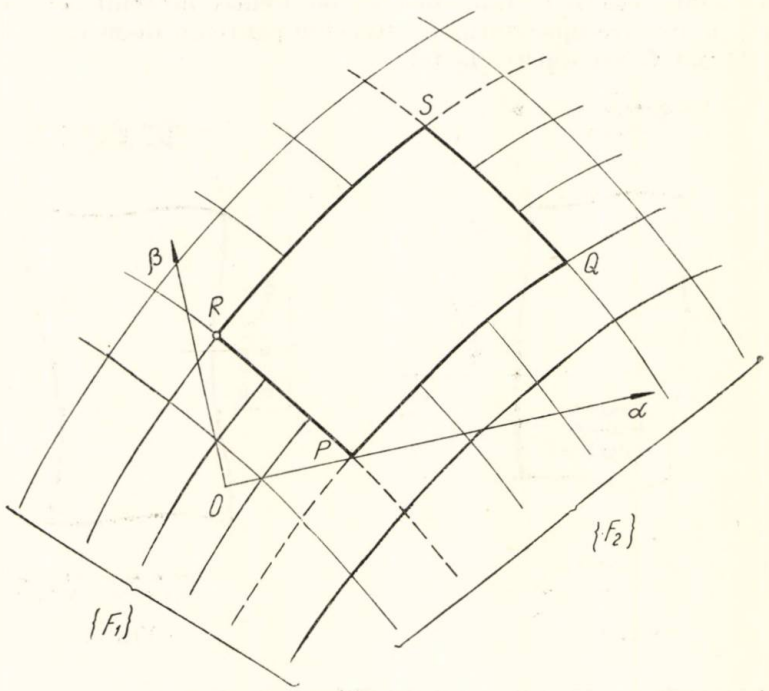


Fig. 9

În modul acesta a fost îndeplinită o condiție la limită pe frontiera domeniului.

Se observă că în acest caz suprapunerea a două probleme de tip hiperbolic a condus la o problemă asemănătoare, de exemplu, cu problema la limită generată de ecuația lui Laplace. Aceasta cere determinarea soluției într-un domeniu închis, cînd pe frontiera acestuia este dată o condiție la limită.

Restul celor trei condiții marginale care caracterizează teoria plăcilor curbe revin celorlalte stări de tensiune.

Cazul 3. *Suprafață mediană cu curbură totală nulă* (cazul suprafețelor desfășurabile).

Vom studia în primul rînd cazul cel mai frecvent în aplicațiile practice și anume :

Cazul 3.1. Frontiera domeniului, avînd forma unui patrulater curbiliniu, este formată din două linii asimptotice și două curbe oarecare.

Operatorul L al stării (0, 0) în cazul 3 este un operator de ordinul doi cu derivate parțiale de tip parabolic. Presupunem suprafața mediană referită la liniile α, β de curbură, dintre care $\alpha = \text{const.}$ sînt prin coincidență și linii asimptotice.

Soluția operatorului L se determină cu ușurință și ea depinde liniar de două funcțiuni arbitrare de α. Observăm că nu pot fi impuse condiții marginale în starea (0, 0) în lungul marginilor asimptotice $\alpha = \text{const.}$

În schimb, pentru deducerea tensiunilor în lungul celorlalte două curbe marginale, neasimptotice, pot fi impuse două condiții : fie cîte una pe fiecare dintre curbe, fie două pe o curbă. Pentru determinarea deplasărilor, operație în care operatorul L intervine pentru a doua oară, condițiile marginale pot fi satisfăcute la fel.

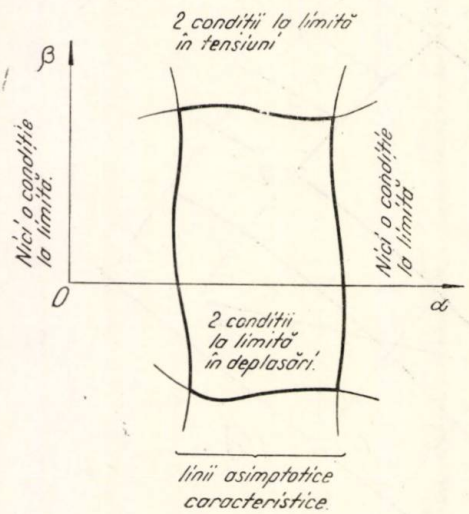


Fig. 10

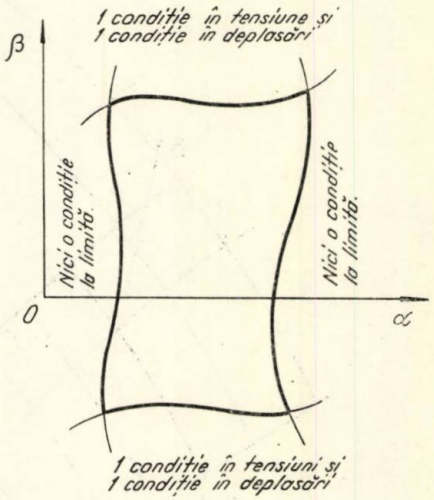


Fig. 11

Apar astfel variantele indicate în figurile 10 și 11.

Ca atare în toate variantele celorlalte stări de tensiune le revine satisfacerea a patru condiţii la limită pe fiecare margine asimptotică şi două condiţii în lungul marginilor neasimptotice.

Cazul 3.2. Frontieră alcătuită numai din două curbe neasimptotice.

Acest caz poate apare la con, cilindru şi la alte suprafeţe închise. Soluţia are aceleaşi proprietăţi ca şi în cazul anterior cu deosebirea absenţei marginilor asimptotice şi a problemelor legate de existenţa lor. În schimb soluţia trebuie să fie periodică în variabila α.

Cazul 3.3. Frontieră alcătuită în planul α, β dintr-o curbă închisă, intersectată de fiecare asimptotă în cel mult două puncte.

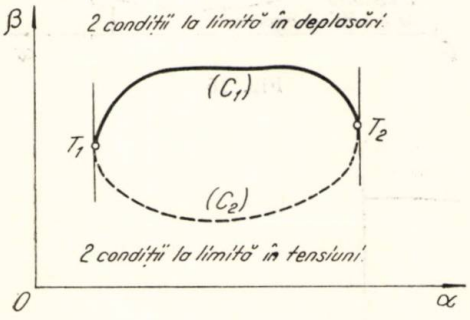


Fig. 12

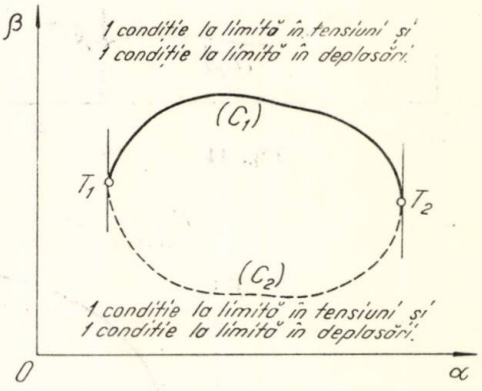


Fig. 13

Acest caz se rezolvă ca şi cazurile anterioare.

Notînd cu T_1 şi T_2 punctele de pe frontiera domeniului în care aceasta este tangentă la liniile asimptotice, observăm că astfel sînt definite două curbe (C_1), (C_2). Pe fiecare dintre aceste două curbe vor fi date condiţii marginale ca în cazul 3.1 cu toate variantele ce apar acolo. Aceste variante sînt descrise în figurile 12,13.

În acest caz nu se pune problema periodicităţii şi nici a satisfacerii condiţiilor marginale pe asimptote (caracteristice).

Se observă că şi în acest caz (cînd sînt absente porţiuni asimptotice de frontieră) se obţine, în starea (0, 0), o problemă la limită asemănătoare, de exemplu, cu problema generată de ecuaţia biarmonică.

Cazul 3.4. Frontiera domeniului este formată dintr-o curbă intersectată în cel mult două puncte de fiecare linie asimptotică şi închisă printr-o porţiune de linie asimptotică ca în figura 14.

Şi în acest caz apar două curbe (C_1), (C_2) definite prin punctul T de tangenţă la o linie asimptotică şi cîte un punct de intersecţie cu asimptota care face parte din contur.

Şi aici în lungul porţiunii de asimptotă $A\ B$ nu pot fi impuse condiţii la limită, ele revenind altor stări de tensiune, iar condiţiile care revin celor

două porțiuni de curbă (C_1), (C_2) sînt analoage celor menționate în cazurile precedente și redate în figurile 15 și 16.

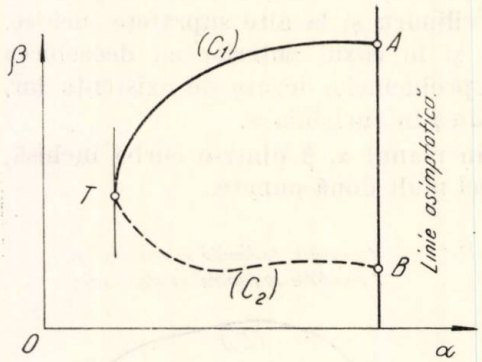


Fig. 14

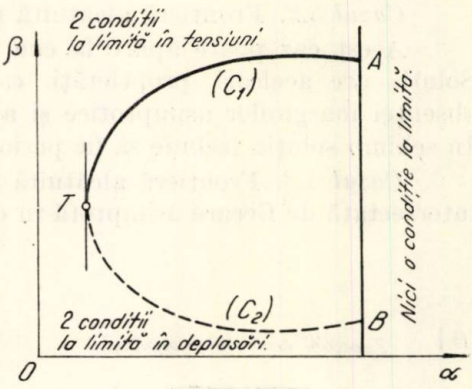


Fig. 15

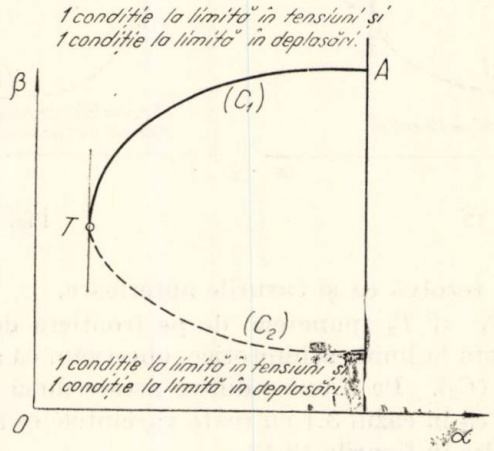


Fig. 16

Primită la redacție la 15 august 1973

BIBLIOGRAFIE

1. VIOREL VISARION și CRISTIAN STĂNESCU, *Calculul stărilor de tensiune în teoria plăcilor curbe*, București, Edit. Academiei, 1969.
2. A. L. GOLDENWEIZER, *Teoria plăcilor curbe elastice subțiri* (în lb. rusă), Moscova, 1953.
3. V. Z. VLASOV, *Lucrări alese* (în lb. rusă), Moscova, Edit. Acad. Științe a U.R.S.S., 1962.
4. A. L. GOLDENWEIZER, *Cîteva probleme matematice ale teoriei liniare a plăcilor curbe elastice subțiri* (în lb. rusă), Moscova, 1960.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ARTICULAȚIEI PLASTICE ÎN ELEMENTELE DIN BETON UȘOR ARMAT

de Tr. ONEȚ
Institutul politehnic Cluj

Se prezintă rezultatele unui studiu teoretic și experimental cu privire la comportarea elementelor încovoiate cu secțiune dreptunghiulară (simplu sau dublu armată) în faza plastică, bazat pe cunoașterea particularităților de comportare ale betonului ușor armat cu agregate de granulit (de tip Mureșeni) sub acțiunea încărcărilor de scurtă durată.
Se propun relații de calcul pentru cele două limite ale stadiului de comportare plastică a elementului (momentul încovoietor de plastifiere și momentul încovoietor de rupere), precum și pentru evaluarea capacității de rotire a articulației plastice.

1. INTRODUCERE

Determinarea capacității reale de rezistență a structurilor din beton armat, în general, și a celor din beton ușor armat, în special, este condiționată de cunoașterea comportării lor ținînd seama de efectul deformațiilor plastice.

Apariția deformațiilor plastice în structurile static nedeterminate conduce, după cum se știe, la formarea *articulațiilor plastice* în secțiunile cele mai solicitate, denumite secțiuni critice. Acestea conduc la modificarea schemelor statice ale structurilor și deci la redistribuiri de eforturi.

La structurile din beton armat epuizarea capacității de deformare plastică are loc uneori înainte de formarea mecanismului de cedare. Pentru acest motiv stabilirea *capacității de rotire a articulațiilor plastice* reprezintă o cerință fundamentală la aplicarea metodelor de calcul în domeniul plastic al unor astfel de structuri [10].

Formarea unei articulații plastice într-un element din beton ușor armat corespunde intrării în curgere a armăturii întinse dintr-o secțiune critică. Extinderea curgerii armăturii pe porțiunea denumită *lungimea articulației plastice* are loc în procesul de funcționare efectivă a articulației plastice respective. Distrugerea articulației plastice corespunde atingerii unei deformații specifice de $4{,}5\,{}^{0}/_{00}$ în fibra extremă a secțiunii, determinată prin încercări.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 1, 1974, P. 153–175

Momentul încovoietor corespunzător formării articulației plastice este denumit *moment de curgere* (M_c), iar cel de distrugere a ei — *moment de rupere* (M_r). Intervalul dintre cele două momente caracteristice, stabilit experimental, este de 30—35% la procente mici de armare și de 5—10% la procente mari, fiind puțin influențat de tipul armăturii.

2. IPOTEZE ȘI RELAȚII DE CALCUL

Pentru definirea celor două limite ale fazei de comportare plastică a elementului (formarea și distrugerea articulației plastice) precum și a capacității de rotire plastică se admit următoarele ipoteze :

I. Relația efort unitar, deformație specifică a betonului comprimat, este neliniară.

II. Relația efort unitar, deformație specifică a oțelului, este, de asemenea, neliniară.

III. Starea de eforturi unitare într-o secțiune critică, corespunzătoare stadiului II a, se consideră cea din figura 1.

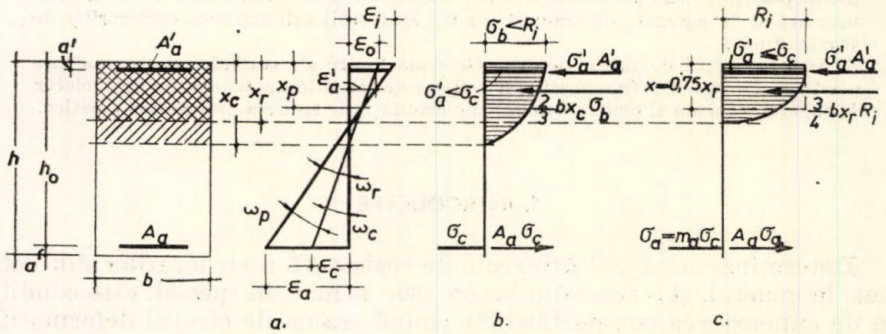


Fig. 1. — Secțiune dreptunghiulară solicitată în stadiul II a.

La începutul fazei plastice (intrarea în curgere a armăturii întinse) diagrama de eforturi unitare în betonul comprimat se consideră de forma unei parabole de gradul doi, cu vîrful situat la nivelul fibrei extreme comprimate (fig. 1*b*).

În momentul ruperii secțiunii (fig. 1*c*) diagrama de eforturi unitare în betonul comprimat se consideră de forma unei parabole de gradul trei, cu vîrful situat la nivelul fibrei extreme comprimate cînd în această fibră se atinge rezistența la compresiune din încovoiere (R_i).

În ambele cazuri se neglijează participarea betonului întins dintre fisuri la preluarea eforturilor.

Pentru a ține seama de particularitățile de comportare ale elementelor din beton ușor armat în momentul ruperii s-a propus introducerea unui coeficient suplimentar al condițiilor de lucru ale armăturii (m_a), avînd valorile date în [12].

IV. Se admite valabilitatea ipotezei secțiunilor plane (fig. 1*a*) în stadiul de atingere a limitei de curgere în armătura întinsă a secțiunilor.

În stadiul de rupere se admite ipoteza planeității zonei comprimate a betonului.

V. Cedarea elementelor se produce prin epuizarea capacității lor de rezistență la încovoiere în secțiuni normale.

2.1. FORMAREA ARTICULAȚIEI PLASTICE

Calculul *momentului de curgere* al unei secțiuni se poate face pe baza ipotezelor din figura 1*a* și *b*, cu ajutorul relației

$$M_c = A_a \sigma_c \left((h_0 - \frac{3}{8} x_c \right) + A'_a \sigma'_a \left(\frac{3}{8} x_c - a' \right), \tag{1}$$

în care σ_c reprezintă limita de curgere a oțelului.

Introducînd notațiile :

$$\xi_c = \frac{x_c}{h_0}, \qquad \delta'_0 = \frac{a'}{h_0}, \qquad \mu = \frac{A_a}{bh_0}, \qquad \mu' = \frac{A'_a}{bh_0}, \tag{2}$$

și exprimînd efortul unitar din armătura comprimată, în baza ipotezei secțiunilor plane, sub forma :

$$\sigma'_a = \sigma_c \frac{x_c - a'}{h_0 - x_c} = \sigma_c \frac{\xi_c - \delta'_0}{1 - \xi_c}, \tag{3}$$

relația (1) devine :

$$M_c = \left[\mu \left(1 - \frac{3}{8} \xi_c \right) + \mu' \frac{\xi_c - \delta'_0}{1 - \xi_c} \left(\frac{3}{8} \xi_c - \delta'_0 \right) \right] bh_0^2 \sigma_c. \tag{1.a}$$

Poziția axei neutre în momentul formării articulației plastice se determină cu ajutorul ecuației de proiecții pe axa elementului și anume :

$$\sigma'_a A'_a + \frac{2}{3} b x_c \sigma_b = \sigma_c A_a. \tag{4}$$

Efortul unitar din fibra extremă comprimată a betonului se determină pe baza ipotezei secțiunilor plane cu relația :

$$\sigma_b = \frac{1}{n'} \frac{x_c}{h_0 - x_c} \sigma_c. \tag{5}$$

Coeficientul de echivalență n' se obține cu o relație stabilită pe baza unor studii anterioare ale autorului [9] și anume :

$$n' = \frac{E_a}{E_b} \left(1 + \frac{\mu}{200} R_a \right) (1 + v\varphi) \leqslant 6 \frac{E_a}{E_b}, \tag{6}$$

în care

E_a și E_b sînt modulii de elasticitate pentru armătură, respectiv pentru beton,

R_a este rezistența de calcul a armăturii [11],

v — raportul dintre încărcarea de lungă durată și încărcarea totală,

$\overline{\varphi}$ — caracteristica deformației în timp a betonului [11].

Înlocuind expresiile (3) și (5) în relația (4) și ținînd seama de notațiile (2), se obține o ecuație de gradul II în raport cu ξ_c de forma

$$\xi_c^2 + (1{,}5\, n'\mu + 1{,}5\, n'\mu')\, \xi_c - (1{,}5\, n'\mu + 1{,}5\, n'\mu'\delta_0') = 0, \qquad (4a)$$

a cărei rădăcină ce interesează este

$$\xi_c = 0{,}75\, n'(\mu + \mu')\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2{,}67(\mu + \mu'\delta_0')}{n'(\mu + \mu')^2}}\right]. \qquad (7)$$

2.2. DISTRUGEREA ARTICULAȚIEI PLASTICE

Calculul *momentului de rupere* (fig. 1*c*) se face cu relația

$$M_r = A_a m_a \sigma_c \left(h_0 - \frac{4}{10}\, x_r\right) + A_a' \sigma_a' \left(\frac{4}{10}\, x_r - a'\right) \qquad (8)$$

sau

$$M_r = \left[\mu m_a (1 - 0{,}4\ \xi_r) + \mu' \frac{\sigma_a'}{\sigma_c} (0{,}4\ \xi_r - \delta_0')\right] b h_0^2 \sigma_c, \qquad (8a)$$

în care

$$\xi_r = \frac{x_r}{h_0}, \qquad (9)$$

m_a este valoarea medie a coeficientului condițiilor de lucru ale armăturii, dată în [12].

Valoarea efortului unitar σ_a' este funcție de deformația specifică a armăturii comprimate ε_a' în momentul ruperii secțiunii. Dacă deformația specifică ε_a' este mai mică decît deformația specifică corespunzătoare curgerii armăturii, a cărei valoare este

$$\varepsilon_c = 0{,}002 + \frac{\sigma_{0.2}}{E_a}, \qquad (10)$$

atunci efortul unitar din armătura comprimată nu atinge limita de curgere ($\sigma'_a < \sigma_c$). În acest caz expresia efortului unitar σ'_a se obține pe baza ipotezei secțiunilor plane, după cum urmează :

$$\sigma'_a = \frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon_c}\sigma_c = \frac{\xi_r - \delta'_0}{\xi_r}\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c}\sigma_c, \tag{11}$$

în care ε_i reprezintă scurtarea limită a betonului la solicitarea de compresiune din încovoiere.

Poziția axei neutre în momentul ruperii secțiunii se determină cu ajutorul ecuației de proiecții :

$$\sigma'_a A'_a + \frac{3}{4} b x_r R_i = A_a m_a \sigma_c. \tag{12}$$

Dacă efortul unitar σ'_a atinge limita de curgere, ecuația de proiecții devine :

$$\xi_r = 1{,}33\ (\mu m_a - \mu')\frac{\sigma_c}{R_i}. \tag{12a}$$

În cazul în care $\sigma'_a < \sigma_c$, înlocuind expresia (11) în (12) se obține o ecuație de gradul II în raport cu ξ_r, de forma

$$\xi_r^2 - \frac{4}{3}(u - w)\,\xi_r - \frac{4}{3}\delta'_0 w = 0, \tag{12b}$$

în care s-au făcut notațiile :

$$u = \mu m_a \frac{\sigma_c}{R_i} \qquad \text{și} \qquad w = \mu' \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c}\frac{\sigma_c}{R_i} \tag{13}$$

și a cărei soluție este

$$\xi_r = \frac{2}{3}(u - w) + \sqrt{\left[\frac{2}{3}(u - w)\right]^2 + \frac{4}{3}\delta'_0 w}. \tag{12c}$$

2.3. CAPACITATEA DE ROTIRE PLASTICĂ

Capacitatea de rotire a unei articulații plastice (capacitatea de rotire plastică), notată cu θ_p, reprezintă diferența dintre rotirea totală a ei, corespunzătoare ruperii (θ_r), și cea corespunzătoare formării articulației plastice (θ_c) :

$$\theta_p = \theta_r - \theta_c. \tag{14}$$

Avînd în vedere notațiile din figura 1, relația anterioară devine :

$$\theta_p = \omega_p l_p = (\omega_r - \omega_c)\, l_p = \left(\frac{\varepsilon_i}{\xi_r} - \frac{\varepsilon_0}{\xi_c}\right)\frac{l_p}{h_0} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\xi_r} - \frac{\varepsilon_c}{1-\xi_c}\right)\frac{l_p}{h_0}, \qquad (15)$$

în care

$\omega_p = (\omega_r - \omega_c)$		reprezintă rotirea specifică plastică,
$l_p = \eta l_a$	—	lungimea echivalentă a articulației plastice,
l_a	—	lungimea efectivă a articulației plastice,
η	—	coeficient care depinde de forma diagramei de momente încovoietoare și de variația deformațiilor specifice ale betonului și armăturii pe lungimea articulației plastice.

Valorile ξ_c și ξ_r, care intră în relația (15), se obțin cu ajutorul expresiilor (7) respectiv (12a) sau (12c), valoarea ε_c este dată de expresia (10), iar valorile ε_i și ε_0 s-au determinat pe cale experimentală (vezi § 3).

Pe zonele în care momentele încovoietoare variază liniar se poate admite $\eta = 0{,}66$ [10], iar pe cele în care diagrama de momente este constantă se ia $\eta = 1$.

În lipsa unor verificări experimentale cu privire la *lungimea efectivă a articulației plastice* (l_a) în elementele încovoiate din beton ușor armat, se poate adapta relația de calcul propusă în [10], luînd în considerare relațiile (1a) și (8a) astfel :

$$l_a = \frac{0{,}375\ \xi_c - 0{,}4\ \xi_r m_a}{(1 - 0{,}4\ \xi_r)\, m_a}\ \frac{3}{16 r_\Phi}\, l. \qquad (16)$$

În relația de mai sus $r_\Phi = P_u/P_1$ reprezintă *coeficientul de redistribuție* (raportul dintre sarcina de distrugere și cea de formare a articulației plastice de pe reazeme).

Lungimea efectivă a articulației plastice, stabilită în acest mod, reprezintă o valoare minimă corespunzînd celui mai defavorabil tip de structură întîlnit în practică, care este grinda dublu încastrată, solicitată de două sarcini concentrate aplicate la sferturile deschiderii.

Relația (15) permite construirea de grafice de tipul celui din figura 2, în vederea facilitării calculelor. Aceste grafice pot fi utilizate la determinarea capacității de rotire a articulațiilor plastice ale grinzilor cu diferite scheme de încărcare și moduri de rezemare.

La fel ca la betonul obișnuit, capacitatea de rotire plastică a elementelor din beton ușor armat crește cu cît limita de curgere a oțelului este mai mică și cu cît betonul este de calitate mai bună. De asemenea, capacitatea

de rotire plastică este cu atît mai mare cu cît procentul de armătură întinsă este mai mic și cu cît procentul de armătură comprimată este

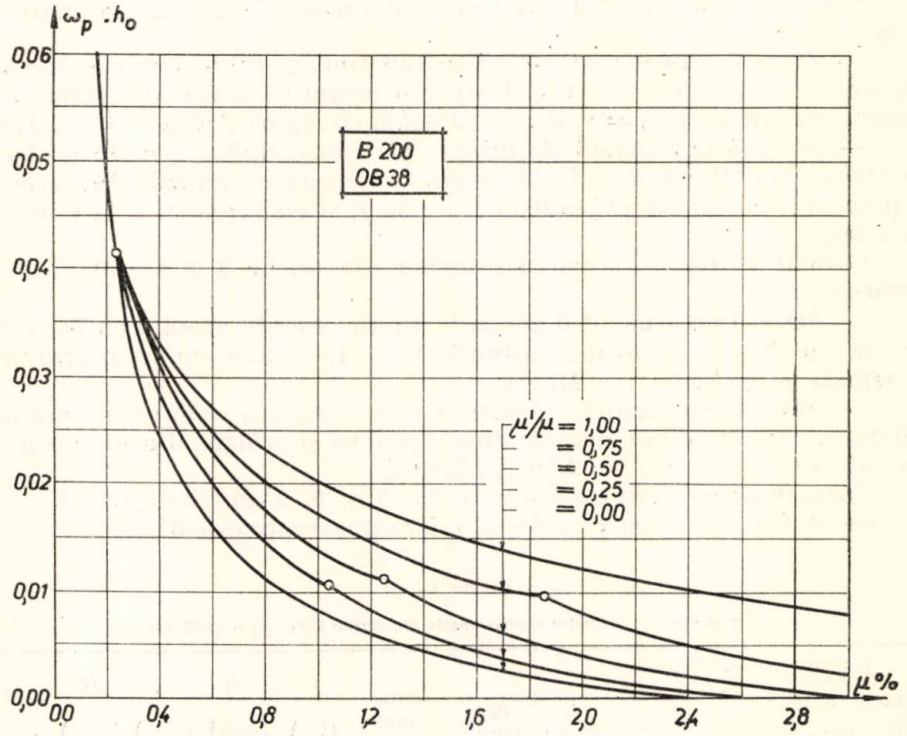


Fig. 2. — Variația produsului $\omega_p \cdot h_0$ în funcție de valoarea procentelor de armare μ și μ' pentru secțiuni dreptunghiulare realizate din beton B 200 și oțel OB 38.

mai mare. La același procent de armare, capacitatea de rotire plastică este cu atît mai mare cu cît înălțimea utilă a secțiunii este mai redusă.

Evaluarea capacității de rotire plastică se poate face și pe cale probabilistică.

3. EXPERIMENTĂRI

3.1. PROGRAMUL EXPERIMENTAL

Pentru verificarea relațiilor de calcul privind capacitatea de rotire a articulațiilor plastice au fost încercate elemente experimentale din beton ușor armat (cu agregate de granulit de Mureșeni), totalizînd 111 grinzi simplu rezemate, cu secțiune dreptunghiulară, grupate în șase serii :

— Seria 1 cuprinzînd 34 grinzi (17 tipuri) simplu armate cu bare din oțel de tip PC 52, avînd dimensiunile 15 × 30 × 320 cm și cu procente de armare $\mu\,\% = 0{,}069 \ldots 2{,}375\,\%$.

— Seria 2 cuprinzînd 18 grinzi (18 tipuri) simplu armate cu bare din oțel de tip OB 38, avînd aceleași dimensiuni ca și cele din seria 1 și cu procente de armare $\mu\,\% = 0{,}069 \ldots 2{,}878\,\%$.

Caracteristicile și armarea grinzilor din seriile 1 și 2 sînt date în lucrarea [12].

— Seria 3 cuprinzînd 20 grinzi (20 tipuri) dublu armate cu bare din oțel de tip PC 52, avînd aceleași dimensiuni ca și cele din seria 1, cu procente de armare $\mu\,\% = 0{,}55 \ldots 1{,}88\,\%$ și cu raportul $\mu'/\mu = 0 \ldots 1{,}00$.

— Seria 4 cuprinzînd 25 grinzi (25 tipuri) dublu armate cu bare din oțel de tip OB 38, avînd dimensiunile identice cu grinzile din seria 1, cu procente de armare $\mu\% = 0{,}55 \ldots 2{,}32\,\%$ și cu raportul $\mu'/\mu = 0 \ldots 1{,}00$.

Caracteristicile și armarea grinzilor din seriile 3 și 4 sînt date în lucrarea [8].

— Seria 5 cuprinzînd 6 grinzi (3 tipuri) simplu armate cu bare din oțel de tip PC 52, avînd dimensiunile $10 \times 15 \times 320$ cm și cu procente de armare $\mu\,\% = 2{,}21 \ldots 2{,}73\,\%$.

— Seria 6 cuprinzînd 8 grinzi (4 tipuri) simplu armate cu bare din oțel de tip OB 38, avînd aceleași dimensiuni ca și grinzile din seria 5 și cu procente de armare $\mu\,\% = 2{,}19 \ldots 2{,}89\,\%$.

Caracteristicile grinzilor din seriile 5 și 6, avînd indicativele G5 și respectiv G6 sînt trecute în tabela 1, iar armarea lor este dată în figura 3.

Tabela 1

Caracteristicile grinzilor experimentale din seriile 5(PC 52) și 6(OB 38)

Indicativ	Armarea longitudinală: Nr. și diametru bare (d)	Armarea longitudinală: A_a (cm²)	Armarea longitudinală: μ (%)	d_1 (mm)	h_0 (cm)	Vîrsta betonului (zile)	ρ (kg/m³)	R_b (daN/cm²)	$R_{i\,cil}$ (daN/cm²)	R_t^n (daN/cm²)	$E_b \times 10^{-3}$ (daN/cm²)
G 5–1	2 Ø 12 + 1 Ø8	2,76	2,22 2,21	8	12,4 12,5	30 27	1815 1865	147 272	14,9 20,2	12,8 19,9	135 125
G 5–2	2 Ø 12 + 1 Ø 10	3,04	2,41 2,45	8	12,6 12,4	30 28	1780 1810	218 226	14,1 20,6	17,1 17,6	145 149
G 5–3	3 Ø 12	3,39	2,73 2,69	8	12,4 12,6	30 30	1815 1810	147 226	14,9 20,6	12,8 17,6	135 149
G 6–1	2 Ø 12 + 1 Ø 8	2,76	2,22 2,19	8	12,4 12,6	28 30	1780 1810	218 222	14,1 14,8	17,1 17,3	145 163
G 6–2	2 Ø 12 + 1 Ø 10	3,04	2,36 2,45	8	12,9 12,4	27 29	1815 1865	156 272	16,3 20,2	13,4 19,9	117 125
G 6–3	3 Ø 12	3,39	2,73 2,73	8	12,4 12,4	28 29	1815 1815	192 192	19,0 19,0	15,5 15,5	139 139
G 6–4	2 Ø 14 + 1 Ø 8	3,58	2,69 2,89	8	13,3 12,4	27 28	1815 1810	156 222	16,3 14,8	13,4 17,3	117 163

Notă. Fiecare indicativ cuprinde cîte două elemente identice.

La grinzile din seriile 5 și 6 s-a adoptat o secțiune transversală mai redusă pentru a realiza o variație a procentului de armare în trepte mai mici.

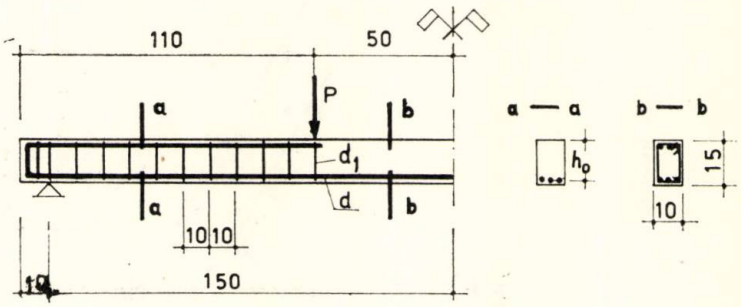


Fig. 3 — Armarea elementelor experimentale din seriile 5 și 6.

Rețeta betonului și tehnologia de confecționare și de încercare a elementelor experimentale sînt arătate în [8, 12].

3.2. REZULTATELE MĂSURĂTORILOR ȘI INTERPRETAREA LOR

3.2.1. Formarea articulației plastice

Valorile *momentului de curgere* stabilite experimental (M_c^e) prezintă o bună corespondență cu valorile calculate (M_c^c) după relația (1a), așa cum rezultă din figura 4.

Se remarcă din figură că valorile raportului M_c^e/M_c^c pentru elementele dublu armate sînt mai uniforme, ca o consecință a faptului că aportul betonului la definirea capacității portante este mai redus decît în cazul elementelor simplu armate.

Comparînd valorile calculate cu relația (1a) cu cele obținute după relațiile referitoare la betonul armat obișnuit [11] și care corespund unei distribuții dreptunghiulare de eforturi cu ordonata R_i, a rezultat că diferența dintre cele două șiruri de valori este neînsemnată. Se confirmă în acest fel faptul că epura dreptunghiulară de eforturi în zona comprimată de beton asigură o precizie comparabilă cu cea parabolică și că influența calității betonului (sau, ceea ce este totuna, a efortului unitar din fibra extremă de beton) asupra momentului încovoietor pe care-l poate prelucra secțiunea este redusă.

Dacă pentru calculul momentului încovoietor forma diagramei de eforturi din zona comprimată de beton are o importanță redusă, în schimb înălțimea zonei comprimate necesară pentru calculul capacității de rotire plastică trebuie să se stabilească corespunzător distribuției parabolice de eforturi.

Încercările efectuate au confirmat în mod satisfăcător valabilitatea relației (7) dedusă la punctul 2.1.

Valorile *scurtării specifice de plastifiere* a betonului (ε_0), înregistrate în momentul intrării în curgere a armăturii întinse, sînt prezentate prin puncte în figura 5, în funcție de procentul de armare al zonei întinse ($\mu\,\%$). Pentru grinzile din seriile 1, 5 și 6 punctele din figură reprezintă media a două valori experimentale, pentru cele din seriile 3 și 4 media a patru valori.

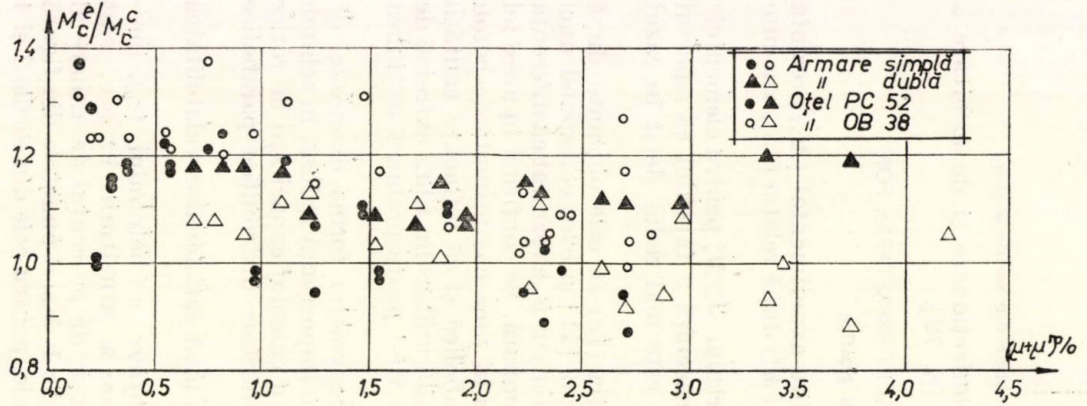


Fig. 4. — Variaţia raportului dintre valorile experimentale (M_o^e) şi de calcul (M_o^c) ale momentului de curgere.

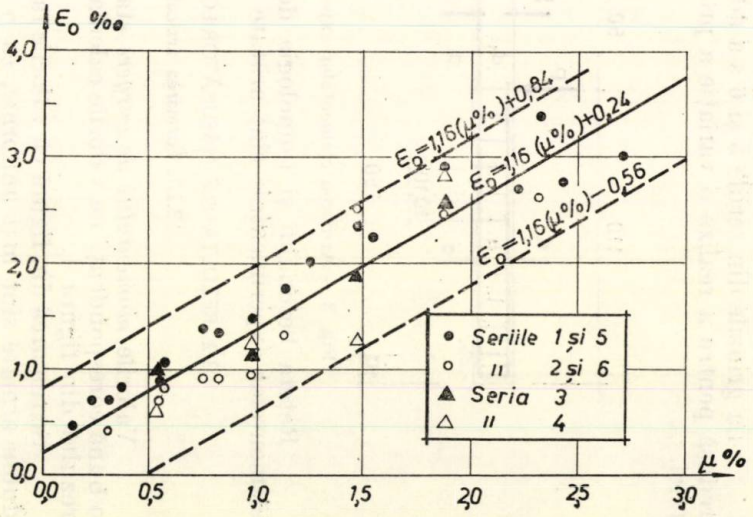


Fig. 5. — Valoarea scurtării de plastifiere a betonului (ε_0) în funcţie de procentul de armare al secţiunii.

Rezultă din figură că scurtarea specifică de plastifiere a betonului crește proporțional cu valoarea procentului de armare, punctele reprezentînd perechile de valori ε_0 și μ aliniindu-se destul de bine după o dreaptă a cărei expresie, stabilită pe bază de interpretare statistică, este

$$\varepsilon_0 = 1{,}16\ (\mu\,\%) + 0{,}24. \tag{17}$$

Rezultatele experimentale obținute au dus la concluzia că armarea zonei comprimate și variația calității betonului (în limitele indicate în tabela 1) nu influențează asupra valorii scurtării specifice de plastifiere.

3.2.2. Distrugerea articulației plastice

Valorile *momentului încovoietor de rupere* stabilite experimental (M_r^e) sînt date în figura 6 comparativ cu valorile calculate (M_r^c) după relația (8a).

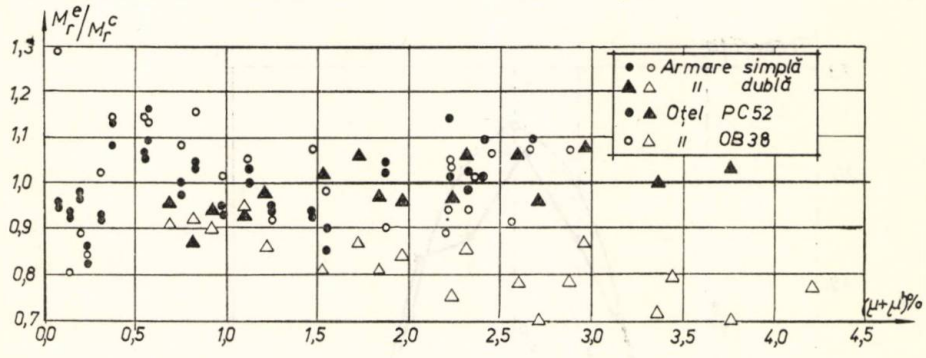


Fig. 6 — Variația raportului dintre valorile experimentale (M_r^e) și de calcul (M_r^c) ale momentului încovoietor de rupere.

Se observă că între cele două serii de valori există o bună corespondență. Diferențele mai mari înregistrate la elementele dublu armate cu oțel OB 38, avînd procente totale de armare $(\mu + \mu')\,\%$ mari, pot fi cauzate de variabilitatea calității materialelor și a condițiilor de lucru.

Cercetările efectuate au arătat că valorile momentului încovoietor de rupere calculate cu relația (8a) concordă foarte bine cu cele determinate admițînd o diagramă dreptunghiulară echivalentă de eforturi în betonul comprimat (fig. 1*c*), așa după cum s-a propus în [12]. Rezultă, așadar, că în stadiul de rupere, la fel ca în momentul formării articulației plastice, influența pe care o are forma diagramei de eforturi din zona comprimată de beton asupra capacității portante a elementului este neînsemnată.

Poziția efectivă a axei neutre (x_r), necesară la evaluarea capacității de rotire a articulațiilor plastice, trebuie însă să se determine corespunzător unei diagrame parabolice de eforturi în zona comprimată a secțiunii.

Rezultatele experimentale obținute confirmă aplicabilitatea relațiilor (12a), respectiv (12c).

Scurtarea specifică a betonului în momentul ruperii grinzilor denumită *scurtare limită* și notată cu ε_i, este o mărime afectată de un grad pronunțat de dispersie. Ea depinde de o serie de factori, cum sînt :calitatea betonului, viteza de încărcare, forma secțiunii transversale, poziția axei neutre, armarea transversală etc. Din această cauză numeroasele propuneri de evaluare a scurtării limită a betonului greu, existente în literatura de specialitate, conduc la rezultate destul de diferite.

Scurtarea limită a betonului ușor, determinată experimental, a fost cuprinsă între 1,55 ‰ și 10,05 ‰. Prelucrarea statistică a rezultatelor experimentale a condus la obținerea unei valori medii a scurtării limită $\overline{\varepsilon}_i = 5{,}69\,‰$, o abatere medie pătratică $s = 1{,}79\,‰$ și un coeficient de variație $C_v = 31{,}5\,\%$.

În figura 7 s-a reprezentat poligonul de frecvență al valorilor scurtării limită grupate pe clase, precum și curba distribuției normale (Gauss) a deformațiilor limită ale betonului față de valoarea medie. Se observă că distribuția reală a rezultatelor experimentale obținute este destul de apropiată de distribuția normală.

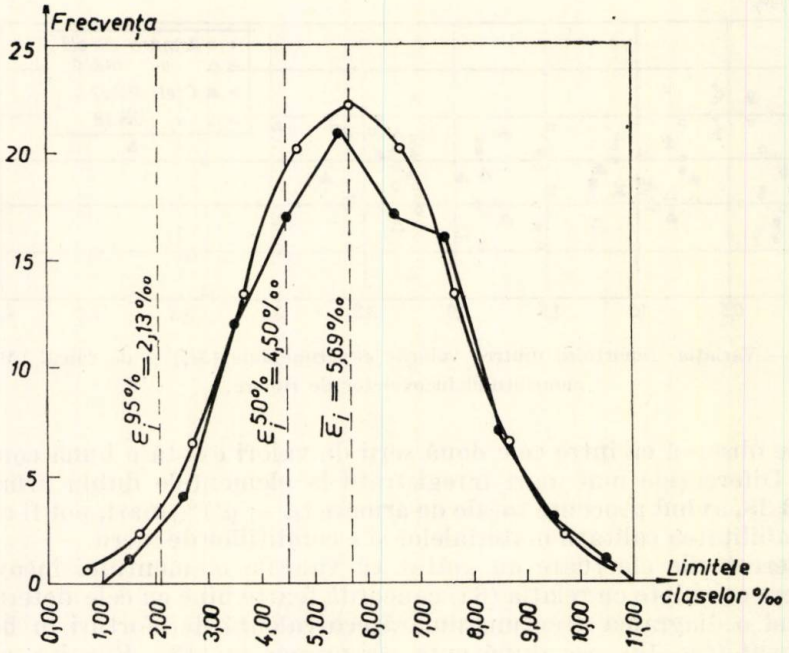


Fig. 7. — Poligonul de frecvență și curba distribuției normale a deformațiilor limită a betonului ușor (ε_i).

În funcție de nivelul de încredere impus apriori, valoarea caracteristică (maximă sau minimă) a scurtării limită se obține cu relația

$$\varepsilon_i^k = \overline{\varepsilon}_i \ (1 \pm tC_v), \tag{18}$$

în care

t este un coeficient ce se obține cu ajutorul distribuției Student,

C_v — coeficientul de variație.

Valoarea minimă a scurtării limită, pentru un nivel de încredere de 50 %, rezultă

$$\varepsilon_i^{50\%} = 5{,}69\ (1 - 0{,}68 \times 0{,}315) = 4{,}47\ ‰. \tag{18a}$$

Ținînd seama de concluziile Comisiei XII CEB [3], se poate admite drept *valoare convențională pentru scurtarea limită a betonului ușor* valoarea dată de relația (18a), rotunjită la

$$\varepsilon_i = 4{,}50\ ‰. \tag{19}$$

Această valoare întrece cu 29 % pe cea corespunzătoare betonului greu, care este egală cu 3,5 ‰.

3.2.3. Capacitatea de rotire plastică

Valorile experimentale ale *capacității de rotire plastică* (θ_p) obținute la încercarea grinzilor cu secțiune dreptunghiulară *simplu armată* sînt date în figura 8, în funcție de valoarea procentului de armare și de calitatea oțelului.

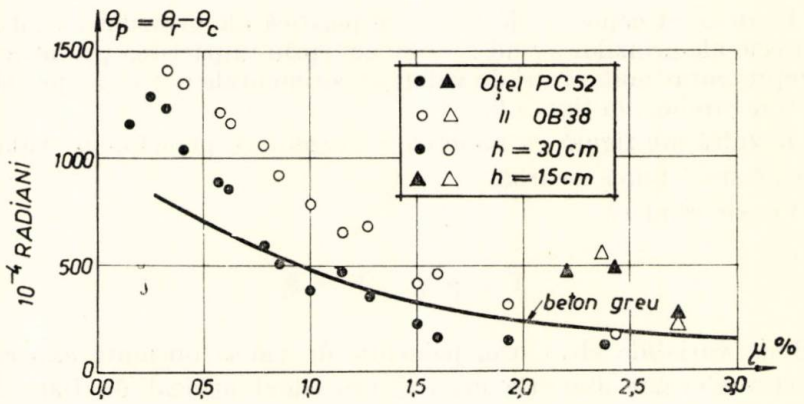


Fig. 8. — Valorile experimentale ale capacității de rotire plastică în funcție de procentul de armare de tipul oțelului și înălțimea secțiunii transversale a grinzilor simplu armate.

La grinzile din seriile 1, 5 și 6 valorile capacității de rotire plastică reprezintă media rezultatelor obținute pentru cele două elemente experimentale de același tip.

Valorile experimentale ale capacității de rotire plastică situate în apropierea procentelor de armare minim și maxim au prezentat o dispersie

exagerată și în consecință au fost eliminate (două valori la oțelul PC 52 și șapte valori la oțelul OB 38).

În figura 8 este trasată, pentru comparație, curba de variație a capacității de rotire plastică în funcție de procentul de armare obținută de J. C. Maldague [7] la încercarea grinzilor din beton armat obișnuit, avînd înălțimea secțiunii transversale egală cu 28 cm. Se observă că elementele din beton ușor armat au o capacitate de rotire plastică mai mare decît cele din beton obișnuit, mai cu seamă la procente mici de armare și la armături confecționate din oțel OB 38.

Comparînd figura 2 cu figura 6 din [10] rezultă, însă, că valorile de calcul ale produsului $\omega_p h_0$ (stabilite cu luarea în considerare a rezistențelor de calcul pentru beton și armătură) sînt mai mici la elementele din beton ușor armat comparativ cu cele din beton obișnuit. Situația aceasta, în contradicție la prima vedere cu rezultatele experimentale menționate mai sus, se datorește luării în considerare a fenomenului de hiperrezistență în cazul elementelor din beton ușor armat, prin coeficientul $m_a > 1$ (ceea ce echivalează cu considerarea unei calități sporite a oțelului și deci cu reducerea capacității de rotire plastică).

Pentru coeficientul m_a s-au utilizat, în mod prudent, valorile medii date în figura 6 din lucrarea [12]. Utilizarea valorilor minime ale acestui coeficient (fig. 14 din [12]) ar conduce, desigur, la sporirea capacității de rotire plastică, respectiv a produsului $\omega_p h_0$.

Din figura 8 rezultă, de asemenea, că elementele cu înălțimea secțiunii transversale egală cu 15 cm au capacități de rotire plastică mai mari decît cele cu înălțimea de 30 cm.

Echivalînd capacitățile de rotire plastică ale grinzilor avînd $h = 15$ cm cu cele ale grinzilor avînd $h = 30$ cm (prin împărțirea primelor la doi) s-au reprezentat noile șiruri de valori experimentale obținute, pe cele două calități de oțeluri, în figura 9.

Rezultă din figură că punctele reprezentînd perechile de valori θ_p și $\mu\%$ se aliniază după o curbă.

Considerînd că

$$X = \mu\%, \quad Y = \theta_p \tag{20}$$

sînt două variabile aleatoare, perechile de valori obținute experimental au fost prelucrate statistic urmînd procedeul utilizat de Baus R. [2].

În urma verificărilor efectuate s-a constatat că atît distribuțiile parțiale X_i și Y_i cît și distribuția bidimensională sînt normale.

Efectuînd transformarea logaritmică,

$$X' = \ln X = \ln \mu\%,$$
$$Y' = \ln Y = \ln \theta_p, \tag{21}$$

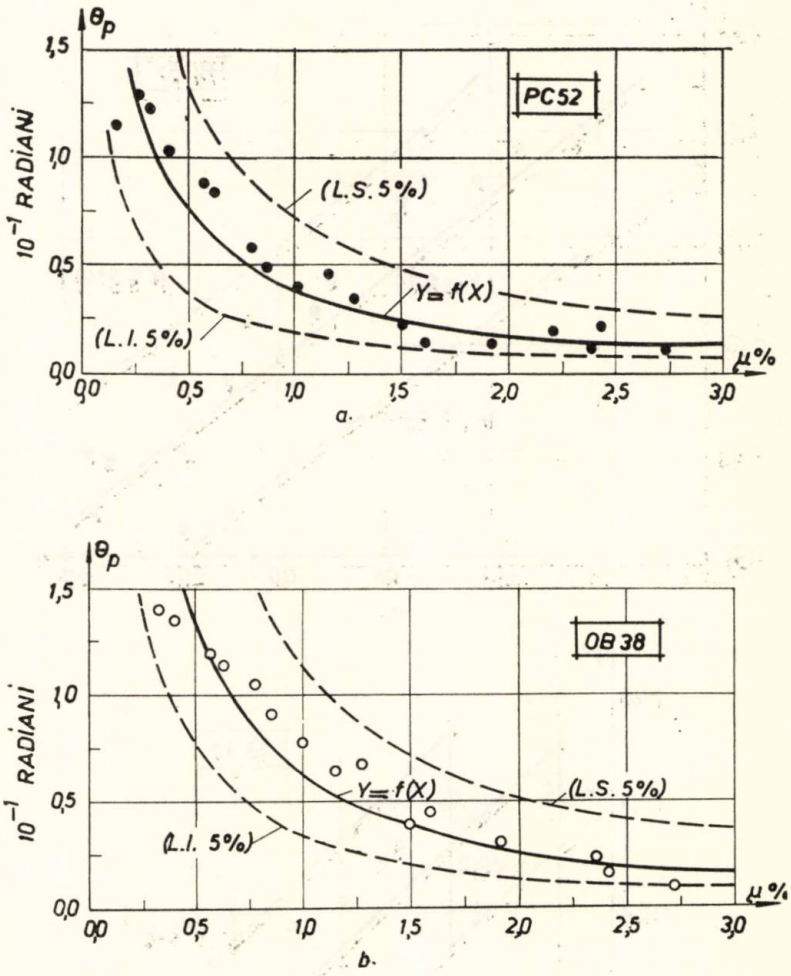
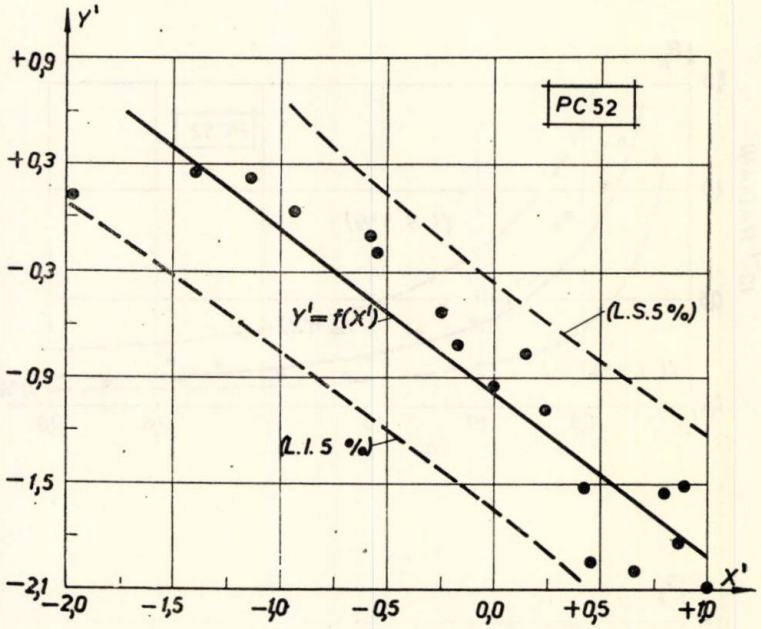


Fig. 9. — Legea de variație a capacității de rotire plastică în funcție de procentul de armare și intervalul de încredere pentru grinzile simplu armate : *a* — cu oțel PC 52 ; *b* — cu oțel OB 38.

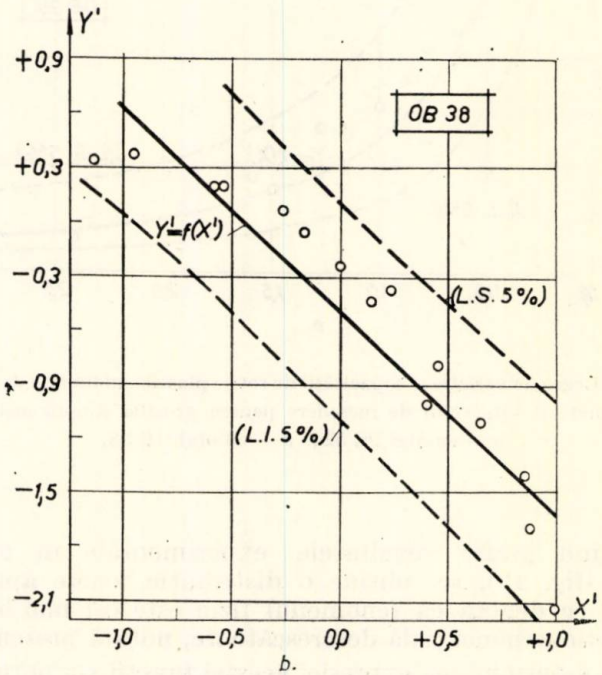
și reprezentînd grafic rezultatele experimentale în noul sistem de coordonate (fig. 10), se obține o distribuție foarte apropiată de una liniară, ceea ce denotă că fenomenul fizic este cel mai bine reprezentat printr-o funcție exponențială descrescătoare, notată prescurtat $Y = f(X)$.

Pentru determinarea expresiei acestei funcții s-a pornit de la ecuația de regresie de forma

$$Y' = m\ X' + b, \tag{22}$$



a



b.

Fig. 10. — Corelaţia dintre Y' şi X' şi mărimea intervalului de încredere pentru grinzile simplu armate :
a — cu oţel PC 52 ; *b* — cu oţel OB 38.

în care coeficientul de regresie (m) se calculează prin metoda celor mai mici pătrate, cu relația

$$m = \frac{\Sigma X'_i Y'_i - \frac{\Sigma X'_i \Sigma Y'_i}{n}}{\Sigma X'^2_i - \frac{(\Sigma X'_i)^2}{n}}, \tag{23}$$

iar coeficientul b cu relația

$$b = \bar{Y}' - m\,\bar{X}', \tag{24}$$

$\bar{X}'$ și $\bar{Y}'$ fiind mediile distribuțiilor marginale.

Efectuînd calculele, în tabela 2, se obține pentru grinzile armate cu oțel PC 52 dreapta de regresie

$$Y' = -0{,}919\ X' - 1{,}001, \tag{25}$$

reprezentată în figura 10*a* sub notația $Y' = f(X')$, pentru care corespunde pe figura 9*a* o curbă de ecuație

$$Y = 0{,}367\ X^{-0{,}919}, \tag{26}$$

notată cu $Y = f(X)$.

Pentru grinzile armate cu oțel OB 38, după efectuarea calculelor în tabela 3, se obține în mod similar

$$Y' = -1{,}135\ X' - 0{,}485 \tag{27}$$

și

$$Y = 0{,}616\ X^{-1{,}135}. \tag{28}$$

Revenind la notațiile inițiale (20), expresiile celor două curbe $Y = f(X)$ devin :

$$\theta_p = 0{,}367\ (\mu\,\%)^{-0{,}919} \text{ pentru oțelul PC 52}, \tag{26a}$$

$$\theta_p = 0{,}616\ (\mu\,\%)^{-1.135} \text{ pentru oțel OB 38}. \tag{28a}$$

Aceste relații permit să se stabilească valoarea cea mai probabilă a capacității de rotire plastică în funcție de procentul de armare și de tipul oțelului utilizat.

Construcția prin puncte a intervalului de încredere pentru un prag de semnificație de 5% este dată în tabelele 2 și 3, iar limitele acestui interval notate cu (L I 5%) și (L S 5%) sînt reprezentate în figurile 9 și 10.

Tabela 2.

[Prelucrarea statistică a valorilor capacității de rotire plastică obținute la încercarea grinzilor simplu armate cu oțel PC 52.

Indicativ	X_i (μ %)	Y_i (10^{-1} rad)	X_i'	Y_i'	$X_i'^2$	$X_i' Y_i'$	$X_i' - \overline{X}'$	$(X' - \overline{X}')^2$	$Y_i' - \overline{Y}'$	$(Y_i' - Y)^2$	s'	ks'	Y_i' (LI 5 %)	Y_i' (LS 5 %)	Y_i (LI 5 %)	Y_i (LS 5 %)
G 1—2	0,140	1,138	−1,966	0,129	3,865	−0,254	−1,879	3,520	0,930	0,865	0,357	0,753	+0,117	+1,623	1,125	5,070
G 1—4	1,248	1,283	−1,394	0,249	1,944	−0,348	−1,307	1,705	1,050	1,100	0,337	0,710	−0,410	+1,010	0,663	2,750
G 1—5	0,320	1,235	−1,139	0,211	1,298	−0,240	−1,052	1,110	1,012	1,020	0,330	0,696	−0,596	+0,796	0,551	2,220
G 1—6	0,387	1,028	−0,949	0,028	0,901	−0,027	−0,862	0,741	0,829	0,687	0,326	0,688	−0,818	+0,558	0,441	1,750
G 1—7	0,560	0,879	−0,579	−0,129	0,336	−0,075	−0,492	0,242	0,672	0,452	0,320	0,675	−1,175	+0,175	0,309	1,190
G 1—8	0,585	0,833	−0,536	−0,183	0,287	0,098	−0,449	0,201	0,618	0,382	0,318	0,670	−1,201	+0,141	0,301	1,150
G 1—9	0,766	0,579	−0,266	−0,546	0,071	0,145	−0,179	0,032	0,255	0,065	0,316	0,666	−1,466	−0,134	0,231	0,966
G 1—10	0,840	0,486	−0,174	−0,721	0,030	0,125	−0,087	0,008	0,080	0,006	0,316	0,666	−1,532	−0,200	0,216	0,819
G 1—11	1,003	0,388	0,004	−0,947	0,000	−0,004	0,091	0,008	−0,146	0,021	0,316	0,666	−1,666	−0,334	0,189	0,717
G 1—12	1,149	0,467	0,138	−0,761	0,019	−0,105	0,225	0,050	0,040	0,002	0,316	0,666	−1,832	−0,500	0,160	0,607
G 1—13	1,275	0,337	0,241	−1,088	0,058	−0,262	0,328	0,107	−0,287	0,082	0,316	0,666	−1,896	−0,564	0,150	0,569
G 1—14	1,505	0,218	0,408	−1,523	0,167	−0,623	0,495	0,244	−0,722	0,521	0,318	0,670	−2,051	−0,709	0,129	0,492
G 1—15	1,582	0,142	0,460	−1,952	0,212	−0,898	0,547	0,298	−1,151	1,327	0,318	0,670	−2,111	−0,769	0,121	0,464
G 1—16	1,912	0,133	0,649	−2,017	0,421	−1,307	0,736	0,540	−1,216	1,480	0,320	0,675	−2,265	−0,915	0,104	0,401
G 5—1	2,215	0,208	0,795	−1,578	0,632	−1,250	0,882	0,775	−0,657	0,432	0,323	0,680	−2,420	−1,060	0,089	0,347
G 1—17	2,375	0,126	0,865	−2,071	0,748	−1,790	0,952	0,905	−1,270	1,613	0,325	0,685	−2,485	−1,115	0,083	0,328
G 5—2	2,430	0,220	0,887	−1,514	0,788	−1,342	0,974	0,945	−1,593	0,352	0,325	0,685	−2,515	−1,145	0,081	0,318
G 5—3	2,710	0,114	0,996	−2,171	0,993	−2,160	1,083	1,175	−1,250	1,562	0,327	0,690	−2,610	−1,230	0,073	0,292
			−1,560	−16,584	12,770	−10,167		12,606		11,969						

Tabela 3

Prelucrarea statistică a valorilor capacității de rotire plastică obținute la încercarea grinzilor simplu armate cu oțel OB 38.

Indicativ	X_i (μ%)	Y'_i (10^{-1} rad)	X'_i	Y'_i	X'^2_i	$X'_iY'_i$	$X'_i-\overline{X}'$	$(X'_i\overline{X}')^2$	$Y'_i-\overline{Y}'$	$(Y'_i-\overline{Y}')^2$	s′	ks'	$\overline{Y}'_i$ (LI 5%)	$\overline{Y}_i$ (LS 5%)	$\overline{Y}'_i$ (LI 5 %)	$\overline{Y}_i$ (LS 5 %)
G 2—5	0,320	1,406	−1,139	0,341	1,298	−0,388	−1,205	1,452	0,796	0,634	0,306	0,651	+0,149	+1,451	1,160	4,270
G 2—6	0,387	1,451	−0,949	0,372	0,901	−0,352	−1,015	1,030	0,827	0,683	0,298	0,635	−0,035	+1,235	0,966	3,440
G 2—7	0,560	1,210	−0,579	0,191	0,336	−0,110	−0,645	0,416	0,646	0,418	0,288	0,614	−0,414	+0,814	0,661	2,260
G 2—8	0,585	1,209	−0,536	0,190	0,287	−0,102	−0,602	0,362	0,645	0,415	0,286	0,609	−0,479	+0,739	0,620	2,100
G 2—9	0,766	1,066	−0,266	0,064	0,071	−0,017	−0,332	0,110	0,519	0,269	0,282	0,601	−0,801	+0,401	0,449	1,490
G 2—10	0,840	0,929	−0,174	−0,074	0,030	0,013	−0,240	0,058	0,381	0,145	0,281	0,599	−0,899	+0,299	0,407	1,350
G 2—11	1,003	0,776	0,004	−0,253	0,000	−0,001	−0,062	0,004	0,202	0,041	0,280	0,596	−1,096	+0,096	0,334	1,100
G 2—12	1,149	0,640	0,138	−0,446	0,019	−0,062	0,072	0,005	0,009	0,001	0,281	0,599	−1,229	−0,031	0,293	0,970
G 2—13	1,275	0,675	0,241	−0,393	0,058	−0,095	0,175	0,031	0,062	0,004	0,282	0,601	−1,401	−0,199	0,247	0,820
G 2—14	1,505	0,359	0,408	−1,024	0,167	−0,418	0,342	0,117	−0,569	0,324	0,284	0,605	−1,565	−0,355	0,209	0,702
G 2—15	1,582	0,450	0,460	−0,798	0,212	−0,367	0,394	0,155	−0,343	0,117	0,285	0,607	−1,607	−0,393	0,201	0,675
G 2—16	1,912	0,317	0,649	−1,149	0,421	−0,745	0,583	0,340	−0,694	0,480	0,289	0,616	−1,816	−0,584	0,163	0,558
G 6—2	2,360	0,244	0,859	−1,411	0,738	−1,210	0,793	0,627	−0,851	0,725	0,295	0,628	−2,068	−0,812	0,126	0,445
G 2—17	2,375	0,166	0,865	−1,796	0,748	−1,550	0,799	0,637	−1,341	1,800	0,296	0,630	−2,100	−0,840	0,123	0,432
G 6—3	2,730	0,108	1,004	−2,226	1,010	−2,240	0,938	0,878	−1,666	2,780	0,300	0,639	−2,259	−0,981	0,105	0,375
			0,985	−8,412	6,296	−7,644		6,222		8,836						

Coeficientul de corelație a fost calculat cu relația

$$r = \frac{\Sigma(X_i' - \bar{X}')\,(Y_i' - \bar{Y}')}{\sqrt{\Sigma(X_i' - \bar{X}')^2 \Sigma(Y_i' - \bar{Y}')^2}}, \tag{29}$$

obținîndu-se valoarea $r = 0{,}845$ pentru grinzile armate cu PC 52, ceea ce denotă o corelație bună [2], respectiv valoarea $r = 0{,}910$ pentru grinzile armate cu OB 38, ceea ce denotă o corelație foarte bună.

Rezultatele experimentale obținute cu privire la capacitatea de rotire plastică permit verificarea relațiilor de calcul propuse la § 2.3. În acest sens s-au calculat valorile medii ale capacității de rotire plastică (θ_p^c) cu ajutorul relației (15) și s-au comparat în tabelele 4 și 5 cu valorile experimentale (θ_p^e) reprezentate prin curba $Y = f(X)$ din figura 9*a* și *b*.

Tabela 4

Valorile medii ale capacității de rotire plastică calculate (θ_p^c) și experimentale (θ_p^e) pentru grinzi simplu armate cu oțel PC 52.

μ %	m_a	ξ_r	ε_0 ‰	n'	ξ_c	θ_p^c	θ_p^e	$\frac{\theta_p^e}{\theta_p^c}$
0,25	1,64	0,088	0,50	15,4	0,213	$1{,}80\times10^{-1}$	$1{,}32\times10^{-1}$	0,74
0,50	1,48	0,159	0,80	15,9	0,290	0,92	0,75	0,81
0,75	1,39	0,224	1,10	16,3	0,346	0,62	0,50	0,81
1,00	1,32	0,283	1,40	16,7	0,390	0,45	0,37	0,82
1,25	1,27	0,340	1,70	17,2	0,429	0,34	0,30	0,88
1,50	1,23	0,396	2,00	17,6	0,459	0,26	0,25	0,96
1,75	1,20	0,450	2,30	18,1	0,493	0,20	0,21	1,05
2,00	1,18	0,507	2,60	18,5	0,518	0,14	0,17	1,21

Tabela 5

Valorile medii ale capacității de rotire plastică calculate (θ_p^c) și experimentale (θ_p^e) pentru grinzi simplu armate cu oțel OB 38.

μ %	m_a	ξ_r	ε_0 ‰	n'	ξ_c	θ_p^c	θ_p^e	$\frac{\theta_p^e}{\theta_p^c}$
0,25	1,52	0,057	0,50	15,3	0,212	$2{,}84\times10^{-1}$	$2{,}50\times10^{-1}$	0,88
0,50	1,46	0,110	0,80	15,6	0,287	1,41	1,35	0,96
0,75	1,42	0,161	1,10	15,9	0,343	0,92	0,87	0,95
1,00	1,39	0,210	1,40	16,3	0,387	0,66	0,62	0,94
1,25	1,36	0,256	1,70	16,6	0,424	0,50	0,50	1,00
1,50	1,35	0,306	2,00	16,9	0,455	0,38	0,40	1,05
1,75	1,34	0,354	2,30	17,2	0,484	0,29	0,33	1,14
2,00	1,32	0,398	2,60	17,5	0,508	0,23	0,27	1,17
2,25	1,32	0,449	2,90	17,8	0,532	0,17	0,22	1,29
2,50	1,31	0,495	3,20	18,1	0,552	0,12	0,20	1,66
2,75	1,30	0,540	3,50	18,5	0,573	0,08	0,18	2,25
3,00	1,30	0,589	3,80	18,8	0,590	0,04	0,17	4,25

Din analiza datelor prezentate în cele două tabele rezultă că între valorile experimentale și cele de calcul există o concordanță bună, mai ales în domeniul procentelor uzuale de armare. Acest fapt confirmă valabilitatea ipotezelor de calcul admise și a relațiilor de calcul deduse pe baza acestora.

Valorile *capacității de rotire plastică* stabilite experimental prin încercarea grinzilor cu secțiune dreptunghiulară *dublu armată* [8] sînt reprezentate prin puncte în figura 11, în comparație cu valorile calculate cu relația (15) și date prin curbele *a* ... *e*.

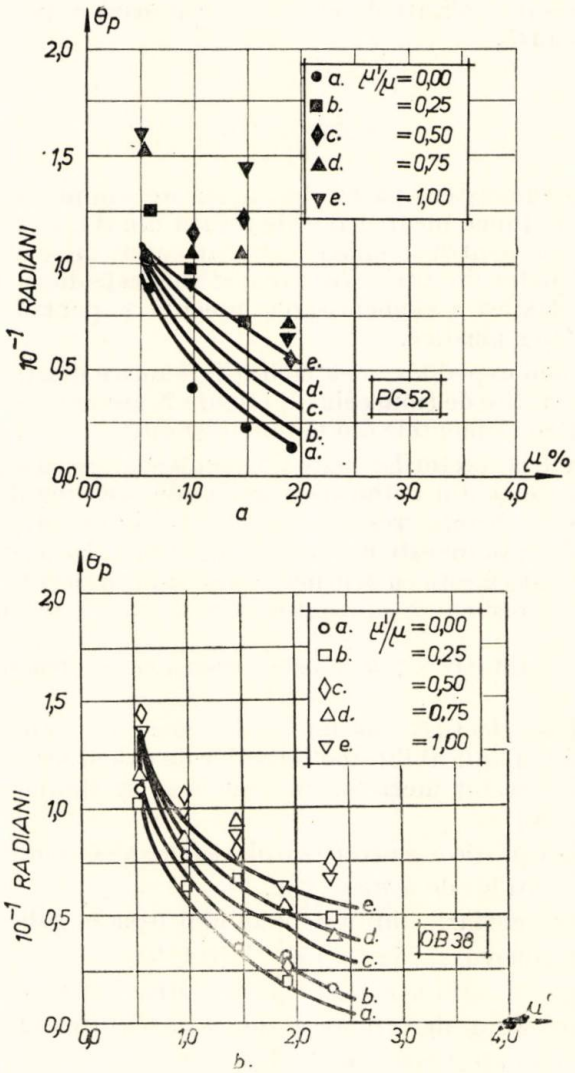


Fig. 11. — Valorile experimentale și de calcul ale capacității de rotire plastică pentru grinzile dublu armate :

a — cu oțel PC 52 ; *b* — cu oțel OB 38.

La elementele armate cu oțel OB 38 corespondența dintre valorile calculate și cele experimentale este destul de bună. În cazul grinzilor dublu armate cu oțel PC 52, relația (15) duce la valori inferioare celor obținute pe cale experimentală. Dacă se are în vedere că această mărime este puternic influențată de variabilitatea inerentă a calității materialelor, precum și faptul că valorile stabilite prin calcul sînt mai reduse (calculul fiind deci acoperitor) se poate considera că încercările efectuate confirmă teoria de calcul propusă.

Un număr mai mare de încercări experimentale în această direcție ar putea asigura o posibilitate de verificare statistică a ipotezelor și relațiilor de calcul în cauză.

4. CONCLUZII

1. Pe baza cunoașterii particularităților de comportare ale betonului ușor armat sub acțiunea încărcărilor de scurtă durată, în lucrare se deduc relațiile de calcul pentru momentul încovoietor de curgere și pentru momentul încovoietor de rupere (care constituie cele două limite ale fazei de comportare plastică a elementului), precum și pentru capacitatea de rotire a articulației plastice.

Un calcul mai expeditiv al capacității de rotire plastică se poate face cu ajutorul unor grafice de tipul celui din figura 2, asemănătoare cu propunerea din [10] pentru elementele din beton obișnuit.

2. Din analiza factorilor care influențează capacitatea de rotire plastică a elementelor din beton ușor armat de secțiune dreptunghiulară rezultă că această mărime crește cu cît limita de curgere a oțelului este mai mică și cu cît betonul este de calitate mai bună. De asemenea, capacitatea de rotire plastică este cu atît mai mare cu cît procentul de armătură întinsă este mai mic și cu cît procentul de armătură comprimată este mai mare.

Sub aspect calitativ situația este aceeași ca la elementele din beton greu.

3. Încercările efectuate pe un număr mare de elemente din beton ușor armat confirmă aplicabilitatea relațiilor de calcul propuse.

Rezultatele acestor încercări au permis să se stabilească pe bază de corelație statistică :

— legea de variație a scurtării de plastifiere a betonului (ε_0) în funcție de valoarea procentului de armare (fig. 5),

— valoarea scurtării limită a betonului ușor la solicitarea de compresiune din încovoiere (ε_i) [figura 7 și relația (19)],

— legea de variație a capacității de rotire plastică (θ_p) în funcție de valoarea procentului de armare și de calitatea oțelului, la elementele simplu armate (figura 9 și relațiile (26a) și (28a)].

4. Atrage atenția faptul că elementele din beton ușor armat au capacități de rotire plastică mai mari decît cele din beton obișnuit (fig. 8). În consecință, betonul ușor de granulit, cu toate că prezintă o casanță

mai mare decît betonul greu [12], este capabil în același timp de „adaptări" importante în structurile din beton armat static nedeterminate, prin redistribuirea eforturilor.

Primită la redacție la 14 ianuarie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. BAKER A. L. L. și AMARAKONE A. M. N., *Inelastic Hyperstatic Frames Analysis*, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Symposium Miami, nov., 1964.
2. BAUS R., *Contribution au calcul à la rupture du béton armé*, Mémoires du Centre d'Études, de Recherches et d'Essais Scientifiques de Génie Civil (CERES), *2* (1961).
3. * * * *Conclusions de la Comission XII „Structures en Béton Légers"*, Bulletin d'Information CEB, *59* (1967).
4. HANGAN M., *Le calcul de structures hyperstatiques dans le domaine plastique*, Annales ITBTP, *183—184* (1963).
5. MACCHI G., *Proposition pour le calcul des déformations du béton armé en vue des calculs hyperstatiques*, Bulletin d'Information CEB, *52* (1965).
6. MALDAGUE J. C., *Essais de poutres en béton armé en phase plastique*, 7e Congrès AIPC, 10—16 août 1964. Publication Préliminaire.
7. MALDAGUE J. C., *Détermination expérimentale des lois moments, courbures des poutres en béton armé*, Annales ITBTP *209* (1965).
8. ONEȚ T., *Influența armăturii comprimate asupra rigidității elementelor încovoiate din beton ușor*, Comunicare la Sesiunea științifică a Institutului politehnic Iași, iulie 1970. St. și cerc. mec. apl., *1* (1972).
9. ONEȚ T. *Contribuții la calculul rigidității grinzilor încovoiate de beton ușor armat sub încărcări, de scurtă durată*, Comunicare la Sesiunea științifică a Institutului de construcții București, aprilie 1971, Construcții, *3* (1972).
10. PETCU V., *Articulația plastică în calculul plastic al structurilor de beton armat*, St. cerc. mec. apl., *1* (1963).
11. * * * STAS 8000—67, *Calculul elementelor de beton, beton armat și beton precomprimat*, Metoda la stările limită.
12. TERTEA I. și ONEȚ T., *Ruperea elementelor încovoiate din beton ușor, armate cu bare netede* (OB 38) *și cu profil periodic* (PC 52), St. cerc. mec. apl., *6* (1971).
13. TERTEA I. și ONEȚ T., *Considerații privind formarea articulației plastice la betonul ușor armat*, Comunicare la Sesiunea științifică a Institutului politehnic Cluj, aprilie, 1971,

CALCULUL DE ORDINUL II AL GRINZILOR „T" CU TALPĂ LATĂ, FLEXIBILĂ, LA ÎNCOVOIERE DREAPTĂ

de D. COȘA și C. PAVEL
Universitatea Brașov Institutul de Construcții București

În ultimul timp a căpătat o largă dezvoltare utilizarea grinzilor prefabricate din beton precomprimat, de mare deschidere, având secțiunea transversală în formă de T, cu talpa lată și relativ subțire. La asemenea grinzi ipoteza nedeformabilității secțiunilor transversale, acceptată pentru grinzile obișnuite încovoiate, este susceptibilă de a fi pusă sub semnul întrebării.
În prezenta lucrare, folosind o metodă inversă, se dă soluția analitică a stării de efort și deformație pentru cazul grinzii supusă la încovoiere dreaptă, de valoare constantă pe toată deschiderea. Formulele obținute se pot utiliza prin interații.

Înscriindu-se pe linia preocupărilor de interes mai larg care urmăresc perfecționarea analizei prin calcul a multiplelor aspecte ale comportării grinzilor T cu talpa lată flexibilă, lucrarea de față își propune să prezinte un procedeu îmbunătățit pentru studiul calitativ și cantitativ al încovoierii drepte la elementele de construcție cu o astfel de alcătuire.

Se admite, în general, că o grindă T cu talpa lată se compune din două părți având particularități de formă și comportare distincte (fig. 1):

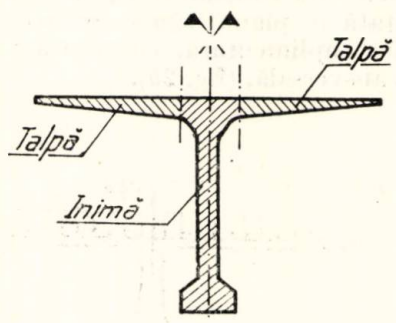


Fig. 1a

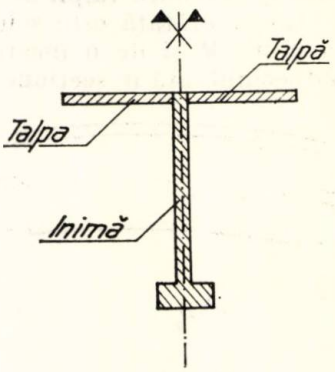


Fig. 1b

—„talpa", de regulă comprimată, compusă din cele două porțiuni ale tălpii late rămase în consolă;

— „inima" reprezentată de restul de secțiune neinclusă în „talpă".

Pentru „talpă" se acceptă modelul fizic al plăcii subțiri încovoiate avînd suprafața mediană extensibilă iar pentru „inimă" modelul clasic al barei solicitate la întindere excentrică.

Problema de bază a calculului la încovoiere a grinzilor T cu talpă lată o constituie găsirea unui procedeu care să exprime cît mai corect aportul tălpii flexibile la comportarea generală a ansamblului și identificarea prin calcul a unor eventuale situații limită de solicitare dincolo de care exploatarea grinzilor T devine nesigură sau periculoasă.

Precizăm că lucrarea de față își propune doar studiul acelor aspecte care pot fi caracterizate printr-o deformată simetrică în raport cu planul axelor de simetrie ale secțiunilor transversale ale barei, deformată identică în fiecare dintre aceste secțiuni.

Aceste aspecte sînt:

1. Găsirea expresiei analitice a corelației între solicitarea exterioară globală de încovoiere și eforturile interioare într-o secțiune a grinzii.

2. Examinarea posibilității de pierdere a stabilității tălpii sub o formă simetrică.

O metodă de calcul care să furnizeze rezultate corecte din punct de vedere teoretic și acceptabile din punct de vedere practic, trebuie să prezinte în mod necesar următoarele caracteristici:

1) Să considere sistemul format din „inimă" și „talpă" ca un tot unitar, starea de efort și deformație a tălpii fiind simultană și indestructibil legată de starea de efort și deformație a grinzii T în ansamblul său.

2) Trebuie să fie un calcul de ordinul II cu scrierea relațiilor statice pe poziția deformată atît pentru ecuațiile de echilibru ale elementului diferențial de talpă, cît și pentru cele de echivalență între eforturile într-o secțiune a grinzii și solicitarea globală de încovoiere.

Procedeul avînd caracteristicile mai sus arătate va fi aplicat la calculul unei grinzi T cu curbură constantă (comparabilă ca ordin de mărime cu variația de curbură rezultată din solicitare) avînd secțiunea transversală și grosimea tălpii de asemenea constante (fig. 2*a*). Grinda *T* avînd alcătuirea arătată este solicitată în planul său la încovoiere pură prin momentul *M* și de o încărcare suplimentară, constantă în lungul grinzii, autoechilibrată în secțiune transversală, (fig. 2*b*).

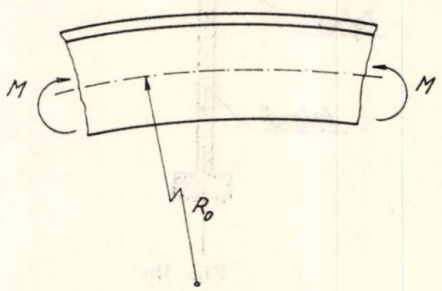


Fig. 2a

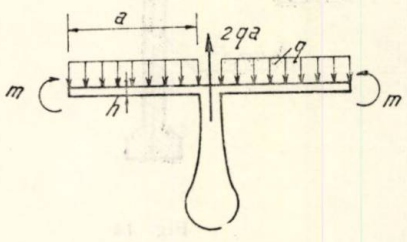


Fig. 2b

Rezolvarea va fi făcută păstrînd ipoteza clasică a materialului liniar elastic și pe cea a micilor deplasări.

Tipul calculului de ordinul II ce urmează a fi efectuat este cel definit în [2], adică un calcul care neglijează toate variațiile începînd cu ordinul II inclusiv, variații apărute ca urmare a scrierii ecuațiilor de echilibru static pe poziția deformată. Așa cum am mai arătat, calculul se bazează pe ipoteza că fenomenul se repetă identic în toate secțiunile grinzii. Observăm că secțiunile plane și normale pe axa barei înainte de deformație rămîn plane și normale pe axa barei și după deformație ; toate fibrele longitudinale ale barei deformate sînt arce de cerc ale căror centre se află pe o axă unică.

Întrucît în condițiile deformării secțiunii transversale prin încovoierea laterală a tălpii, centrul de greutate al secțiunii are o poziție variabilă funcție de solicitare, folosirea sa în definirea axei barei nu mai este posibilă.

Este avantajos ca noua axă (convențională) a barei să fie situată în planul de simetrie al grinzii, la nivelul mijlocului grosimii tălpii superioare (fig. 3 *a*) ; în poziție nedeformată axa convențională a grinzii va fi notată cu (Γ_0), iar în situație deformată cu (Γ).

Vom denumi Γ_{y0} fibra din axa transversală a tălpii situată la distanța y de încastrarea tălpii în inimă și cu Γ_{z0} o fibră a inimii situată la distanța z de (Γ_0) ; deformatele acestor curbe vor fi Γ_y și, respectiv, Γ_z.

În rezolvare se va adopta o cale inversă : se dau pentru început parametrii geometrici, care definesc complet poziția deformată a grinzii, apoi se găsesc relațiile între acești parametrii (din care numai unul este independent), iar în final se exprimă solicitarea exterioară de încovoiere căreia îi corespund.

Parametrii geometrici aleși pentru caracterizarea deformației sînt următorii :

ρ — raza de curbură a curbei Γ ;

ε — alungirea specifică implicată de transformarea lui (Γ_0) în (Γ) ;

w — săgeata curbei Γ_y măsurată de la axa Δ ca în figura 3 *b*.

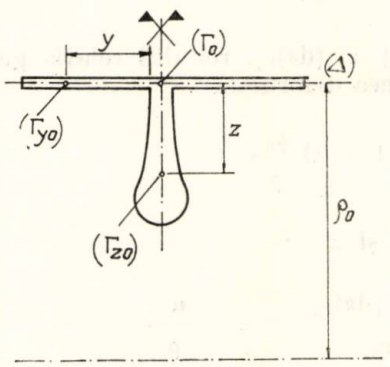


Fig. 3a

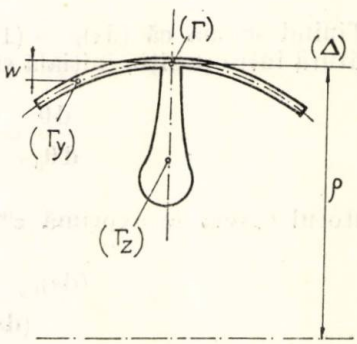


Fig. 3b

Mărimile w și ρ sînt pozitive dacă curba Γ_y și, respectiv, axa unică de curbură sînt situate, în poziție deformată, sub Δ.

Fiind date ρ_0, ρ și ε vom exprima pe $\varepsilon^{(y)}$ (alungirea fibrei Γ_y) și $\varepsilon^{(z)}$ (alungirea fibrei Γ_z).

Notînd cu $(ds)_{\Gamma_0}$, $(ds)_{\Gamma_{y0}}$, și $(ds)_{\Gamma_{z0}}$ elementele de arc ale curbelor Γ_0, Γ_{y0} și Γ_{z0} delimitate de două secțiuni normale ce fac între ele unghiul diedru $d\theta_0$, și cu $(ds)_\Gamma$, $(ds)_{\Gamma_y}$ și $(ds)_{\Gamma_z}$ transformatele acestora prin solicitare cărora în poziția deformată le corespund secțiuni ce fac între ele unghiul diedru $d\theta$ (fig. 4), pot fi calculate $\varepsilon^{(y)}$ și $\varepsilon^{(z)}$

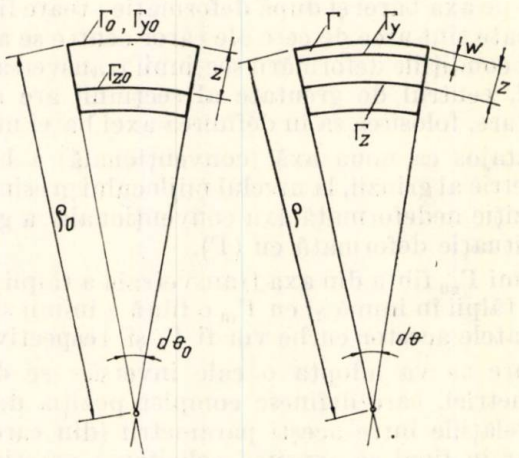


Fig. 4

$$(ds)_{\Gamma_{y0}} = (ds)_{\Gamma_0} = \rho_0 \, d\theta_0,$$

$$(ds)_{\Gamma_{z0}} = (\rho - z) \, d\theta_0,$$

$$(ds)_\Gamma = \rho \, d\theta,$$

$$(ds)_{\Gamma_y} = (\rho - w) \, d\theta,$$

$$(ds)_{\Gamma_z} = (\rho - z) \, d\theta.$$

Ținînd seama că $(ds)_\Gamma = (1 + \varepsilon) (ds)_{\Gamma_0}$, rezultă relația geometrică de legătură între poziția inițială și cea deformată

$$\frac{d\theta}{d\theta_0} = (1 + \varepsilon) \frac{\rho_0}{\rho},$$

cu ajutorul căreia se exprimă $\varepsilon^{(y)}$ și $\varepsilon^{(z)}$:

$$\varepsilon^{(y)} = \frac{(ds)_{\Gamma_y} - (ds)_{\Gamma_{y0}}}{(ds)_{\Gamma_{y0}}} = \varepsilon - \frac{w}{\rho}, \tag{1}$$

$$\varepsilon^{(z)} = \frac{(ds)_{\Gamma_z} - (ds)_{\Gamma_{z0}}}{(ds)_{\Gamma_{z0}}} = \varepsilon - z\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right). \tag{2}$$

Alungirea sau scurtarea fibrelor longitudinale este concomitentă cu încovoierea tălpii în sens transversal.

Studiul acestui fenomen presupune utilizarea unor ecuaţii de echilibru static scrise pe poziţia deformată. În figura 5 a fost reprezentat un element cu dublă curbură (ρ_x şi ρ_y) de talpă deformată, solicitate de încărcarea

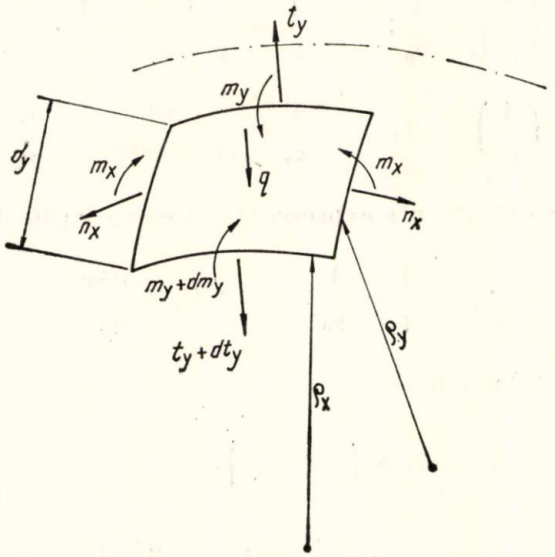


Fig. 5

exterioară aferentă şi de eforturile secţionale evidenţiate prin secţionare (sensurile indicate în figură corespund valorilor pozitive). Pe elementul diferenţial nu au fost trecute acele eforturi interioare care, în condiţiile particulare ale problemei discutate, sînt nule.

Dintre ecuaţiile de echilibru static rămîn neidentic nule următoarele :

$$\frac{dt_y}{dy} + \frac{n_x}{\rho_x} + q = 0, \tag{3}$$

$$\frac{dm_y}{dy} - ty = 0. \tag{4}$$

Eliminînd ty între (3) şi (4) obţinem relaţia de sinteză

$$\frac{d^2 m_y}{dy^2} + \frac{n_x}{\rho_x} + q = 0. \tag{5}$$

Relaţiile fizice care exprimă eforturile secţionale n_x, m_x şi m_y sînt cele ce urmează :

$$n_x = E\, h\, \varepsilon^{(y)}, \tag{6}$$

$$m_x = -D\,(\delta\, C_x + \mu\, \delta\, C_y), \tag{7}$$

$$m_y = -D\,(\delta\, C_y + \mu\, \delta\, C_x). \tag{8}$$

Prin D s-a notat rigiditatea la încovoiere a plăcii $D = E\,h^3/12(1-\mu^2)$, iar cu $\delta\,C_x$ și $\delta\,C_y$ variațiile curburilor după cele două direcții:

$$\left(\frac{1}{\rho_x}\right)_0 = \frac{1}{\rho_0}; \qquad \frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{\rho - w} \simeq \frac{1}{\rho},$$

$$\left(\frac{1}{\rho_y}\right)_0 = 0; \qquad \frac{1}{\rho_y} = \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \approx \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2}.$$

Ținînd seama că $\varepsilon^{(y)}$ are expresia (1), și că variațiile de curbură sînt

$$\delta\,C_x = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}; \qquad \delta\,C_y = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2}, \tag{9}$$

relațiile (6), (7) și (8) devin:

$$n_x = E\,h\left(\varepsilon - \frac{w}{\rho}\right), \tag{6'}$$

$$m_x = -D\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} + \mu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2}\right], \tag{7'}$$

$$m_y = -D\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2} + \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right]. \tag{8'}$$

Înlocuind pe n_x și m_y din (5) cu (6') și, respectiv, (8') se găsește ecuația diferențială a săgeții w:

$$-D\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}y^4} + \frac{1}{\rho}Eh\left(\varepsilon - \frac{w}{\rho}\right) + q = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}y^4} + \frac{Eh}{D\rho^2}w = \frac{Eh}{D\rho}\varepsilon + \frac{q}{D}. \tag{10}$$

Soluția generală a ecuației (10) se construiește prin sumarea unei soluții particulare a ecuației neomogene

$$w_p = \rho\varepsilon + \frac{q\rho^2}{Eh}. \tag{11}$$

cu soluția generală a părții omogene sub forma

$$w_0 = C_1 f_1(\alpha y) + C_2 f_2(\alpha y) + C_3 f_3(\alpha y) + C_4 f_4(\alpha y), \tag{12}$$

unde

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4D\rho^2}},$$

iar $f_1(\alpha y), f_2(\alpha y), f_3(\alpha y), f_4(\alpha y)$ sînt funcţiile introduse de A. N. Krîlov la studiul grinzii încovoiate pe mediu elastic, şi au expresiile :

$$f_1(\alpha y) = \operatorname{ch} \alpha y \cos \alpha y,$$

$$f_2(\alpha y) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha y \sin \alpha y + \operatorname{sh} \alpha y \cos \alpha y), \tag{13}$$

$$f_3(\alpha y) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha y \sin \alpha y,$$

$$f_4(\alpha y) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} \alpha y \sin \alpha y - \operatorname{sh} \alpha y \cos \alpha y).$$

Soluţia generală a ecuaţiei (10) este deci următoarea :

$$w_{(y)} = \rho \varepsilon + \frac{q\rho^2}{Eh} + C_1 f_1(\alpha y) + C_2 f_2(\alpha y) + C_3 f_3(\alpha y) + C_4 f_4(\alpha y). \tag{14}$$

Constantele arbitrare $C_1, \ldots, C_4$ se determină în funcţie de condiţiile la limită :

$$y = 0; \quad w_{(0)} = 0, \quad w'_{(0)} = 0, \tag{15}$$

$$y = a; \quad m_{y(\alpha)} = m, \; ty_{(a)} = 0. \tag{16}$$

Condiţiile (15) permit aflarea imediată a constantelor C_1 şi C_2.

$$C_1 = -\rho\left(\varepsilon + \frac{q\rho}{Eh}\right), \qquad C_2 = 0.$$

Explicitarea derivatelor săgeţii din relaţiile (16) ne conduce la

$$w''_{(a)} = -\left[\frac{m}{D} + \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right], \tag{16'}$$

$$w'''_{(a)} = 0. \tag{16''}$$

Condiţiile (16') şi (16'') sînt echivalente cu (17) şi, respectiv, (18).

$$f_1(\alpha a) C_3 + f_2(\alpha a) C_4 = -4f_3(\alpha a)\left(\rho \varepsilon + \frac{q\rho^2}{Eh}\right) - \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{m}{D} + \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right], \tag{17}$$

$$-4f_4(\alpha a) C_3 + f_1(\alpha a) C_4 = -4f_2(\alpha a)\left(\rho \varepsilon + \frac{q\rho^2}{Eh}\right). \tag{18}$$

Rezolvarea acestui sistem de ecuații ne conduce la

$$C_3 = 2\left(\rho\,\varepsilon+\frac{q\rho^2}{Eh}\right)\frac{\operatorname{ch}2\alpha a-\cos 2\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a+\cos 2\alpha a+2}-\frac{4}{\alpha^2}\left[\frac{m}{D}+\mu\left(\frac{1}{\rho}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\rho_0}\right)\right]\frac{\operatorname{ch}\alpha a\cdot\cos\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a+\cos 2\alpha a+2},$$

$$C_4 = -4\left(\rho\,\varepsilon+\frac{q\rho^2}{Eh}\right)\frac{\operatorname{sh}2\alpha a+\sin 2\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a+\cos 2\alpha a+2}-\frac{4}{\alpha^2}\left[\frac{m}{D}+\mu\left(\frac{1}{\rho}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\rho_0}\right)\right]\frac{\operatorname{ch}\alpha a\cdot\sin\alpha a-\operatorname{sh}\alpha a\cos\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a+\cos 2\alpha a+2}.$$

Este avantajos, pentru cele ce vor urma, ca săgeata w să fie descompusă în două săgeți $w_{1(y)}$ și $w_{2(y)}$, prima fiind proporțională cu soluția particulară a ecuației (10), iar cea de-a doua cu membrul drept al condiției (16'):

$$w_{(y)} = w_{1(y)} + w_{2(y)},$$

$$w_{1(y)} = \left(\rho\varepsilon+\frac{q\rho^2}{Eh}\right)\left[1-f_1(\alpha y)+2\,\frac{\operatorname{ch}2\alpha a-\cos 2\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a+\cos 2\alpha a+2}f_3(\alpha y)-\right.$$

$$\left.-4\,\frac{\operatorname{sh}2\alpha a+\sin 2\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a+\cos 2\alpha a+2}f_4(\alpha y)\right], \tag{19}$$

$$w_{2(y)} = -\left[\frac{m}{D}+\mu\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\right]\frac{1}{\alpha^2}\left[4\,\frac{\operatorname{ch}\alpha a\cos\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a+\cos 2\alpha a+2}f_2(\alpha y)+\right.$$

$$\left.+4\,\frac{\operatorname{ch}\alpha a\sin\alpha a-\operatorname{sh}\alpha a\cos\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a+\cos 2\alpha a+2}f_4(\alpha y)\right]. \tag{20}$$

Singurele mărimi rămase necunoscute în problemă sînt ρ și ε. Determinarea legăturii ce există între ele precum și corelarea lor cu solicitarea exterioară se află cu ajutorul relațiilor de echivalență (21) și (22):

$$2\int_0^a n_x\,dy+\iint_{(i)}E\varepsilon^{(z)}\,dA=0, \tag{21}$$

$$2\int_0^a n_x\,w\,dy+2\int_0^a m_x\,dy+\iint_{(i)}E\varepsilon^{(z)}z\,dA=M. \tag{22}$$

Relația (21) exprimă că forța axială este nulă în oricare secțiune a barei, iar relația (22) că suma momentelor forțelor interioare față de axa Δ (sau altă axă paralelă cu Δ) este egală cu solicitarea exterioară de încovoiere, M.

Relaţiile de echivalenţă (21) şi (22) pot fi utilizate după prelucrarea lor prin înlocuirea mărimilor n_x, m_x şi $\varepsilon^{(z)}$ cu expresiile lor deja cunoscute, şi efectuarea integralelor.

Prelucrarea condiţiei de forţă axială (21):

$$2\int_0^a Eh\left(\varepsilon - \frac{w}{\rho}\right)dy + \iint_{(i)} E\left[\varepsilon - z\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right]dA = 0,$$

$$A_t E\varepsilon - 2\frac{Eh}{\rho}\int_0^a w\,dy + E\varepsilon A_i - E\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)A_i d = 0. \tag{23}$$

S-a notat cu A_t aria tălpii ($A_t = 2ha$), cu A_i aria inimii, şi cu d distanţa de la centrul de greutate al inimii la axa Δ.

Ţinîndu-se seama de expresia săgeţii, $\int w\,dy$ poate fi adusă la forma (24)

$$\int_0^a w_{(y)}\,dy = a\left(\rho\varepsilon + \frac{q\rho^2}{Eh}\right)[1 - F_1(\alpha a)] - a^3\left[\frac{m}{D} + \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right]F_2(\alpha a), \tag{24}$$

unde $F_1(\alpha a)$ şi $F_2(\alpha a)$ sînt funcţiile adimensionale de αa date mai jos,

$$F_1(\alpha a) = \frac{1}{\alpha a}\frac{\operatorname{sh} 2\alpha a + \sin 2\alpha a}{\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\alpha a + 2}, \tag{25}$$

$$F_2(\alpha a) = \frac{1}{(\alpha a)^3}\frac{\operatorname{ch}\alpha a \sin\alpha a - \operatorname{sh}\alpha a \cos\alpha a}{\operatorname{ch} 2\alpha a + \cos 2\alpha a + 2}. \tag{26}$$

Înlocuind pe (24) în (23) se obţine (după efectuarea unor reduceri) ultima formă a condiţiei de forţă axială nulă:

$$\varepsilon\left[\frac{A_i}{A_t} + F_1(\alpha a)\right] = d\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\frac{A_i}{A_t} + \frac{q\rho}{Eh}[1 - F_1(\alpha a)] - \frac{a^2}{\rho}\left[\frac{m}{D} + \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right]F_2(\alpha a). \tag{27}$$

Relaţia (27) reprezintă corelaţia între ρ şi ε la o grindă T cu talpa lată flexibilă solicitată la încovoiere.

Prelucrarea condiției de moment încovoietor (22).

$$M = 2\int_0^a Eh\left(\varepsilon - \frac{w}{\rho}\right) w\,\mathrm{d}y - 2\int_0^a D\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} + \mu\, w''\right)\mathrm{d}y + \\ + \iint_{(i)} E\left[\varepsilon - z\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right] z\,\mathrm{d}A. \tag{28}$$

Neglijînd $\frac{w^2}{\rho}$ ca variație de ordinul II, efectuînd integralele care nu depind de săgeata tălpii, obținem

$$\frac{M}{E} = 2\,h\varepsilon\int_0^a w\,\mathrm{d}y - 2\,\frac{Da}{E}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - 2\,\frac{\mu D}{E}\int_0^a w''\,\mathrm{d}y + \varepsilon A_i\, d - \\ - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) I_{i\Delta}, \tag{29}$$

unde A_i și d au semnificațiile date anterior, iar $I_{i\Delta}$ este momentul de inerție al inimii față de Δ.

Procedînd ca și pentru $\int_0^a w\,\mathrm{d}y$, $\int_0^a w''\,\mathrm{d}y$ poate fi adusă la forma

$$\int_0^a w''\,\mathrm{d}y = \frac{Eh}{\rho D}\,a^3\left(\varepsilon + \frac{q\rho}{Eh}\right) F_2(\alpha\, a) - a\left[\frac{m}{D} + \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right] F_1(\alpha\, a), \tag{30}$$

funcțiile $F_1(\alpha\, a)$ și $F_2(\alpha\, a)$ fiind cele definite prin (25) și (26)

Folosind notațiile

$$I^*_\Delta = I_{i\Delta} + I^*_{i\Delta}; \qquad I^*_{i\Delta} = 2\,\frac{D}{E}\,a = \frac{I_{i\Delta}}{1 - \mu^2},$$

ținînd seama de (24) și (30), printr-o grupare convenabilă a termenilor, se obține expresia finală a momentului încovoietor la grinzile T cu talpă lată flexibilă.

$$\frac{M}{E} = -I^*_\Delta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) + \varepsilon \cdot A_i\mathrm{d} + \\ + A_i\left(\varepsilon + \frac{q\rho}{Eh}\right)\left\{\varepsilon\rho\,[1 - F_1(\alpha\, a)] - \frac{\mu a^2}{\rho}\,F_2(\alpha\, a)\right\} - \tag{31}$$

$$- \left[\frac{m}{D} + \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right]\,[\varepsilon A_i a^2\, F_2\,(\alpha a) - \mu\, I^*_{i\Delta} F_1(\alpha\, a)].$$

Cu scopul de a uşura operarea cu funcţiile $F_1(\alpha a)$ şi $F_2(\alpha a)$, au fost calculate şi întabulate valorile acestora pentru valori ale argumentului αa variind într-un interval suficient de lung care să includă cazurile uzuale pînă spre limita lor teoretică de alcătuire şi solicitare; tabelele se află anexate la lucrare.

Argumentul αa se calculează cu relaţia $\alpha a = \sqrt[4]{\frac{E h a^4}{4 D \rho^2}}$, (32)

ceea ce, pentru $\mu = 0{,}3$, înseamnă $\alpha a = 1{,}285 \sqrt{\frac{a}{h} \cdot \frac{a}{\rho}}$.

Relaţiile (19) şi (20), care definesc săgeata w, împreună cu relaţiile de echivalenţă (27) şi (31), iar la nevoie şi cu relaţiile fizice (6'), (7') şi (8'), sînt de natură să dea o imagine completă a încovoierii grinzilor T cu talpă lată pentru tipul de deformată acceptat.

Se ştie că un calcul de ordinul II oferă, de regulă, şi posibilitatea aprecierii stabilităţii tipului de deformată luat în considerare; problema de stabilitate inclusă în calculul de ordinul II la care ne referim caută să răspundă la următoarea întrebare: există un moment încovoietor M pentru care o deformată a tălpii, simetrică faţă de planul de simetrie al grinzii şi identică în toate secţiunile normale pe axa grinzii, să fie instabilă (păstrîndu-şi aceste caracteristici)?

Este cunoscut că o situaţie de instabilitate a deformatei unei structuri, *în sfera micilor deplasări*, se reflectă în calcul fie prin nedeterminarea factorului amplitudine (dacă pierderea stabilităţii se face prin flambaj) fie prin valori infinite ale acestui factor (dacă pierderea stabilităţii se realizează prin deformare continuă).

De la început se pot face două precizări şi anume:

1. Pentru valori finite ale solicitării exterioare M, alungirea ε este finită.

2. Oricare ar fi valoarea argumentului αa, trinomul ch $2\alpha a$ + + cos $2\alpha a$ + 2 este diferit de zero.

O primă observaţie asupra expresiilor $w_{1(y)}$ şi $w_{2(y)}$ ne arată că o eventuală situaţie de instabilitate ar putea avea loc doar pentru $\rho = \pm \infty$ şi $\alpha = 0$, care conduc la nedeterminări de tipul $0 \cdot \infty$.

Este, evident, că $1/\rho_0$ va trebui să fie diferită de zero, în caz contrar ar însemna să căutăm situaţia de instabilitate a unei grinzi nesolicitate, ceea ce ar constitui o problemă absurdă.

Ca o primă consecinţă a celor arătate, rezultă că un moment critic M, dacă există, va trebui să fie cel care realizează îndreptarea barei, deformata w în acest caz trebuind să fie nedeterminată sau infinită.

Ţinînd seama de relaţia existentă între α şi ρ se calculează limitele spre care se tind $w_{1(y)}$ şi $w_{2(y)}$ atunci cînd α tinde către zero

$$\lim_{\alpha \to 0} w_{1(y)} = \frac{q}{24 D} y^2 (y^2 - 4 a y + 6 a^2),$$

$$\lim_{\alpha \to 0} w_{2(y)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{m}{D} - \mu \frac{1}{\rho_0} \right) y^2.$$

Întrucît ambele limite sînt determinate și finite rezultă că săgețile w ale tălpii, de tip $w_{(y)}$, la o grindă T cu talpa lată, *sînt stabile* oricare ar fi valoarea solicitării globale de încovoiere.

Este util de făcut cîteva considerații privind *calculul efectiv al eforturilor* într-o grindă T cu talpă lată solicitată la încovoiere dreaptă.

În prealabil, trebuie arătat ce devin relațiile (27) și (31) în cazul cînd se neglijează efectul flexibilității tălpii

$$\varepsilon\left(\frac{A_i}{A_t}+1\right)=d\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{A_i}{A_t}, \tag{27'}$$

$$\frac{M}{E}=-I_\Delta\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)+\varepsilon A_t d. \tag{31'}$$

Eliminînd ε între (27') și (31'), obținem

$$M=E\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\left(-I_\Delta+d^2\frac{A_i^2}{A}\right),$$

din care se explicitează curbura barei deformate $1/\rho$ la nivelul axei Δ, curbură rezultată printr-un calcul elementar

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_0}+\frac{M}{E\left(-I_\Delta+d^2\dfrac{A_i^2}{A}\right)}. \tag{33}$$

Specificul relațiilor de calcul ne obligă la parcurgerea unor etape a căror succesiune este următoarea :

I. Cu relația (33) se determină prin calcul elementar curbura barei deformate corespunzătoare momentului exterior M.

II. Pentru această curbură se găsește α a cu (32) și ε cu (27).

III. Se calculează cu (31) noul moment încovoietor exterior M'.

Dacă între momentul inițial M și cel obținut în urma etapei III, M', diferența este nesemnificativă *), rezultă că nu este necesară efectuarea calculului de încovoiere care să țină seama de flexibilitatea tălpii ; în caz contrar efectuarea calculului exact se impune.

În această ultimă eventualitate se caută prin iterații acea rază de curbură ρ căreia îi corespunde, după parcurgerea repetată a etapelor II și III, un moment rezultat din calcul egal cu M.

Dacă notăm cu $M^{(k)}$ momentul încovoietor corespunzător lui $\rho^{(k)}$, raza de curbură folosită ca punct de plecare în treapta (k) a iterației, recomandăm ca raza de curbură $\rho^{(k+1)}$ cu care se pleacă în noua interație să se calculeze cu relația

$$\frac{1}{\rho^{(k+1)}}=\frac{1}{\rho_0}+\frac{M}{M^{(k)}}\left[\frac{1}{\rho^{(k)}}-\frac{1}{\rho_0}\right]. \tag{34}$$

* În finalul lucrării se dau lămuriri cu privire la „semnificativ" sau „nesemnificativ" în calculul de ordinul II.

În mod deliberat nu am precizat limitele „semnificativului" în diferența $[M^{(k)} - M]/M$ ele fiind în dependență de pretențiile calculului (importanța în structură a elementului calculat, caracterul ipotezei de încărcare, natura materialului din care este alcătuită grinda, mijloacele folosite pentru efectuarea calculelor numerice etc.) și sînt la aprecierea celui ce le efectuează.

După ce au fost găsite mărimile ρ, α și ε care asigură echivalența eforturilor interioare cu momentul încovoietor M, se calculează coeficienții $C_1, \ldots, C_4$ din expresia săgeții w.

Eforturile secționale n_x, m_x și m_y se află înlocuind pe w și w'' în (6'), (7') și (9').

Primită la redacție la 12 iunie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. S. D. Ponomariov, și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. I., București, Edit. tehnică, 1960.
2. D. Coșa, *Contribuții la studiul stabilității și calculului de ordinul II al structurilor plane din bare (cadre) prin metoda integrală, directă aproximativă* (teză de doctorat), I.C.B. 1970.
3. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Teoria plăcilor plane și curbe*, București,, Edit. tehnică, 1968.
4. P. Mazilu, *Lecții de statică neliniară*, predate la Institutul de construcții București,în 1954.

ASUPRA LEGII FIZICE A BETONULUI ÎN DOMENIUL CURGERII LENTE LINIARE

de D. CONSTANTINESCU

Institutul de construcții București

În ultimii ani CEB—FIP și ACI au propus noi grafice sau formule pentru funcția de curgere lentă φ, care sintetizează rezultatele studiilor experimentale efectuate în Europa și America pe o perioadă de peste 40 ani.

În lucrare se compară curbele de curgere lentă sub $\sigma(t) = \text{const.}$ și curbele de relaxare sub $\varepsilon(t) = \text{const.}$ obținute aplicînd propunerile CEB—FIP și ACI. Se propun de asemenea formule care aproximează foarte bine graficele indicate de CEB—FIP pentru funcția φ și care permit totodată scrierea legii fizice a betonului solicitat monoaxial în domeniul curgerii lente liniare, sub forma unei ecuații diferențiale liniare de ordinul I sau II.

Comportarea betonului sub încărcări monoaxiale este descrisă de o suprafață reprezentată în sistemul $\sigma - \varepsilon - t$ (suprafață caracteristică), care generalizează curba caracteristică $\sigma - \varepsilon$ a materialelor cu o comportare invariantă în raport cu timpul t, măsurat din momentul aplicării încărcării.

Ecuația suprafeței caracteristice, analog ecuației curbei caracteristice, reprezintă legea fizică a betonului și este o relație între σ, ε și t. Atunci cînd betonul este încărcat cu $\sigma(t)$, legea fizică permite stabilirea lui $\varepsilon(t)$, iar atunci cînd betonul este încărcat cu $\varepsilon(t)$ legea fizică permite stabilirea lui $\sigma(t)$. Din punct de vedere geometric curbele $\varepsilon[t, \sigma(t)]$ și, respectiv, $\sigma[t, \varepsilon(t)]$, care se obțin, reprezintă intersecția suprafeței caracteristice a betonului cu suprafața cilindrică $\sigma(t)$ și, respectiv, $\varepsilon(t)$.

Deși curgerea lentă a betonului, cum este denumită în mod global comportarea sub încărcări dependentă de timp, este un fenomen pus în evidență încă din 1906 și deși au trecut mai bine de 40 ani de cînd este studiată experimental, evaluarea în proiectare a efectelor ei structurale se face cu procedee incomode și incerte.

Această stare de lucruri se datorește în mare măsură și faptului că nu se dispune deocamdată de o lege fizică care să modeleze suficient de corect comportarea reală a betonului și să permită în același timp o manipulare comodă din punct de vedere matematic.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 1, 1974, P.191—217

În ultimii ani, au apărut lucrări care sintetizează bogatul material faptic rezultat din încercări şi dau o imagine unitară asupra ansamblului fenomenului de curgere lentă [1], [10], [11], [12]. Pe baza lor au apărut propuneri oficiale, sub formă de expresii matematice sau grafice, pentru funcţia de curgere lentă liniară a betonului simplu, solicitat monoaxial

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_\varphi(t, t_0)}{\varepsilon_{el}(t_0)}, \tag{1}$$

unde $\varepsilon_\varphi(t,t_0)$ este deformaţia de curgere lentă la timpul t, datorită unui efort σ = const., aplicat la vîrsta t_0 a betonului, iar $\varepsilon_{el}(t_0)$ este deformaţia elastică (instantanee) produsă de acelaşi efort σ. Faţă de expresia propusă de F. Dischinger în 1937 [8], aceste noi recomandări iau în considerare mai mulţi factori şi dau rezultate mai apropiate de cele reale.

În cele ce urmează, pe baza celor mai importante rezultate obţinute pînă în prezent, se prezintă aspectele matematice şi fizice pe care le implică stabilirea unei legi fizice a betonului, care, aproximînd suficient de exact rezultatele experienţelor, să permită rezolvarea analitică a problemelor practice.

Cele ce urmează sînt limitate la betonul simplu, solicitat monoaxial în domeniul curgerii lente liniare. Aceste limitări reflectă de fapt stadiul actual al cunoştinţelor dobîndite prin încercări : domeniul curgerii lente neliniare este extrem de puţin cercetat, iar din puţinele date experimentale existente asupra curgerii lente a betonului supus la stări de eforturi plane sau spaţiale a rezultat că legile fizice în aceste situaţii se pot exprima cu ajutorul legii fizice a betonului solicitat monoaxial [5].

Se va folosi ipoteza simplificatoare că modulul de elasticitate E al betonului rămîne constant în timp. Această ipoteză este justificată de încercări, care au dovedit că influenţa vîrstei t_0 a betonului asupra lui E este neglijabilă în raport cu influenţa asupra curgerii lente a betonului [4]. În această privinţă există şi păreri diferite [3].

A. FORMA GENERALĂ A LEGII FIZICE A BETONULUI SIMPLU, SOLICITAT MONOAXIAL ÎN DOMENIUL CURGERII LENTE LINIARE

Suprafaţa caracteristică a betonului poate fi descrisă folosind diferite curbe caracteristice obţinute experimental. Cele mai simple cazuri sînt însă următoarele două :

— situaţia cînd betonul este încărcat monoaxial la vîrsta t_0 cu un efort constant $\sigma\ (t,t_0) = \sigma_0$, denumită „problema de curgere lentă" sau „cazul efortului σ impus" ;

— situaţia cînd betonul este încărcat monoaxial la vîrsta t_0 cu o deformaţie constantă $\varepsilon(t,\ t_0) = \varepsilon_0$, denumită „problema de relaxare" sau „cazul deformaţiei ε impuse".

Din punct de vedere fizic aceste două situaţii reprezintă cazuri particulare ale celor două posibilităţi care apar în practică : încărcarea structurii cu forţe date şi, respectiv, încărcarea structurii cu deformaţii impuse.

Din punct de vedere geometric aceste două situații corespund intersecției suprafeței caracteristice a betonului cu planuri paralele cu cele de referință $\varepsilon\ O\ t$ și, respectiv, $\sigma\ O\ t$ (fig. 1).

Avînd în vedere importanța și semnificația practică a acestor două situații, încercările experimentale s-au efectuat, aproape în exclusivitate,

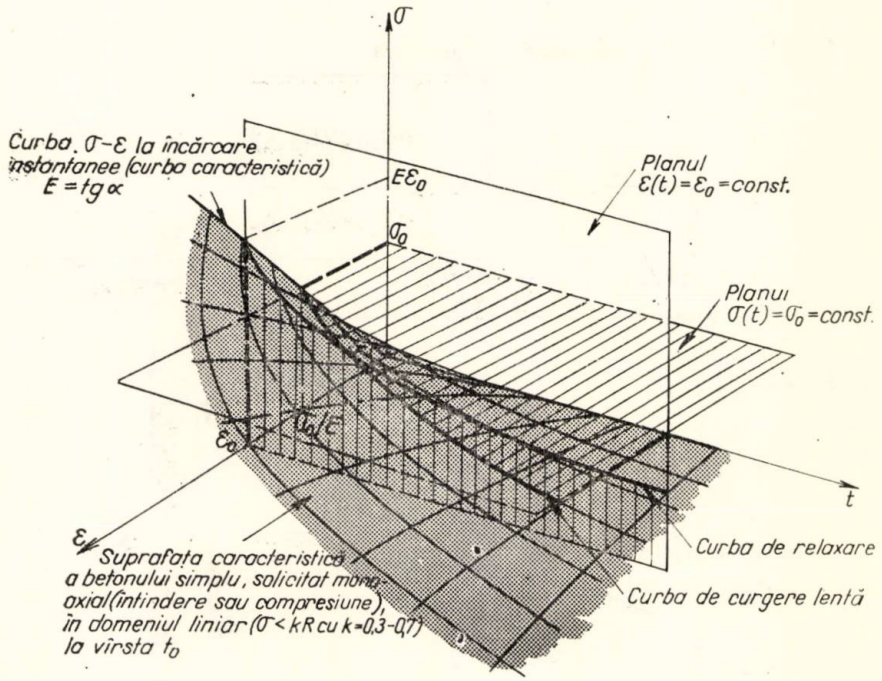


Fig. 1

considerînd fie problema curgerii lente, fie problema de relaxare, astfel încît cunoștințele acumulate pînă în prezent asupra comportării reale în timp a betonului se referă la cele două familii de curbe (de curgere lentă și de relaxare).

Din aceste motive se urmărește ca suprafața caracteristică a betonului să se genereze cu ajutorul uneia din cele două familii de curbe.

Curbele de curgere lentă, de exemplu, au ecuația

$$\varepsilon(t,\ t_0) = \varepsilon_{el}(t_0) + \varepsilon_{\varphi}(t,\ t_0), \tag{2}$$

unde $\varepsilon(t,\ t_0)$ este deformația totală produsă la timpul t de către σ_0 aplicat la vîrsta t_0 și menținut constant pe tot intervalul t, iar $\varepsilon_{el}(t_0)$ și $\varepsilon_{\varphi}(t,t_0)$ au semnificațiile menționate mai înainte.

Pe baza legii lui Hooke cu $E = \text{const.}$, și a relației (1) rezultă

$$\varepsilon(t,\ t_0) = \frac{\sigma_0}{E}\,[1 + \varphi(t,\ t_0)], \tag{2a}$$

unde funcția de curgere lentă φ depinde de t, de t_0 și de ceilalți factori de care depinde curgerea lentă a betonului, cu excepția lui σ_0, deoarece s-a considerat domeniul curgerii lente liniare.

Conform principiului suprapunerii efectelor (fig. 2), care s-a dovedit în încercări suficient de exact indiferent de semnul lui σ (întindere

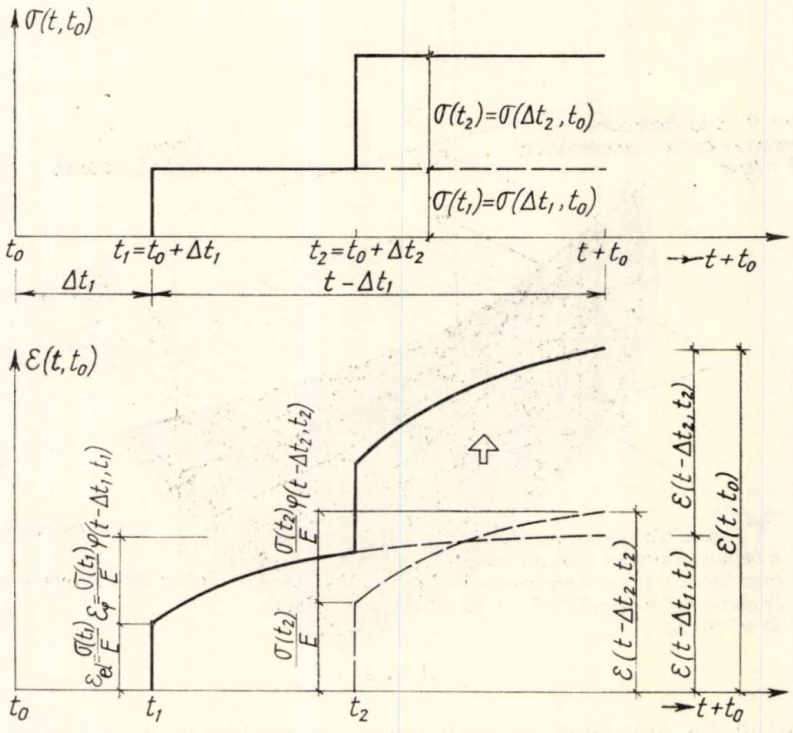


Fig. 2

sau compresiune, încărcare sau descărcare) și conform proporționalității exprimate de relația (2a), deformația $\varepsilon(t, t_0)$ produsă după un timp t de către un efort care apare la vîrsta t_0 și variază după legea $\sigma(t, t_0)$ devine

$$\varepsilon(t, t_0) = \sigma(0, t_0)\,\frac{1+\varphi(t, t_0)}{E} + \int_0^t \frac{\mathrm{d}\,\sigma(\tau, t_0)}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{1+\varphi(t-\tau, t_0+\tau)}{E}\,\mathrm{d}\tau. \quad (3)$$

Ecuația (3) reprezintă legea fizică a betonului (ecuația suprafeței caracteristice din figura 1), stabilită folosind curbele de curgere lentă. O relație similară a fost stabilită de Boltzmann încă în 1878 în teoria viscoelasticității liniare.

Curbele de relaxare, analog relației (2), au ecuația

$$\sigma(t, t_0) = \sigma_{el}(t_0) - \sigma_{\varphi}(t, t_0), \quad (4)$$

unde $\sigma(t, t_0)$ este valoarea efortului σ la timpul t după încărcarea betonului de vîrstă t_0 cu o deformație $\varepsilon_0 = \text{const.}$, $\sigma_{el}(t_0)$ este efortul σ produs instantaneu de ε_0, iar $\sigma_\varphi(t, t_0)$ este relaxarea de efort, adică valoarea cu care scade σ în intervalul de timp t, datorită curgerii lente a betonului. Dacă se ține seama de legea lui Hooke cu $E = \text{const.}$, pentru $\sigma_{el}(t_0)$ și dacă se definește ca funcție de relaxare raportul
independent de ε_0 în domeniul curgerii lente liniare, relația (4) devine

$$R(t, t_0) = \frac{\sigma_\varphi(t, t_0)}{\sigma_{el}(t_0)}, \tag{5}$$

relația (4) devine

$$\sigma(t, t_0) = E\,\varepsilon_0[1 - R(t, t_0)]. \tag{4a}$$

Aplicînd de asemenea principiul suprapunerii efectelor și folosind relația (4a), efortul $\sigma(t,t_0)$ produs după un timp t de o deformație impusă a vîrsta t_0 și care variază după legea $\varepsilon(t, t_0)$ devine

$$\sigma(t,t_0) = E\varepsilon(0,t_0)\cdot[1 - R(t,t_0)] + \int_0^t \frac{\mathrm{d}\varepsilon(\tau, t_0)}{\mathrm{d}\tau} E[1 - R(t-\tau, t_0+\tau)]\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

Ecuația (6) reprezintă, de asemenea, legea fizică a betonului, dar spre deosebire de (3) este stabilită folosind curbele de relaxare.

Formele (3) și (6) ale legii fizice ale betonului se pot simplifica dacă se integrează prin părți integralele din aceste relații și dacă se ține seama că funcțiile de curgere lentă și relaxare au valorile inițiale

$$\varphi\,(0, t_0) = 0 \quad \text{și} \quad R\,(0, t_0) = 0. \tag{7}$$

Se obțin relațiile

$$\varepsilon(t,t_0) = \frac{\sigma\,(t, t_0)}{E} - \int_0^t \frac{\sigma(\tau,\ t_0)}{E} \frac{\partial\varphi(t-\tau, t_0+\tau)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau, \tag{3a}$$

$$\sigma\,(t, t_0) = E\varepsilon\,(t,t_0) + \int_0^t E\varepsilon\,(\tau,\ t_0)\,\frac{\partial R(t-\tau, t_0+\tau)}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{6a}$$

în care $\partial\varphi/\partial\tau$ și $\partial R/\partial\tau$ au valori negative.

Cu ajutorul legii fizice scrisă sub formele (3) sau (6) se poate rezolva teoretic, în limitele ipotezelor admise, orice problemă de curgere lentă sau relaxare, dacă se cunoaște legea de desfășurare în timp a cauzei, efort sau deformație impusă.

Din punct de vedere matematic folosirea uneia din cele două grupe de relaţii conduce la situaţii diferite. Astfel, pentru cazul în care se dă $\sigma\, t,\ t_0)$, deformaţia $\varepsilon(t,t_0)$ poate rezulta prin integrare directă din relaţiile (3) sau (3a) sau poate rezulta ca soluţia unei ecuaţii integro-diferenţiale, respectiv a unei ecuaţii integrale Volterra de speţa a doua din relaţiile (6) şi (6a). În primul caz se foloseşte ca funcţie primară funcţia de curgere lentă φ, iar în al doilea funcţia de relaxare R. După natura funcţiei primare şi după natura cauzei, în practică pot apare situaţiile din tabela 1 [4].

Tabela 1

Funcţia primară	Relaţia folosită	Metoda folosită pentru cazul	
		$\sigma(t,t_0)$ impus	$\varepsilon(t,\ t_0)$ impus
$\varphi(t,\ t_0)$	(3a)	Integrare directă	Rezolvarea unei ecuaţii Volterra
$R(t,\ t_0)$	(6a)	Rezolvarea unei ecuaţii Volterra	Integrare directă

Ideal, din punct de vedere matematic, ar fi dacă în fiecare situaţie s-ar folosi integrarea directă. În practică însă se impune folosirea expresiilor (3) sau (3a) ale legii fizice a betonului, deoarece încercările în marea lor majoritate au fost probleme de curgere lentă, astfel că funcţia $\varphi(t,\ t_0)$ este mai bine stăpînită.

Pentru a fi corectă şi comodă, funcţia primară φ cu ajutorul căreia se exprimă legea fizică a betonului trebuie să îndeplinească următoarele condiţii :

1. Să modeleze cît mai exact fenomenul real de curgere lentă şi să permită considerarea în calcul a influenţei tuturor factorilor importanţi :

2. Să permită rezolvarea analitică a legii fizice a betonului. Posibilităţile de rezolvare analitică a ecuaţiilor Volterra sînt foarte limitate şi în plus sînt puţine situaţiile practice în care se poate accepta rezolvarea numerică a legii fizice a betonului;

3. Să modeleze cît mai bine fenomenul real de relaxare.

Teoretic, dacă funcţia φ ar modela exact fenomenul de curgere lentă, atunci, cu ajutorul relaţiilor (3) sau (3a), s-ar putea modela exact şi fenomenul de relaxare. Cu cît funcţia φ modelează mai aproximativ fenomenul real de curgere lentă, cu atît ecuaţiile (3) sau (3a) aproximează mai grosolan suprafaţa caracteristică reală a betonului şi deci funcţia de relaxare $R_\varphi(t,t_0)$ stabilită cu ajutorul ei diferă mai mult de funcţia reală $R(t,\ t_0)$. R_φ se poate stabili în funcţie de φ cu ajutorul ecuaţiei Volterra

$$R_\varphi\,(t,\ t_0) - \int_0^t R\varphi(\tau, t_0)\,\frac{\partial\varphi(t-\tau,\ t_0+\tau)}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau = \varphi(t,\ t_0), \tag{8}$$

dedusă din (3a) cu ajutorul relaţiei (4a), dacă $\varepsilon\ (t,\ t_0) = \varepsilon_0 = \text{const.}$

În cele ce urmează se va examina felul în care cele mai noi propuneri oficiale pentru funcţia $\varphi(t,\ t_0)$ îndeplinesc cele trei condiţii menţionate.

B. FUNCȚIA DE CURGERE LENTĂ LINIARĂ

De-a lungul timpului au fost propuse numeroase legi pentru funcția φ [5]. În majoritatea cazurilor aceste legi au forma

$$\varphi(t, t_0) = \varphi(\infty, 28) \cdot k(t_0) \cdot f(t), \tag{9}$$

în care φ $(\infty, 28)$ este valoarea finală a lui φ pentru un beton cu vîrsta $t_0 = 28$ zile și conține influența tuturor factorilor cu excepția vîrstei betonului, $k(t_0)$ modelează influența vîrstei betonului asupra curgerii lente, iar $f(t)$ descrie desfășurarea în timp a fenomenului.

În lucrare vor fi analizate cele mai recente propuneri, care însumează principalele concluzii experimentale obținute pînă în prezent:

— recomandările CEB—FIP din 1969, adoptate în 1970 la simpozionul CEB—FIP de la Praga;

— recomandările Comitetului ACI 209, adoptate în septembrie 1971 la simpozionul ACI de la Detroit;

— propunerile unui comitet specializat al CEB—FIP din 1972.

Recomandările CEB—FIP/1969 [16] propun pentru funcția de curgere lentă grafice care permit calculul valorilor lui $\varphi(t, t_0)$, ținînd seama de principalii factori care influențează fenomenul.

Valoarea φ $(\infty, 28)$ din relația (9) se poate deduce sub forma

$$\varphi(\infty, 28) = k(b) \cdot k(w) \cdot k\left(\frac{v}{s}\right), \tag{10}$$

unde k (b), $k(w)$ și $k(v/s)$ sînt coeficienți care țin seama de dozajul de ciment și raportul a/c, de umiditatea $w\,\%$ a mediului și de raportul v/s între volumul piesei și suprafața ei expusă uscării (fig. 3).

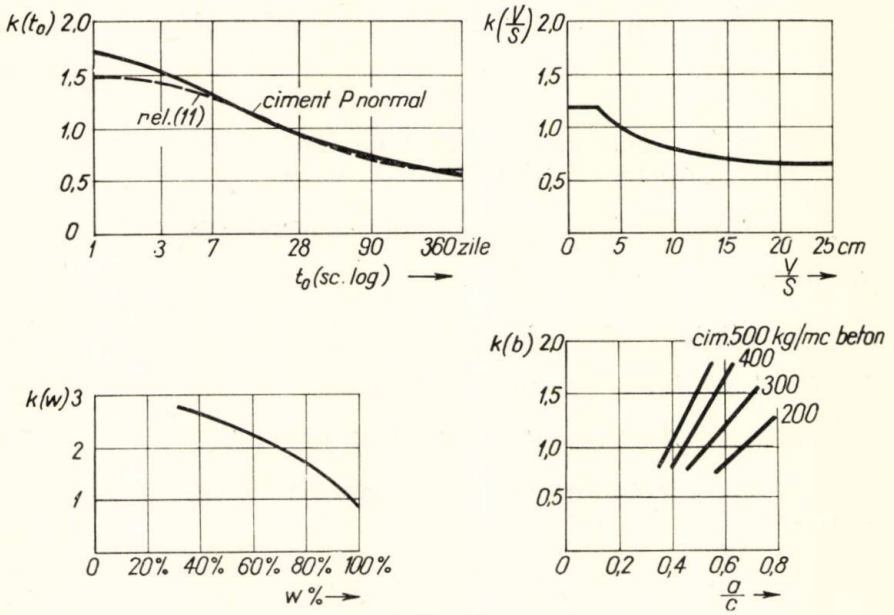


Fig. 3

Coeficientul $k(t_0)$ se poate aproxima printr-o relație de tip Mc Henry [6]

$$k(t_0) = 0{,}5 + e^{-0{,}025t_0}, \quad t_0 \text{ în zile}, \tag{11}$$

iar $f(t)$ se poate aproxima prin relația (fig. 4) [6]

$$f(t) = 1 - e^{-1{,}6\sqrt{t}}, \quad t \text{ în zile}, \tag{12a}$$

astfel încît relația (9) devine

$$\varphi(t, t_0) = \varphi(\infty, 28) \cdot (0{,}5 + e^{-0{,}025t_0}) \cdot (1 - e^{-1{,}6\sqrt{t}}). \tag{13a}$$

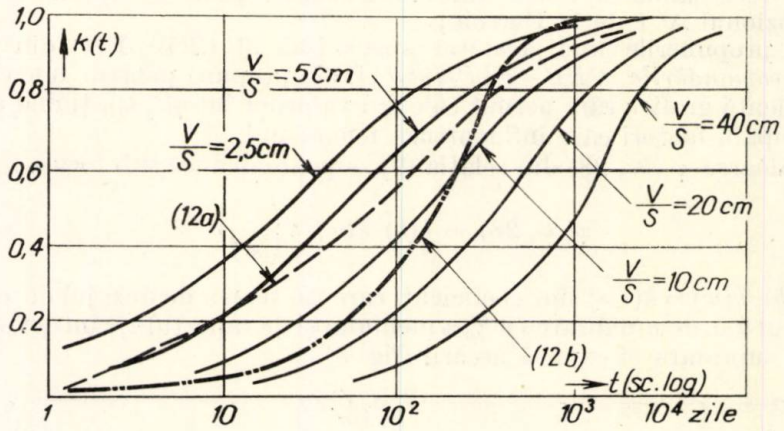


Fig. 4

O expresie mai aproximativă se obține dacă desfășurarea în timp a fenomenului se consideră după Dischinger, adică

$$f(t) = 1 - e^{-\beta t}, \quad \beta = 1{,}4/\text{ani} \simeq 0{,}00389/\text{zile}. \tag{12b}$$

Se obține

$$\varphi(t, t_0) = \varphi(\infty, 28) \cdot (0{,}5 + e^{-0{,}025t_0}) \cdot (1 - e^{-\beta t}). \tag{13b}$$

Comitetul 209 ACI [3] propune relațiile

$$\varphi(t, t_0) = \varphi(\infty, 28) \cdot 1{,}48 \; t_0^{-0{,}118} f(t), \tag{14}$$

unde, pentru elemente de dimensiuni obișnuite expuse la un climat blînd și neprotejate împotriva uscării,

$$f(t) = \frac{t^{0{,}6}}{10 + t^{0{,}6}}, \tag{15}$$

iar pentru betoane masive

$$f(t) = 0{,}113 \ \ln \ (1 + t), \tag{16}$$

t_0 și t fiind exprimați în zile.

Relația (15) se poate aproxima suficient de exact cu

$$f(t) = 1 - e^{-0{,}1\, t^{0{,}6}}, \tag{15a}$$

care are o formă similară cu (12a).

CEB—FIP [4] a propus în 1972 noi grafice pentru $\varphi\ (t, t_0)$, pe baza constatării experimentale că

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_r(t) + \varphi_i(t, t_0), \tag{17}$$

unde $\varphi_i(t, t_0)$ este o componentă care scade odată cu creșterea lui t_0, iar $\varphi_r(t)$ este independentă de vîrsta betonului. Pentru φ_r și φ_i se acceptă relații de forma

$$\varphi_r(t) = \varphi_{r\infty} \cdot f_r(t), \tag{18a}$$

$$\varphi_i(t) = \varphi_0 \ [f_i(t + t_0) - f_i(t_0)], \tag{18b}$$

unde φ_0 este dat în tabele funcție de $w\,\%$ și de dozajul betonului, f_i și f_r sînt date în grafice (fig. 5 și 6), iar $\varphi_{r\infty} \simeq 0{,}4$. Graficul lui f_i este dat funcție de valoarea parametrului

$$d_w = c\frac{2v}{s}, \tag{19}$$

unde c depinde de umiditatea w. În figura 6 sînt desenate graficele lui f_i pentru $d_w = 5$ și 40 cm, care pentru $w = 70\,\%$ corespund la $v/s = 1{,}7$ cm și respectiv 13,3 cm.

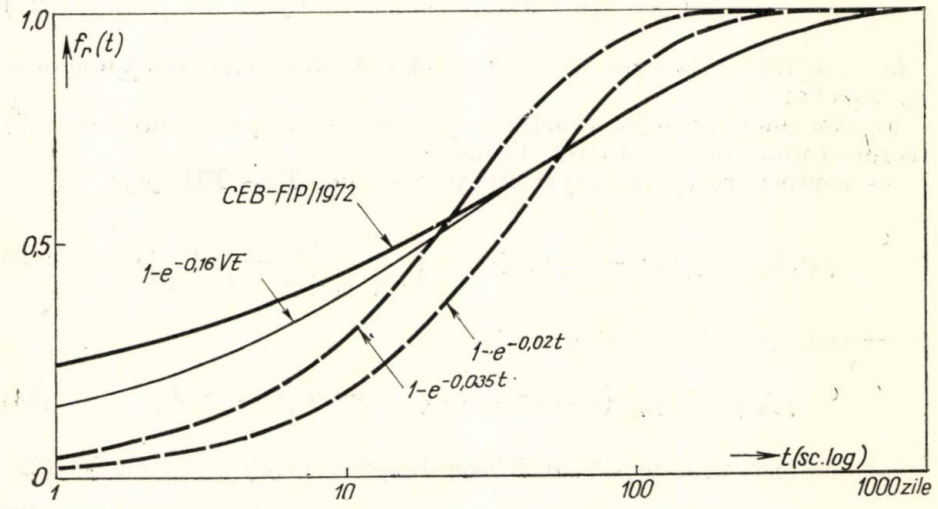


Fig. 5

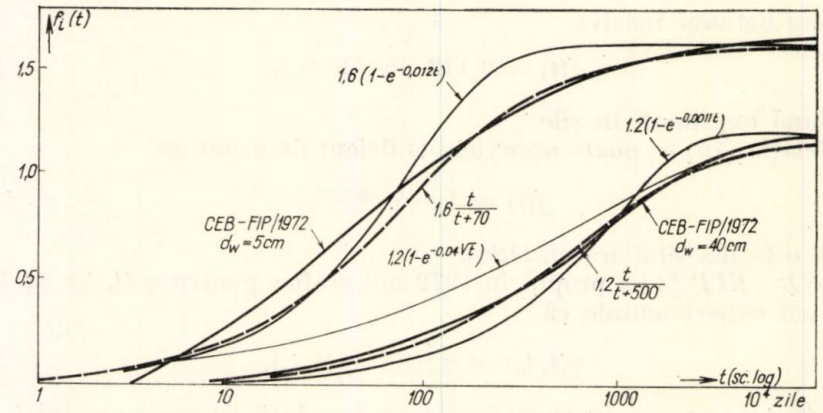


Fig. 6

În lucrarea [4] se propune aproximarea graficelor lui f_r și f_i cu relațiile (fig. 5 și 6)

$$f_r(t) = 1 - e^{-0{,}02\,t}, \tag{20}$$

$$f_i(t) = K_0 \frac{t + t_0}{t + t_0 - \delta}, \tag{21}$$

unde K_0 și δ depind de d_w (tabela 2).

În figurile 5 și 6 sînt trecute și alte expresii pentru f_r și f_i care pot aproxima graficele CEB—FIP. Se observă că pentru f_i se poate folosi expresia aproximativă

$$f_i(t + t_0) = K_0\ [1 - e^{-\beta_1 (t+t_0)}], \tag{22}$$

care face ca (18*b*) să ia o formă similară relației (13b). Valoarea β_1 depinde de d_w (tabela 2).

În continuare, pentru funcția de curgere lentă $\varphi(t, t_0)$ dată de (17) se va folosi una din următoarele forme :

— conform relațiilor (20) și (21) propuse de CEB—FIP [4] :

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{r\infty}(1 - e^{-\beta_2 t}) + \varphi_{i\infty}\left(\frac{t + t_0}{t + t_0 + \delta} - \frac{t_0}{t_0 + \delta}\right), \tag{23}$$

— conform relațiilor (20) și (22)

$$\varphi(t,\ t_0) = \varphi_{r\infty}\ (1 - e^{-\beta_2 t}) + \varphi_{i\infty}\ e^{-\beta_1 t_0}\ (1 - e^{-\beta_1 t}), \tag{24}$$

— conform propunerii lui Rüsch-Jungwirth [4] și a relației (22)

$$\varphi(t,\ t_0) = \varphi_{r\infty} + \varphi_{i\infty}\ e^{-\beta_1 t_0}\ (1 - e^{-\beta_1 t}), \tag{25}$$

unde

$$\varphi_{i\infty} = \varphi_0 \cdot K_0, \tag{26}$$

δ, K_0 şi β_1 depind de d_w, $\varphi_{r\infty}$ şi β_2 sînt constante, iar φ_0 şi c depind de w (tabela 2).

Tabela 2

d_w	$\varphi_{r\infty}$	β_2	K_0	δ	β_1	pentru $w = 70\%$		
						φ_0	c	$\varphi_{i\infty}$
5 cm	0,4	0,02	1,6	70	0,012	2,0	1,5	3,2
40 cm			1,2	500	0,0011			2,4

Valorile finale $\varphi(\infty, t_0)$ pentru (23), şi, respectiv, (24) şi (25) devin

$$\varphi(\infty, t_0) = \varphi_{r\infty} + \varphi_{i\infty} \frac{\delta}{t_0 + \delta} \tag{27}$$

şi

$$\varphi(\infty, t_0) = \varphi_{r\infty} + \varphi_{i\infty}\, e^{-\beta_1 t_0}, \tag{28}$$

ultima relaţie fiind de acelaşi tip cu (11).

În figurile 7 — 11 sînt reprezentate funcţiile $\varphi(t, t_0)$ pentru $t_0 = 7$ zile, 28 zile, 100 zile, 1000 zile ($\sim$ 3 ani), 10.000 zile ($\sim$ 30 ani) conform propunerilor CEB—FIP/1969 — relaţia (13b), com. 209 ACI — relaţiile (14) + (15) şi (14) + (16), CEB — FIP/1972 — relaţiile (23) şi (24) — pentru $d_w = 5$ şi 40 cm.

În figura 12 sînt reprezentate valorile finale $\varphi(\infty, t_0)$ ale aceloraşi funcţii.

În toate aceste grafice valorile au fost raportate la $\varphi(\infty, 28)$ care înglobează influenţele celorlalţi factori care afectează curgerea lentă a betonului.

Examinînd graficele din figurile 7 — 12 se constată următoarele:

— Curbele sînt destul de împrăştiate în special la valori t_0 mici. Aceasta reflectă împrăştierea rezultatelor experimentale şi dificultăţile care apar la analitizarea fenomenului şi justifică adoptarea ca funcţii primare a acelor forme ale funcţiei $\varphi(t, t_0)$ care permit o rezolvare analitică a legii fizice a betonului.

— Curbele corespunzătoare relaţiei (24), propusă de autor, aproximează suficient de bine curbele corespunzătoare relaţiei (23), propusă în [4].

— Relaţia (13b), propusă de autor pentru aproximarea graficelor recomandate de CEB—FIP/1969, se încadrează în banda de variaţie a celorlalte curbe. Folosirea relaţiei (13a) ar fi permis o încadrare mai bună.

— Funcţiile $\varphi(t, t_0)$ propuse de ACI continuă să crească şi pentru $t > 30$ ani, mai pronunţat în cazul betoanelor masive. Dealtfel se observă că pentru $t > 10$ zile relaţia (16) conduce la o dreaptă cu ecuaţia

$$\varphi(t, t_0) = 0{,}26 \cdot \varphi(\infty, 28) \cdot \log t.$$

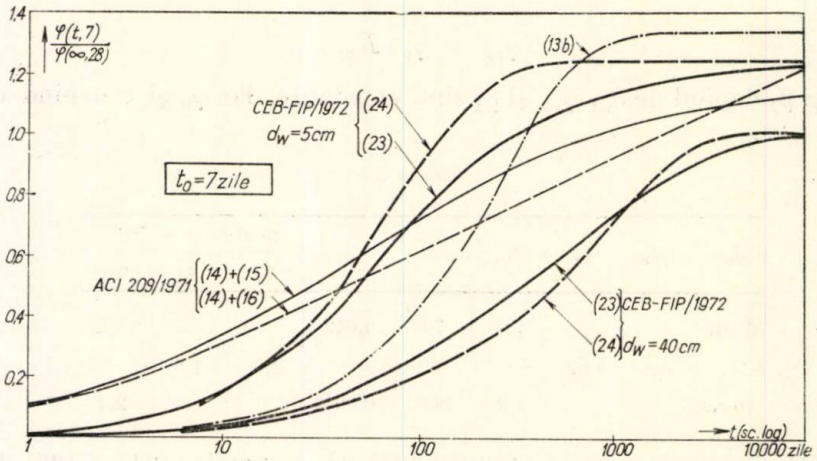


Fig. 7

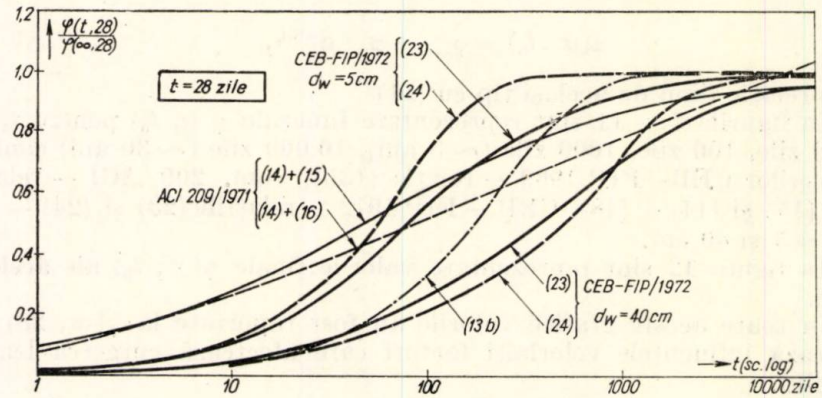


Fig. 8

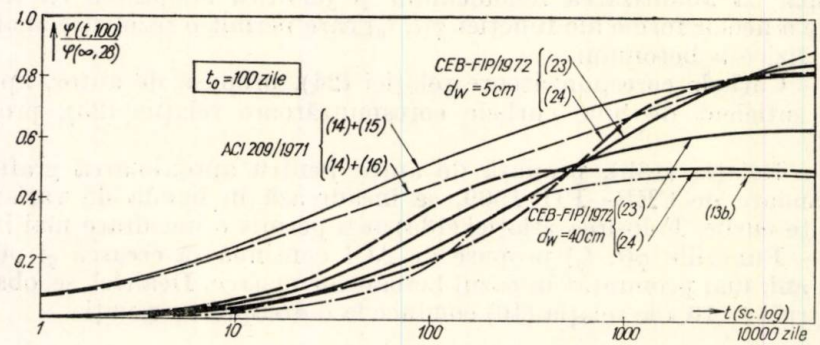


Fig. 9

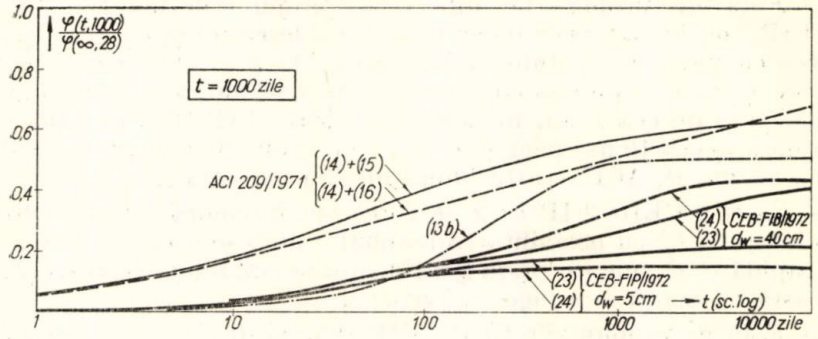


Fig. 10

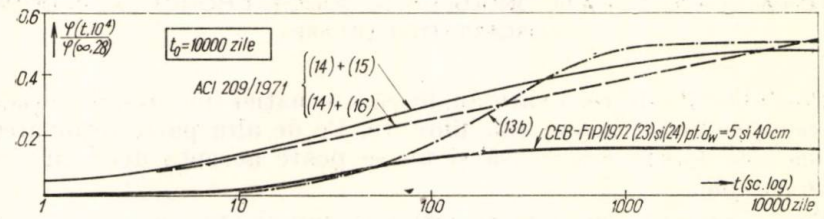


Fig. 11

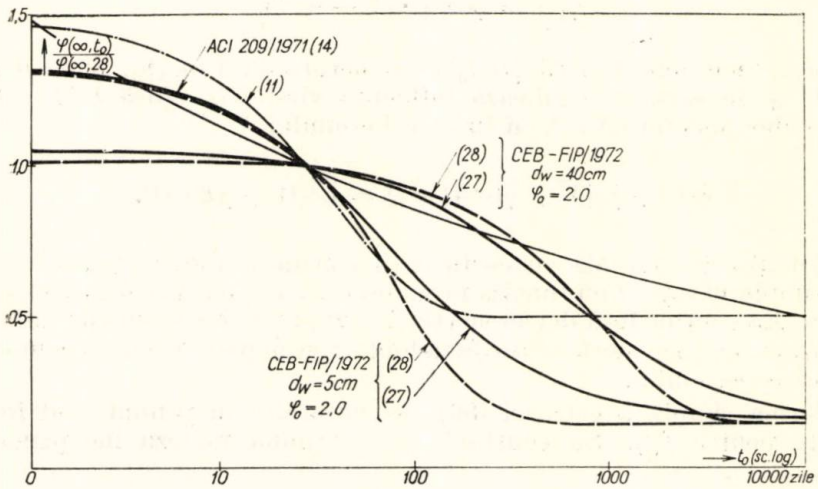


Fig. 12

— Față de propunerile din 1969, propunerile mai noi (ACI și CEB—FIP) consideră mai de lungă durată scăderea lui $\varphi(\infty, t_0)$ cu t_0, adică reducerea cu vîrsta a efectului îmbătrînirii. Dacă în 1969 valoarea lui t_0 peste care $\varphi(\infty, t_0)$ rămînea constantă și deci se putea considera „teoria eredității" era de cca 1 an, în noile rec. CEB—FIP/1972 această limită este împinsă la cca 10 ani pentru $d_w = 5$ cm. și 30 ani pentru $d_w = 40$ cm (fig. 12), iar în rec. ACI această limită nici nu mai apare.

— În rec. CEB—FIP/1972 se corelează influența vîrstei betonului asupra lui $\varphi(\infty, t_0)$ cu posibilitatea betonului de a se usca. La betoane cu uscare rapidă — d_w mic — vîrsta t_0 influențează mai mult valoarea $\varphi(\infty, t_0)$, dar această influență se stinge mai repede.

— Față de propunerile CEB—FIP/1969 și de ACI, noile propuneri CEB—FIP/1972 recomandă o scădere mai accentuată a lui $\varphi(\infty, t_0)$ la betoane de vîrstă înaintată. Astfel, $k(t_0)$ ajunge la t_0 de circa 30 ani la valoarea 0,15 în loc de 0,5.

C. EXPRESII ALE LEGII FIZICE A BETONULUI SIMPLU, SOLICITAT MONOAXIAL ÎN DOMENIUL CURGERII LENTE LINIARE

Posibilitățile de rezolvare analitică a ecuației integrodiferențiale (3) sau a ecuației Volterra (3a) sînt limitate. Pe de altă parte rezolvarea lor numerică este foarte laborioasă și nu se poate accepta decît în situații practice simple.

Pentru anumite forme matematice ale funcției primare $\varphi(t, t_0)$ ecuațiile (3) sau (3a) se pot reduce la ecuații diferențiale care permit o rezolvare analitică completă sau cel puțin o analitizare a efectului curgerii lente a betonului.

Astfel, introducînd în (3a) propunerea lui Dischinger

$$\varphi(t) = \varphi(\infty) \cdot (1 - e^{-\beta t}), \tag{29}$$

care corespunde unei funcții $\varphi(t, t_0)$ cu structura dată de (9), avînd $f(t)$ dat de (12b) și în care se neglijează influența vîrstei t_0, adică $k(t_0) = 1$, se obține cunoscuta formă a legii fizice a betonului [1])

$$\dot{\sigma}(t) + \beta\,[1 + \varphi(\infty)]\,\sigma(t) = E\dot{\varepsilon}(t) + \beta E\varepsilon\,(t). \tag{30}$$

Ecuația diferențială cu coeficienții constanți (30) se poate rezolva foarte simplu în raport cu funcția necunoscută: $\sigma(t)$ dacă se dă variația $\varepsilon(t)$ și invers. Ea conține însă defectele relației (29) : nu ține seama de influența vîrstei t_0, iar legea de desfășurare $f(t)$ adoptată se depărtează de la comportarea reală a betonului.

Forma simplă a ecuației (30) se datorește în primul rînd formei adoptate pentru $f(t)$. Se constată că menținînd ipoteza independenței

[1]) Pentru derivatele funcțiilor în raport cu timpul t se va folosi notația newtoniană.

în raport cu t_0, dar adoptînd pentru $f(t)$ o altă formă, spre exemplu cea dată de (12a), ecuaţia (3a) devine

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{\beta}{2\sqrt{t}}[1+\varphi(\infty)]\ \sigma(t) + \frac{\beta}{2\sqrt{t}}\varphi(\infty)A = E\dot{\varepsilon}(t) + \frac{\beta}{2\sqrt{t}}E\varepsilon(t), \quad (31)$$

unde

$$A = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau} e^{-\beta\sqrt{t-\tau}}\left[1 - \sqrt{\frac{t}{t-\tau}}\right]\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau} e^{-\beta\sqrt{t-\tau}}\,\mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{2\sqrt{t}}{\beta}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}e^{-\beta\sqrt{t-\tau}}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

şi deci nu se mai poate reduce la o ecuaţie diferenţială.

În acest paragraf vor fi analizate posibilităţile de simplificare matematică a legii fizice a betonului dată de (3) şi (3a), folosind funcţiile primare prezentate în § B.

Dacă se adoptă relaţia (13b), care aproximează propunerea CEB—FIP din 1969, legea fizică (3a) se poate reduce la expresii care fac posibilă rezolvarea analitică.

Astfel Arutiunian [2] a rezolvat ecuaţia Volterra (3a) cu ajutorul funcţiei Γ incomplete, adoptînd pentru $k(t_0)$ o expresie de tipul

$$k(t_0) = C_0 + \frac{C_1}{t_0}. \quad (11a)$$

Se poate arăta mai general că folosind în (9) o lege de desfăşurare $f(t)$ dată de (12b), ecuaţia (3a) se poate reduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul II cu coeficienţi variabili, indiferent de forma adoptată pentru $k(t_0)$.

Se obţine

$$\ddot{\sigma}(t, t_0) + \beta\dot{\sigma}(t, t_0)\,[1 + \varphi(\infty, t_0 + t)] = E\ddot{\varepsilon}(t, t_0) + \beta E\dot{\varepsilon}(t, t_0). \quad (32)$$

Expresia (32) generalizează forma (30) pentru cazul în care $\varphi(t,t_0)$ depinde de vîrsta t_0 a betonului în momentul încărcării, tot aşa cum relaţia (9) cu $f(t)$ dat de (12b) generalizează forma (29). Rezolvarea analitică a legii fizice (32) va depinde de forma adoptată pentru $k(t_0)$.

Dacă în locul lui $f(t)$ dat de (12b) se propune o altă expresie, mai apropiată de realitate, de exemplu cele date de (12a) sau (15a), atunci ecuaţia Volterra (3a) nu se mai poate reduce la ecuaţii diferenţiale simple. Se obţin ecuaţii Volterra de speţa a doua, singulare în punctul $\tau = t$, dar integrabile, care nu se mai pot rezolva analitic în cazul $\varepsilon(t)$ oarecare, ci numeric pentru fiecare caz $\varepsilon(t)$ dat [3], [4].

La o situaţie similară se ajunge şi dacă se foloseşte relaţia (23) propusă de CEB—FIP [4].

Dacă însă se folosesc propunerile autorului, relaţiile (24) şi (25), atunci legea fizică a betonului se poate exprima prin ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili de ordinul II şi, respectiv, I.

Folosind relaţia (24) în ecuaţia (3a), după o serie de operaţii de reducere şi derivare în raport cu t, se obţine

$$\ddot{\sigma}(t, t_0) + [\lambda + \beta_1 \cdot \varphi_i(\infty, t_0 + t)]\, \dot{\sigma}(t, t_0) + \beta_1 \cdot \varphi_i(\infty, t_0 + t) \cdot (\beta_2 - \beta_1) \cdot \sigma(t, t_0) = \tag{33}$$

$$= E\ddot{\varepsilon}(t, t_0) + \beta_2 E\dot{\varepsilon}(t, t_0),$$

unde s-a notat valoarea finală a componentei $\varphi_i(t, t_0)$ cu $\varphi_i(\infty, t_0)$ şi

$$\lambda = \beta_2(1 + \varphi_{r\infty}), \tag{34a}$$

iar conform relaţiilor (18b), (22) şi (26)

$$\varphi_i(\infty, t + t_0) = \varphi_{i\infty} \cdot e^{-\beta_1(t + t_0)}. \tag{34b}$$

Forma (33) a legii fizice a betonului generalizează forma (32), după cum expresia (24) a funcţiei primare $\varphi(t, t_0)$ generalizează relaţia (13b). Într-adevăr, cu $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, relaţia (24) se reduce la o expresie de forma (13b), iar ecuaţia (33) se reduce la (32), avînd în vedere (34a) şi (34b) şi faptul că în (24)

$$\varphi(\infty, t + t_0) = \varphi_{r\infty} + \varphi_i(\infty, t + t_0). \tag{34c}$$

Constantele de integrare ale ecuaţiei (33) se găsesc din condiţiile iniţiale ($t = 0$):

$$\sigma(0, t_0) = E\varepsilon(0, t_0), \tag{35a}$$

$$\dot{\sigma}(0, t_0) = E\dot{\varepsilon}(0, t_0) - [\beta_1 \cdot \varphi_i(\infty, t_0) + \beta_2 \cdot \varphi_{r\infty}] \cdot \sigma(0, t_0). \tag{35b}$$

Ecuaţia diferenţială (33) nu este uşor de rezolvat. Avantajul principal al formei (33) în raport vu forma (3a) este că permite o analitizare mai simplă a formulărilor problemelor practice static nedeterminate în care interesează legea fizică a betonului.

Folosind relaţia (25), propusă de autor şi înglobînd şi ipoteza Rüsch-Jungwirth, prin care

$$\varphi_r(t) = \varphi_{r\infty}(1 - e^{-\beta_2 t}) \simeq \varphi_{r\infty}, \tag{36}$$

legea fizică a betonului se obţine sub o formă şi mai simplă.

Deoarece folosind forma (3a) s-ar pierde termenul constant $\varphi_{r\infty}$, relaţia (25) se introduce în ecuaţia integrodiferenţială (3). După o integrare prin părţi şi o derivare în raport cu t şi folosind notaţiile (34a) şi (34b) se obţine

$$\lambda \cdot \dot{\sigma}(t, t_0) + \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \varphi_i(\infty, t_0 + t) \cdot \sigma(t, t_0) = \beta_2 E\dot{\varepsilon}(t, t_0) \tag{37}$$

Legea fizică (37) este o ecuație diferențială liniară de ordinul I și are soluția generală

$$\sigma(t, t_0) = e^{-\frac{\beta_1\beta_2}{\lambda}\int\varphi_i(\infty,\, t_0+t)\,dt}\left[C_0 + \beta_2 E\int\dot{\varepsilon}\,(t, t_0)e^{\frac{\beta_1\beta_2}{\lambda}\int\varphi_i(\infty, t_0+t)dt}\,dt\right], \quad (38a)$$

constanta de integrare determinîndu-se din condiția inițială ($t = 0$):

$$\sigma(0, t_0) = \frac{E\varepsilon(0, t_0)}{1 + \varphi_{r\infty}} = \frac{\beta_2}{\lambda} E\varepsilon(0, t_0), \quad (38b)$$

similară cu (35a), dacă se ține seama de semnificația ipotezei (36).

D. RELAXAREA BETONULUI SUB $\varepsilon(t, t_0)$ CONSTANT

Studiul relaxării sub încărcarea $\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_0 = \text{const.}$, prezintă importanță pentru mai multe motive:

— permite verificarea exactității funcției primare $\varphi(t, t_0)$ așa după cum s-a arătat la sfîrșitul § A;

— permite stabilirea funcției de relaxare $R_\varphi(t, t_0)$ asociată funcției primare, conform relației (8). Cu ajutorul funcției de relaxare $R_\varphi(t, t_0)$ cazurile de încărcare cu deformații impuse se pot rezolva prin integrare directă, cu ajutorul relațiilor (6) și (6a) — vezi tabela 1. Depinzînd de forma aleasă pentru $\varphi(t, t_0)$, R_φ poate rezulta din (8) sub forma unei funcții continue sau se poate calcula numeric în diferite puncte (t, t_0), urmînd ca aceste valori să permită calculul numeric al integralelor (6) sau (6a). O astfel de propunere apare de exemplu în lucrarea [3], folosindu-se pentru funcția primară $\varphi(t, t_0)$, relațiile recomandate de com. ACI 209.

În cele ce urmează se vor compara între ele curbele de relaxare a efortului $\sigma(t, t_0)$ pentru cazul $\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_0 = \text{const.}$, obținute pe baza diverselor propuneri pentru funcția $\varphi(t, t_0)$, prezentate în § B. Compararea curbelor, luînd ca bază rezultatele date de propunerile oficiale ACI Com. 209 și CEB—FIP, cît și analiza dificultăților pe care le ridică rezolvarea ecuațiilor fizice corespunzătoare, prezentate în § C, vor permite să se tragă concluzii asupra ipotezelor introduse și asupra celor mai adecvate forme ale funcției primare $\varphi(t, t_0)$.

În cazul folosirii relației (29) propuse de Dischinger, soluția ecuației (30) pentru $\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_0$ devine (fig. 13a)

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0\frac{\beta}{\bar{\lambda}}\left[1 + \frac{\bar{\lambda} - \beta}{\beta}e^{-\bar{\lambda}t}\right], \quad (39)$$

cu condiția inițială (35a) și folosind notația

$$\bar{\lambda} = \beta[1 + \varphi(\infty)]. \quad (40)$$

Din (39) rezultă valoarea finală a efortului, pentru $t \to \infty$, sub forma

$$\sigma(\infty) = E\varepsilon_0\frac{\beta}{\bar{\lambda}} = \frac{\beta}{\bar{\lambda}}\sigma(0). \quad (39a)$$

Aceeaşi valoare finală se poate găsi direct din ecuaţia (3a) dacă se foloseşte teorema lui Paley şi Wiener [9], potrivit căreia soluţia unei ecuaţii Volterra de forma

$$\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\mathrm{d}\varphi(t-\tau)}{\mathrm{d}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau = E\varepsilon(t), \tag{41}$$

converge la $t \to \infty$ spre limita

$$\sigma(\infty) = \frac{E\varepsilon(\infty)}{1 + \int_0^\infty \mathrm{d}\varphi(t)} = \frac{E\varepsilon(\infty)}{1 + \varphi(\infty)}. \tag{41a}$$

Avînd în vedere că ecuaţia (3a) se reduce la (41) cînd $\varphi(t)$ este dat de (29), că $\varepsilon(\infty) = \varepsilon_0$ şi că totdeauna $\varphi(0) = 0$ se observă că (41a) coincide cu (39a).

Din (41a) rezultă concluzia generală că atunci cînd este valabilă „teoria eredităţii" (adică fenomenul nu depinde de vîrsta t_0), valoarea finală a relaxării sub orice variaţie impusă lui $\varepsilon(t)$ este dată de (41a), indiferent de forma adoptată pentru $f(t)$.

În cazul folosirii unei relaţii de forma (9) cu $f(t)$ dat de (12b), legea fizică corespunzătoare dată de (32) devine, pentru $\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_0$

$$\ddot{\sigma}(t,t_0) + \beta\dot{\sigma}(t, t_0)[1 + \varphi(\infty, t_0 + t)] = 0, \tag{32a}$$

cu soluţia generală

$$\sigma(t, t_0) = C_0 + C_1 \int \mathrm{e}^{-\beta\int[1+\varphi(\infty, t_0+t)]\mathrm{d}t} \mathrm{d}t, \tag{42}$$

unde

$$\varphi(\infty, t_0 + t) = \varphi(\infty, 28) \cdot k(t_0 + t). \tag{43}$$

Presupunînd pentru $k(t_0)$ o relaţie de forma (11), în care

$$\varphi(\infty, \infty) = 0{,}5 \cdot \varphi(\infty, 28), \tag{44a}$$

înotînd

$$\alpha = 0{,}025,$$

$$\lambda_1 = \beta[1 + \varphi(\infty, \infty)],$$

$$\mu(t_0) = \frac{\beta}{\alpha} \varphi(\infty, 28) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t_0} \tag{44b}$$

şi folosind dezvoltarea în serie

$$e^{\mu(t_0)e^{-\alpha t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mu(t_0)]^n}{n!} e^{-n\alpha t}, \tag{45}$$

soluţia (42) devine

$$\sigma(t, t_0) = C_0 + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mu(t_0)]^n}{n!} \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + n\alpha)t}}{\lambda_1 + n\alpha}. \tag{42a}$$

Cu condiţiile iniţiale

$$\sigma(0,t_0) = E\varepsilon_0,$$
$$\dot{\sigma}(0,t_0) = -\beta \cdot \varphi(\infty, t_0) \cdot \sigma(0,t_0), \tag{46}$$

similare condiţiilor (35), soluţia (42a) devine

$$\sigma(t, t_0) = E\varepsilon_0 \left[1 - \beta \cdot \varphi(\infty, t_0) \cdot e^{-\mu(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mu(t_0)]^n}{n!} \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + n\alpha)t}}{\lambda_1 + n\alpha} \right], \tag{47}$$

cu valoarea finală, la $t \to \infty$,

$$\sigma(\infty, t_0) = E\varepsilon_0 \left[1 - \frac{\beta}{\lambda_1} \varphi(\infty, t_0) \cdot e^{-\mu(t_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mu(t_0)]^n}{n!} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + n\alpha} \right]. \tag{47a}$$

Sumele care apar în relaţiile (47) şi (47a) sînt rapid convergente, astfel că nu necesită mai mult decît calculul primilor 5 termeni.

Dacă se consideră „teoria eredităţii", adică $\mu(t_0) = 0$, atunci relaţiile (47) şi (47a) se reduc la (39) şi (39a), aşa după cum relaţia (13b) se reduce la (29), iar notaţiile (44b) şi (40) coincid.

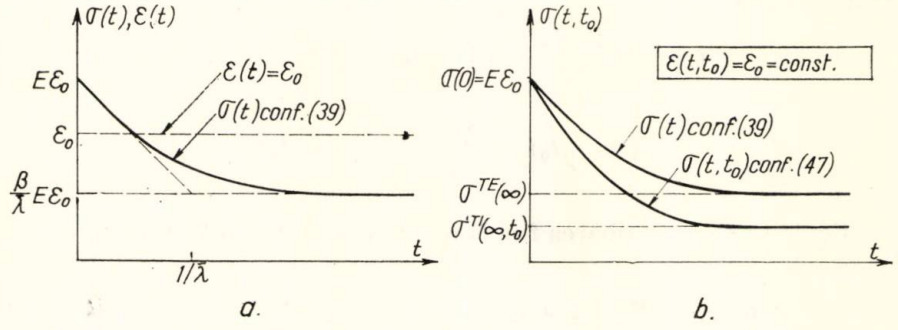


Fig. 13

Se constată de asemenea (fig. 13*b*) că relaxarea de efort sub $\varepsilon(t, t_0) =$ $=$ const. este mai puternică în „teoria îmbătrînirii" — relaţiile (47) şi

(47a), decît în „teoria eredității" — relațiile (39) și (39a). Aceasta rezultă, evident, din legea fizică (3a) dacă se are în vedere, conform relațiilor (13b) și respectiv (29), că

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(T.I.) \right| > \left| \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}(T.E.) \right| \tag{48}$$

și are ca semnificație faptul că reducerea deformației de curgere lentă la momentul t, provocată de eforturile $\sigma_\varphi(\tau, t_0)$, unde $0 < \tau \leqslant t$, este mai mică atunci cînd se consideră scăderea lui $\varphi(\infty, t_0 + \tau)$ cu creșterea lui τ.

Dacă se consideră funcțiile primare $\varphi(t, t_0)$ date de relația (13a), care aproximează rec. CEB—FIP/1969, de relațiile (14) — (16), propuse de ACI Com. 209 și de relația (23) propusă de CEB—FIP/1972 atunci legea fizică (3a) nu poate fi rezolvată analitic.

Și în cazul în care se consideră funcția primară $\varphi(t, t_0)$ dată de (24) nu a putut fi găsită o soluție analitică, deși s-a arătat în § C că legea fizică a betonului se poate exprima prin ecuația diferențială (33), care, pentru $\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_0$, devine

$$\ddot{\sigma}(t, t_0) + [\lambda + \beta_1 \cdot \varphi_i(\infty, t_0 + t)]\, \dot{\sigma}(t, t_0) + \beta_1 \cdot \varphi_i(\infty, t_0 + t) \cdot \cdot (\beta_2 - \beta_1) \cdot \sigma(t, t_0) = 0. \tag{33a}$$

Pentru ecuația precedentă se pot găsi două soluții aproximative. O primă soluție aproximativă se poate obține sub forma

$$\sigma(t, t_0) = E\varepsilon_0 \left[1 - \mathrm{e}^{-\bar{\eta}} (\lambda + \eta - \beta_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\eta}^n}{n!} \frac{1 - \mathrm{e}^{-(\lambda + n\beta_1)t}}{\lambda + n\beta_1} \right] \tag{49}$$

dacă în (33a) se neglijează termenul cu $\sigma(t, t_0)$, pe baza faptului că factorul $\beta_1 (\beta_2 - \beta_1)$ este foarte mic (tabela 2). În relația (49) s-a ținut seama de condițiile inițiale (35), cu $\varepsilon(0, t_0) = \varepsilon_0 = \text{const.}$, de notația (34a) și s-au folosit notațiile

$$\eta = \eta(t_0) = \beta_1 \cdot \varphi_i(\infty, t_0) = \beta_1 \varphi_{i\infty} \mathrm{e}^{-\beta_1 t_0}, \qquad \bar{\eta} = \bar{\eta}(t_0) = \frac{\eta(t_0)}{\beta_1} = \varphi_i(\infty, t_0). \tag{50}$$

Pentru $t \to \infty$, valoarea finală a efortului σ dat de (49) devine

$$\sigma(\infty, t_0) = E\varepsilon_0 \left[1 - \mathrm{e}^{-\bar{\eta}} (\lambda + \eta - \beta_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\eta}^n}{n!} \frac{1}{\lambda + n\beta_1} \right]. \tag{49a}$$

O a doua soluție aproximativă a ecuației (33a) se poate obține aproximînd valoarea $(\beta_2 - \beta_1)$ din ultimul termen cu valoarea λ. În acest

caz ecuația (33a) se reduce la o ecuație de ordinul I și se obține în final soluția

$$\sigma(t, t_0) = E\varepsilon_0 \, e^{-\lambda t} \left[1 + e^{-\bar{\eta}} (\beta_2 - \eta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\eta}^n}{n!} \frac{1 - e^{-(n\beta_1 - \lambda)t}}{n\beta_1 - \lambda} \right], \quad (51)$$

cu valoarea limită, pentru $t \to \infty$,

$$\sigma(\infty, t_0) = E\varepsilon_0 \, e^{-\bar{\eta}} \frac{\beta_2 - \eta}{\lambda}. \quad (51a)$$

În relațiile (51) și (51a) au fost folosite aceleași condiții inițiale și aceleași notații ca în relațiile (49) și (49a).

Dacă se folosește funcția primară $\varphi(t, t_0)$ dată de (25), atunci soluția problemei de relaxare sub $\varepsilon(t, t_0) = \varepsilon_0 = \text{const.}$ rezultă din soluția generală (38a), cu condiția inițială (38b) sub forma

$$\sigma(t, t_0) = \frac{\beta_2}{\lambda} E\varepsilon_0 e^{-\frac{\beta_2}{\lambda} \varphi_i(t, t_0)}, \quad (52)$$

folosindu-se notațiile (18b), (22), (26) și (50).

Pentru $t \to \infty$ valoarea finală a efortului σ dat de (52) devine

$$\sigma(\infty, t_0) = \frac{\beta_2}{\lambda} E\varepsilon_0 \, e^{-\frac{\beta_2}{\lambda} \bar{\eta}}. \quad (52a)$$

În figurile 14 — 19 sînt reprezentate variațiile relaxării efortului $\sigma(t, t_0)$ sub un $\varepsilon(t, t_0) = \text{const.}$, pentru diverse valori ale vîrstei t_0 și luînd în considerare soluția analitică (47) — corespunzătoare funcției primare φ date de (12b) și soluțiile numerice ale ecuației (3) — corespunzătoare funcțiilor φ date de (14) — (16), de (23) și, respectiv, de (24).

În figura 20 sînt reprezentate variațiile cu t_0 ale valorilor finale $\sigma(\infty, t_0)$ ale relaxării sub $\varepsilon(t, t_0) = \text{const.}$, luînd în considerare suplimentar peste cazurile reprezentate în figurile 14 — 19 și soluția analitică (52a) — corespunzătoare funcției φ date de (25) și soluțiile aproximative (49a) și (51a) — bazate pe funcția φ dată de (24).

Pentru relaxările de efort corespunzătoare funcțiilor primare (23), (24) sau (25) s-au considerat aceleași cazuri $d_w = 5$ cm. și, respectiv, 40 cm. ca și în figurile 7 — 11. De asemenea, pentru toate situațiile s-a considerat $\varphi(\infty, 28) = 2{,}7$.

Soluțiile numerice ale ecuației (3) corespunzătoare funcțiilor primare φ date de (14) — (16), (23) și (24) au fost stabilite cu ajutorul unui calculator IRIS—50. Pentru a asigura o bună exactitate a rezultatelor timpul t a fost împărțit în intervale Δt_j, care alcătuiesc o progresie geometrică lent crescătoare.

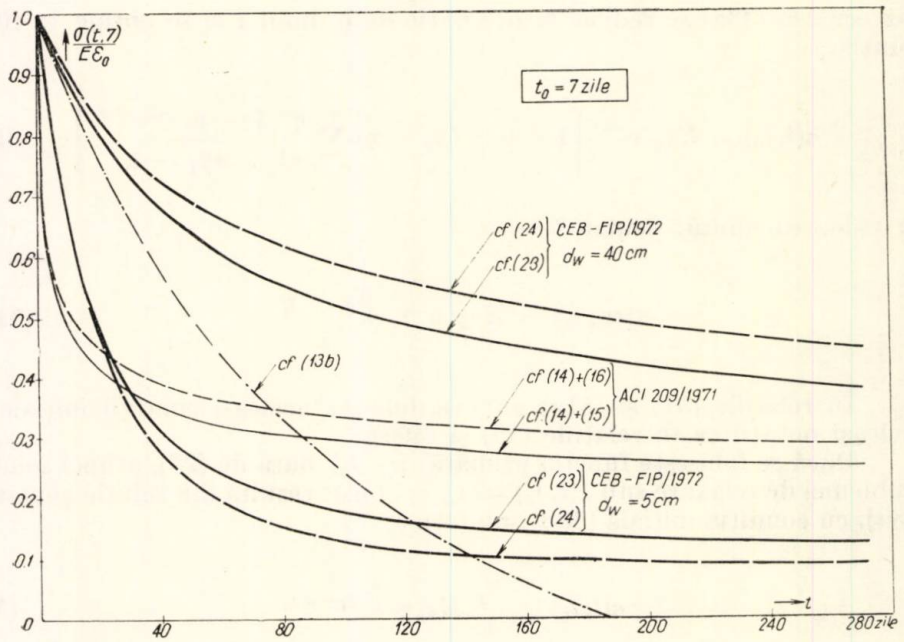

σ(t,7)/Eε0
t0 = 7 zile
cf (24)
cf.(23)
CEB-FIP/1972
dw = 40 cm
cf (13b)
cf (14)+(16)
cf.(14)+(15)
ACI 209/1971
cf (23)
cf (24)
CEB-FIP/197?
dw = 5cm
t
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
40
80
120
160
200
240
280zile

Fig. 14

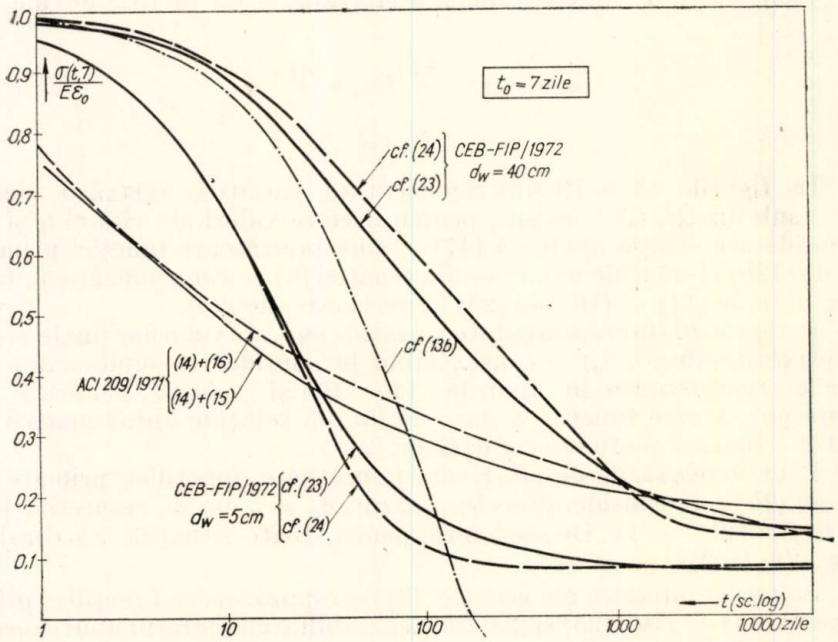

σ(t,7)/Eε0
t0 = 7 zile
cf. (24)
cf. (23)
CEB-FIP/1972
dw = 40 cm
cf (13b)
ACI 209/1971
(14)+(16)
(14)+(15)
CEB-FIP/1972
dw = 5cm
cf. (23)
cf. (24)
t (sc.log)
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1
10
100
1000
10000zile

Fig. 15

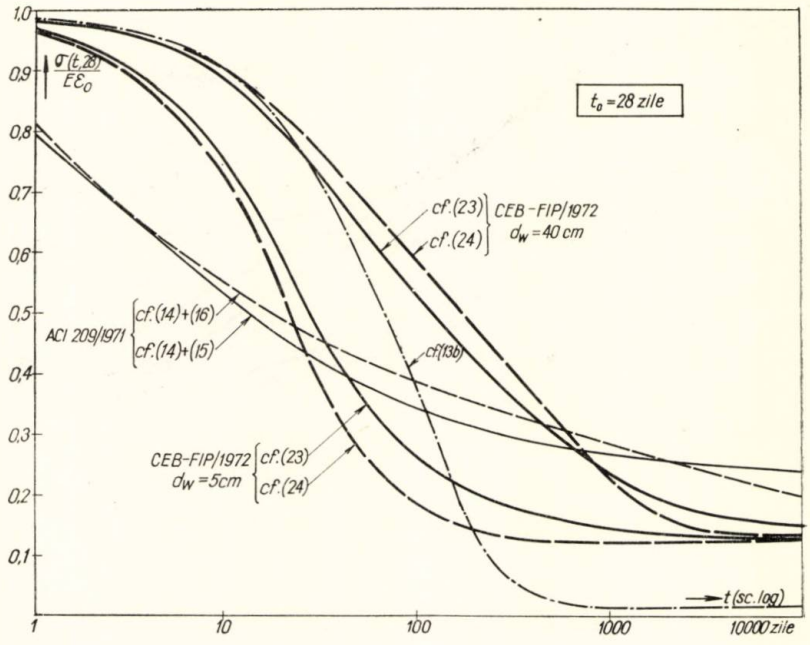

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
σ(t,28)/Eε0
t0 = 28 zile
cf.(23)
cf.(24)
CEB-FIP/1972
dw = 40 cm
ACI 209/1971
cf.(14)+(16)
cf.(14)+(15)
cf(13b)
CEB-FIP/1972
dw = 5cm
cf.(23)
cf.(24)
t (sc.log)
1
10
100
1000
10000 zile

Fig. 16

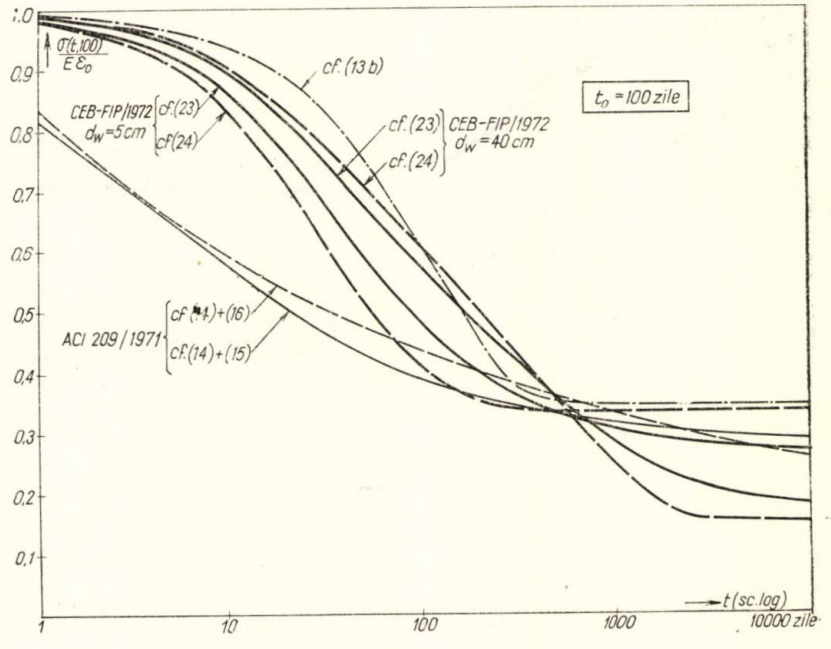

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
σ(t,100)/Eε0
cf. (13 b)
t0 = 100 zile
CEB-FIP/1972
dw = 5cm
cf.(23)
cf.(24)
cf. (23)
cf. (24)
CEB-FIP/1972
dw = 40 cm
ACI 209/1971
cf.(14)+(16)
cf.(14)+(15)
t (sc.log)
1
10
100
1000
10000 zile

Fig. 17

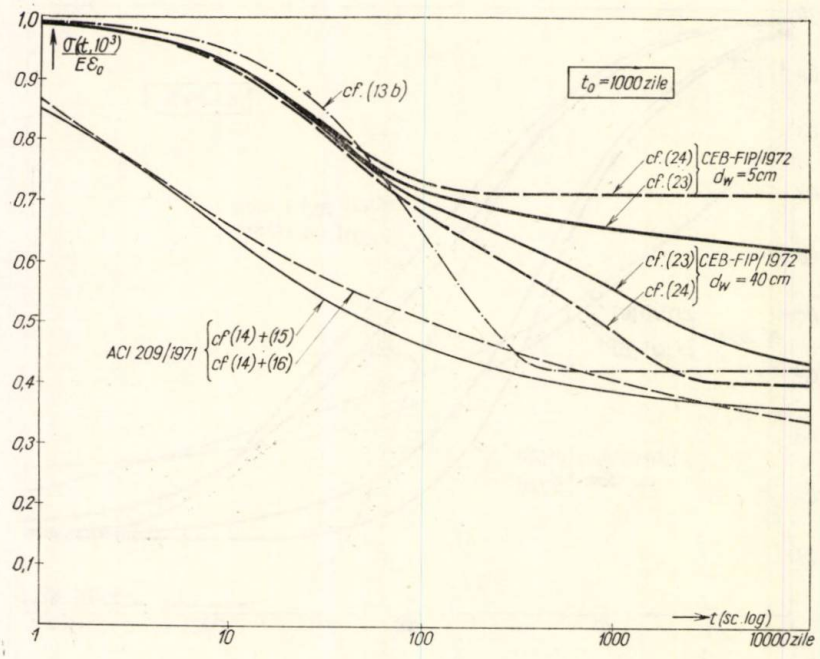

1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
σ(t,10³)/Eε₀
cf. (13 b)
t₀ = 1000 zile
cf. (24)
cf. (23)
CEB-FIP/1972
d_w = 5 cm
cf. (23)
cf. (24)
CEB-FIP/1972
d_w = 40 cm
ACI 209/1971
cf (14) + (15)
cf (14) + (16)
t (sc. log)
1
10
100
1000
10000 zile

Fig. 18

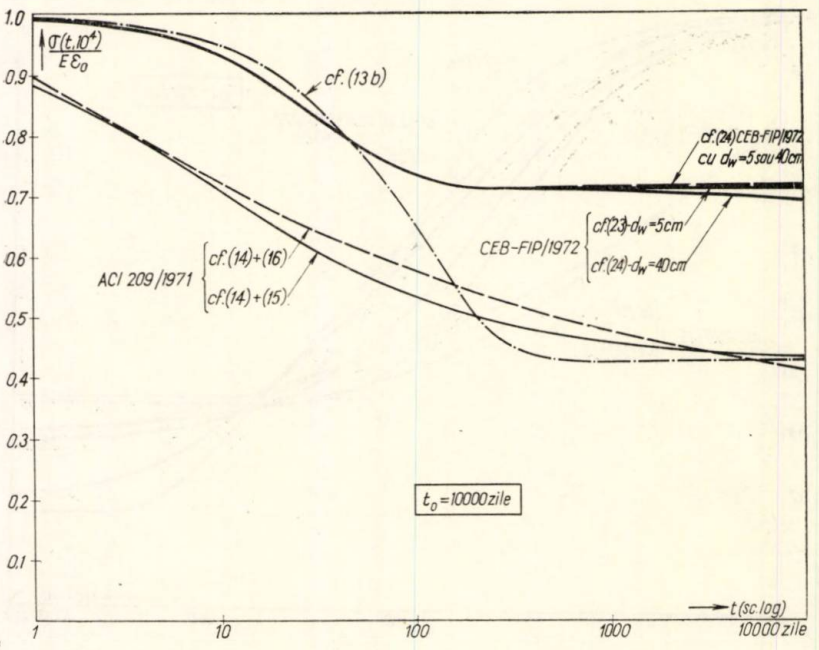

1.0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
σ(t,10⁴)/Eε₀
cf. (13 b)
cf. (24) CEB-FIP/1972
cu d_w = 5 sau 40 cm
CEB-FIP/1972
cf. (23) d_w = 5 cm
cf. (24) d_w = 40 cm
ACI 209/1971
cf. (14) + (16)
cf. (14) + (15)
t₀ = 10000 zile
t (sc. log)
1
10
100
1000
10000 zile

Fig. 19

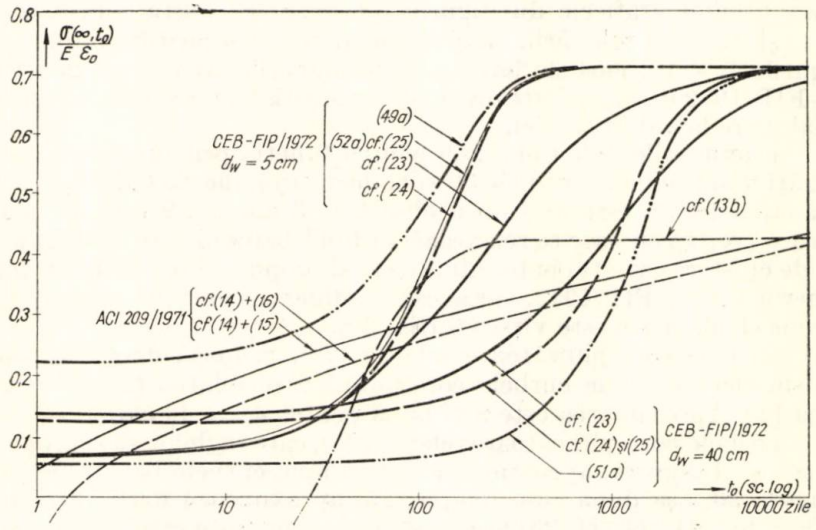


Fig. 20

S-a considerat

$$t_i = \sum_1^i \Delta t_j\,,$$

$$\Delta t_j = \Delta t_{j-1} + \Delta_j \qquad (j \geqslant 2),$$

$$\Delta_j = \Delta_{j-1} \times R \qquad (j \geqslant 3),$$

$$\Delta t_1 = 0,$$

iar pe baza recomandărilor din lucrarea [3] s-a ales $\Delta_2 = 0{,}1$ zile și $R = 10^{1/16}$.

Au fost calculate valorile lui $\dfrac{\sigma(t,\,t_0)}{E\varepsilon_0}$ pînă la un $t \sim 13\,000$ zile (~ 35 ani), ceea ce corespunde la $i = 70$. Chiar la aceste valori ale lui t s-au constatat mici pante negative ale graficului $\dfrac{\sigma(t,\,t_0)}{E\varepsilon_0}$. De exemplu pentru $t_i = 13\,266$ zile și $t_0 = 28$ zile, aceste pante date de $\dfrac{\sigma(t_i, 28) - \sigma(t_{i-1}, 28)}{\log t_i - \log t_{i-1}}$ au valorile $-0{,}0142$ pentru relația (14), $-0{,}08$ pentru (15), $-0{,}0037$ pentru (23) și $d_w = 5$ cm și $-0{,}021$ pentru (23) și $d_w = 40$ cm În figura 20 pentru curbele bazate pe funcțiile φ date de (14) — (16) și (23) s-a considerat $\sigma(\infty, t_0) \simeq \sigma(10^4, t_0)$.

Examinînd graficele din figurile 14 — 20 se constată următoarele :

— şi în cazul relaxării, ca şi în cazul reprezentării funcţiilor $\varphi(t, t_0)$ din figurile 7 — 12, curbele bazate pe propunerile ACI Com. 209/1971 şi CEB—FIP/1972 dau rezultate destul de imprăştiate, iar această împrăştiere este mai mare la valori t_0 mici.

— propunerile ACI Com. 209 pentru funcţia primară $\varphi(t, t_0)$ conduc la relaxări mai rapide în primele 30 zile, decît propunerile CEB—FIP/1972, iar relaxarea totală este mai mică cînd $t_0 = 3$ zile ... 2 luni. În general, valoarea $\sigma_\varphi(\infty, t_0)$ cu care se relaxează în final betonul este mai lent influenţată de creşterea vîrstei betonului în cazul propunerilor. ACI 209 faţă de propunerile CEB—FIP/1972, dar această influenţă continuă să se manifeste indiferent cît de mare este vîrsta t_0 (fig. 20).

— curbele corespunzătoare relaţiei (24), propusă de autor, aproximează suficient de bine curbele corespunzătoare relaţiei (23), propusă în lucrarea [4]. Aproximarea este mai bună pentru $d_w = 40$ cm.

— curbele corespunzătoare relaţiei (25), care înglobează şi propunerea lui Rüsch şi Jungwirt, aproximează foarte bine curbele bazate pe relaţia (24), figura 20, aşa după cum relaţia (25) aproximează foarte bine relaţia (24). Faţă de (24), relaţia (25) are avantajul că permite rezolvarea analitică a problemei de relaxare.

— la betoane foarte vechi ($t_0 \sim 30$ ani), la care fenomenul de curgere lentă nu mai depinde de t_0, sau variază foarte lent cu t_0 (fig. 12), valorile finale $\sigma(\infty, t_0)$ se pot calcula cu relaţia (41a) corespunzătoare „teoriei eredităţii". Astfel considerînd $t_0 = 10^4$ zile, raportul $\varphi(\infty, 10^4)/\varphi(\infty, 28)$ rezultă 0,5 conform propunerii CEB—FIP/1969, circa 0,5 conform propunerii ACI Com. 209/1971 şi circa 0,15 conform propunerii CEB—FIP/1972 (fig. 12), ceea ce, pe baza relaţiei (41a) şi a valorii $\varphi(\infty, 28) = 2{,}7$, conduce la valori de 0,425, 0,425 şi, respectiv, 0,71 pentru $\sigma(\infty, 10^4)/E\ \varepsilon_0$ (fig. 20).

— relaţia (13b), care aproximează propunerea CEB—FIP/1969 nu dă rezultate pentru studiul problemei de relaxare. Pentru $t_0 < 28$ zile ea conduce la o relaxare completă a efortului σ (valorile negative nu au evident sens fizic), iar influenţa vîrstei nu se manifestă decît în intervalul $t_0 = 28 \ldots 300$ zile.

— soluţiile aproximative (49), (49a) şi (51), (51a) nu dau rezultate corespunzătoare decît la valori t_0 mari (fig. 20), domeniu puţin interesant din punct de vedere practic.

E. CONCLUZII

În lucrare sînt comparate curbele de curgere lentă şi de relaxare obţinute pe baza celor mai recente propuneri ale CEB—FIP şi Com. ACI 209 şi se analizează implicaţiile pe care le au aceste propuneri precum şi unele formule aproximative propuse de autor asupra formei matematice a legii fizice a betonului şi a posibilităţilor ei de rezolvare.

În urma comparării curbelor de curgere lentă şi, respectiv, a curbelor de relaxare se constată că propunerile CEB—FIP/1969 şi 1972 şi Com. ACI 209/1971 dau rezultate destul de imprăştiate şi prezintă diferenţe calitative, în special în ceea ce priveşte modul de considerare a influenţei vîrstei t_0 a betonului în momentul încărcării.

Aceste diferenţe dau o imagine asupra cunoscutelor dificultăţi care apar la studierea experimentală a curgerii lente a betonului şi la interpretarea rezultatelor acestor studii şi justifică totodată adaptarea ca funcţie primară a acelei forme matematice a lui φ care, aproximînd suficient de exact propunerile oficiale existente, permite totodată o rezolvare analitică a legii fizice a betonului, deci o analitizare a problemelor practice în care se consideră efectele structurale ale curgerii lente a betonului.

Din acest punct de vedere în lucrare se propune folosirea formelor (24) sau (25) ale funcţiei primare $\varphi(t, t_0)$, care aproximează foarte bine curbele propuse de CEB—FIP/1972 şi permit scrierea legii fizice a betonului simplu, solicitat monoaxial în domeniul curgerii lente liniare, sub forma unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul II şi, respectiv I.

Primită la redacţie la 20 august 1973

BIBLIOGRAFIE

1. Ali I. şi Kessler C., *Rheology of Concrete. A Review of Research*, Eng. Exp. Station, Bull. 476, Univ. of Illinois, 1965.
2. Arutiunian N., *Applications de la théorie du fluage*, Ed. Eyrolles, Paris, 1957.
3. Bazant Z., *Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method*, JACI Apr. (1972).
4. Chiorino M., şi colab., *Effects structuraux des déformations differées du beton*, Manuel de calcul CEB—FIP. Bulletin d'information CEB, *80*, febr. (1972).
5. Constantinescu D., *Curgerea lentă a betonului*, ICB, Buc. 1972.
6. Constantinescu D., *Posibilităţi de considerare în calcul a efectului îmbătrînirii betonului asupra curgerii lente*, comunicare ICB, febr. 1971.
7. Courbon J., *L'influence du fluage linéaire sur l'equilibre des systèmes hyperstatiques en beton précontraint*, AITBTP, febr. 1968.
8. Dischinger F., *Untersuchung über die Knicksicherheit, die elastische, Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken*, der Bauingenieur H 33/34, 1937.
9. Distefano J. N., *Creep Buckling of Slender Columns*, Journal ASCE, *3*, iunie (1965).
10. Gvozdev A., *Le fluage du beton*, Bull. d'information CEB, *64* (1957).
11. L'Hermite R., *Les déformations du beton*, Chaiers des Recherches, Ed. Eyrolles, 1961.
12. Neville A. M., *Creep of Concrete: Plain, Reinforced and Prestressed* North-Holland Publ., 1970.
13. Lalescu Tr., *Introducere în teoria ecuaţiilor integrale*, Buc., ediţia 1956.
14. Trost H., *Spannungs—Dehnungs Gesetz eines visko-elastischer Festkörpers wie Beton und Folgesungen*, Beton, H. *6* (1966).
15. Trost H., *Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton*, Beton und Stb., H. *10*, *11* (1967).
16. * * * CEB—FIP. *Recommandations internationales pour le calcul et l'execution des ouvrages en beton armé*, 1969.
17. * * * *DIN 1045. Beton-und Stahlbetonbau, Bemessung und Ausführung*, mart. 1968.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

STUDII

UNELE PROBLEME PRIVIND ARMAREA SAPELOR CU TREI CONURI CU MATERIALE DURE

de D. RAȘEEV și D. ENE

Institutul de petrol Ploiești

Se cercetează influența caracteristicilor relitului folosit la încărcarea sapelor și a factorilor tehnologici asupra calității armării cu aliaje dure a sapelor cu trei conuri.

Se propune o nouă metodă tehnologică de prelucrare a relitului folosit la încărcare (cadmiere) și se precizează parametrii procesului tehnologic de încărcare, prin care se asigură creșterea durabilității suprafețelor active ale sapei cu trei conuri.

Eficiența și durabilitatea sapelor cu trei conuri depinde în mare măsură de geometria, materialelor folosite și de tehnologia armării acestora.

Geometria părții active este determinată de natura rocilor forate. Pe această bază s-a ajuns la o anumită tipizare a formelor elementelor active ale sapei (forma conurilor și a contraconului, dimensiunea, forma și numărului de dinți) și se poate preciza după natura terenului tipul cel mai potrivit de sape ce este indicat de a fi folosit.

Lăsînd la o parte armarea sapelor cu stifturi din materiale dure, utilizate în special pentru forarea rocilor foarte dure, de obicei, sapele cu trei conuri se armează cu relit. Numeroase cercetări efectuate în această direcție au arătat că, din punct de vedere tehnic și economic, relitul corespunde cel mai bine scopului urmărit [1] — [5].

Problemele mult mai controversate rămîn însă cele legate de tehnologia armării. S-au propus și s-au cercetat numeroase metode de armare (pe bază de turnare, încărcare C.I.F., diferite procedee de încercare prin sudare) [1], [3]. În prezent și-au demonstrat eficiența și se aplică în special încărcarea oxiacetilenică și în gaze protectoare.

Cercetările [1], [3] au arătat că la armarea sapelor cu electrozi de relit prin topirea tubului electrodului și al materialului de bază, granulele de carburi de wolfram din tubul electrodului rămîn înglobate după solidificarea lor în masa metalică de bază a materialului depus.

Indiferent de procedeul de depunere, se pot deosebi trei zone (fig. 1).

Zona I., formată din carburi dure $W_n C_m$ înglobate în produsele cristalizării primare a oțelului lichid, provenit din tub și din materialele

de bază. În timpul depunerii, carburile dure, în funcţie de parametrii procesului de încărcare (sursa de încălzire, ciclu termic etc.) se dizolvă mai mult sau mai puţin în masa metalului topit, pierd din muchii ascuţite şi din dimensiuni. În jurul carburilor se formează o zonă de dizolvare şi de depunere cu conţinut mai ridicat de W şi C, avînd o structură de trecere complexă (a se vedea diagrama W—Fe—C). Duritate şi rezistenţă ridicate la uzură se asigură cînd în strat avem carburi W_2C.

Zona II., de trecere de la aliajului dur depus la materialul de bază.

Zona III., zonă influenţată termic, în care au loc procesele cunoscute de recristalizare a materialului de bază.

Pentru a se asigura calitatea optimă stratului dur depus este necesar ca procesul tehnologic de încărcare să asigure pe cît posibil forma colţuroasă şi dimensiunile iniţiale a carburilor de wolfram înglobate într-o masă metalică de bază tenace şi suficient de dură şi zonele de trecere şi cea influenţată termic de rezistenţa ridicată (în special la compresiune şi lipsite de fisuri).

În consecinţă, tehnologia încărcării cu aliaj dur trebuie să corespundă în mai mare măsură unui procedeu de lipire şi nu de sudare.

De remarcat faptul că procedeele tehnologice folosite pînă în prezent, cele mai bune rezultate obţinîndu-se tocmai din aceste motive la încărcarea oxiacetilenică şi în gaze protectoare, nu reuşesc să asigure păstrarea formelor colţuroase iniţiale a carburii de wolfram din electrod, reducerea la minimum a dezvoltării carburilor de wolfram în timpul încărcării sapei şi prin aceasta obţinerea unei eficacităţi maxime de lucru a materialului dur depus (caracteristicile cerute masei metalice de bază sînt relativ uşor de asigurat prin eventuala aliere a tubului electrodului de relit). Acest lucru este determinat în primul rînd de faptul că ciclul termic, necesar asigurării unei depuneri aderente, de calitate, are drept efect, chiar în cazul folosirii unei atmosfere de protecţie, dizolvarea apreciabilă a carburii de wolfram în masa metalică de bază şi mai ales pierderea muchiilor ascuţite ale acestora.

Pentru a înlătura această contradicţie aparentă, s-a propus protejarea granulelor de carburi de wolfram cu un strat adecvat, care să împiedice în timpul depunerii contactul intim între carbură şi masa metalică de bază şi care după solidificare, să nu modifice compoziţia, structura şi calităţile fizico-mecanice ale stratului depus. Acest rol poate fi îndeplinit de un metal relativ uşor fuzibil, eventual cu temperatura de vaporizare sub temperatura de topire a stratului depus şi care nu formează faze în stare solidă cu Fe W şi C. În acest scop s-ar putea folosi Cu, Zn, Cd etc.

Pentru efectuarea cercetărilor experimentale s-a folosit cadmiu, acesta prezentînd următoarele avantaje :

— nu formează soluţii solide sau compuşi chimici cu Fe, W şi C,

— are temperatura de topire de 321°C şi de fierbere 767°C, fapt care face ca în timpul depunerii să se evaporeze,

— are densitatea de 8,65 gr/cm³ mai mică ca a aliajului dur,

— protejează suprafeţele metalice de coroziune,

— este uşor de procurat.

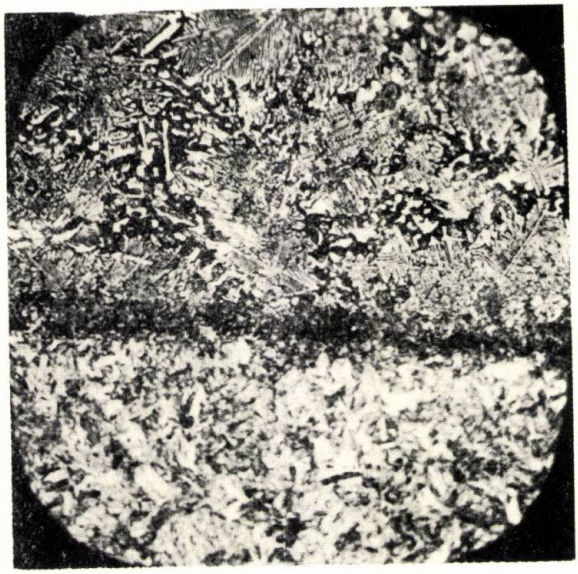


Fig. 1. — Zonele din stratul armat cu relit.

S-au utilizat electrozi a căror compoziţie chimică este dată în tabela 1.

Tabela 1

Granulaţia (mesch)	Compoziţia chimică a aliajului dur %			Compoziţia chimică a tubului %			Proveniența
	C	W	Ti	C	Mn	S+P	
8—10 10—20 20—30 30—40	3,90	95,8	—	0,12	0,36	0,32	R.P. CHINEZĂ
10—20 20—30 30—40 40—60	4,02	95,7	0,20	0,11	0,34	0,30	R.D.G.
10—20 20—30 30—40 40—60	3,75	95,8	—	0,11	0,34	0,25	U.R.S.S.

Pentru a se putea face cercetări corespunzătoare privind eficienţa cadmierii carburii de wolfram folosite la armarea cu materiale dure a sapelor cu trei conuri, din fiecare calitate de electrozi a fost extrasă carbura de wolfram, care după cadmiere a fost introdusă în tuburile respective. Toate încercările s-au făcut comparativ folosind electrozi cu carburi cadmiate şi necadmiate.

Cadmierea carburii de wolfram s-a făcut pe cale electrolitică după următorul proces tehnologic.

1) Degresarea electrolitică în electrolit ce conţine 30 g/l NaOH; 10 g/l CO_3Na_2 şi 10 g/l PO_4Na_3 temperatura 80°C; timp de menţinere la anod 2 minute la catod 30 minute. Carbura de wolfram s-a introdus în site, şarje de 500 gr, curent 60 A.

2) Spălarea 2 minute în jet de apă,

3) Decapare 1 minut în soluţie de 1 : 1 FH (la volum),

4) Spălare 2 minute în jet de apă,

5) Cadmierea în electrolit de compoziţie : 40 gr/l $Cd(CN)_2$; 110 gr/l CNNa; 27 gr/l CO_3Na_2; 30 gr/l SO_4Na_2; 0,5 gr/l SO_4Ni, ulei de ricin sulfonat 5 gr/l; anod din cadmiu; timp de menţinere 1,5 ore cu schimbarea poziţiei granulelor pe sită; densitate de curent 80 A/500 gr granule,

6) Spălare 2 minute pe jet de apă,

7) Pasivizare prin cufundarea granulelor timp de 15 s, într-o soluţie de 150 gr/l Cr_2O_3; 4 gr/l SO_4H_2,

8) Spălare 2 minute în jet de apă,

9) Deshidrogenarea 1 oră la 140°C.

Pentru a se putea stabili influenţa cadmierii asupra ciclului termic, s-au folosit două termocuple Pt — Pt Rd, dintre care unul a fost cadmiat la vîrf după tehnologia folosită la cadmierea carburilor de wolfram (grosimea stratului de cca 15—20 μm). Vîrfurile termocuplelor au fost

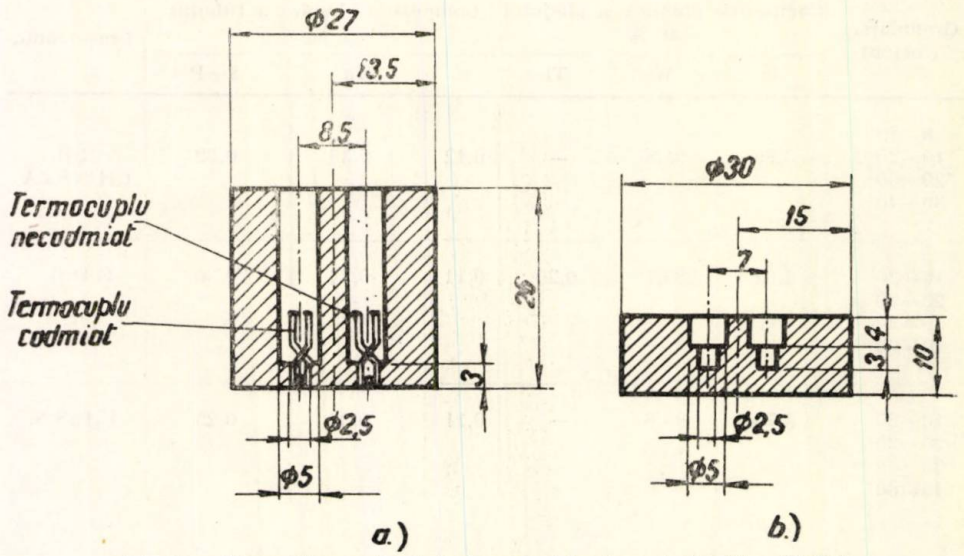


Fig. 2. — Dispozitive pentru introdus capetele pirometrelor Pt — Pt Rd.

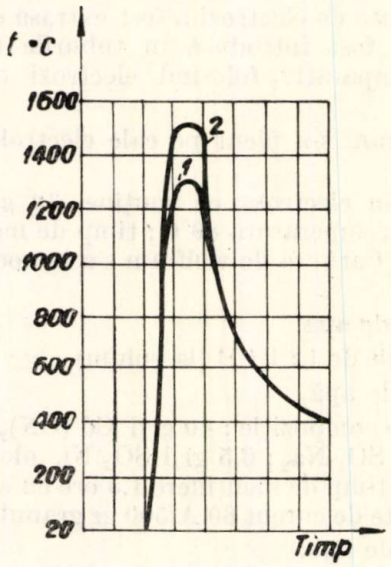


Fig. 3.—Ciclul termic înregistrat de pirometrul cadmiat *1* şi necadmiat *2*.

introduse în dispozitive (fig. 2 a, b). Pe feţele frontale ale dispozitivelor (fig. 2) s-a depus, folosind tehnologia obişnuită, relit, realizîndu-se deci ciclul termic corespunzător acestei operaţii. Aceste cicluri termice înregistrate de termocuple sînt date în figura 3 (curba *1* corespunde termocuplului

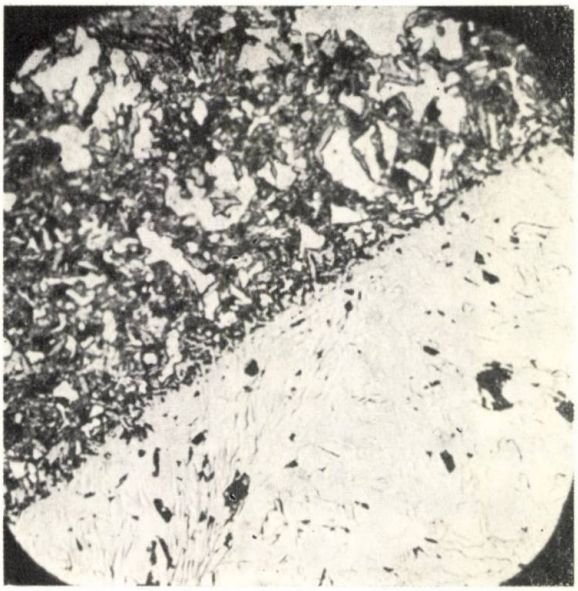


Fig. 4. — Microstructura stratului încărcat cu relit cu carburi de wolfram necadmiate.

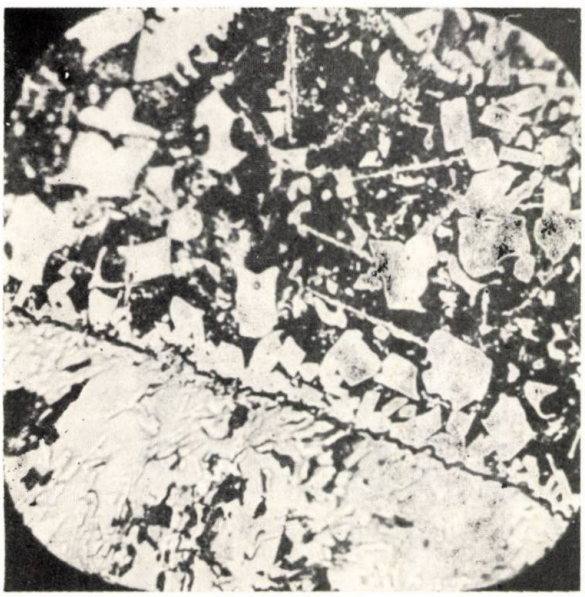


Fig. 5. — Microstructura stratului încărcat de relit cu carburi de wolfram cadmiate.

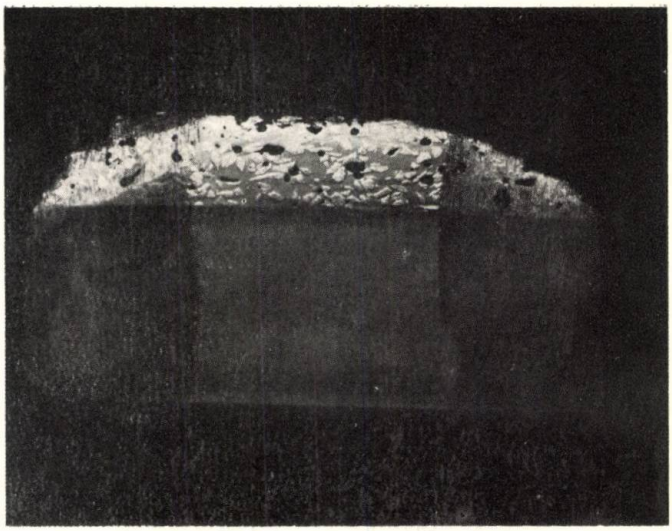


Fig. 6. — Probă de uzură; încărcare curentă.

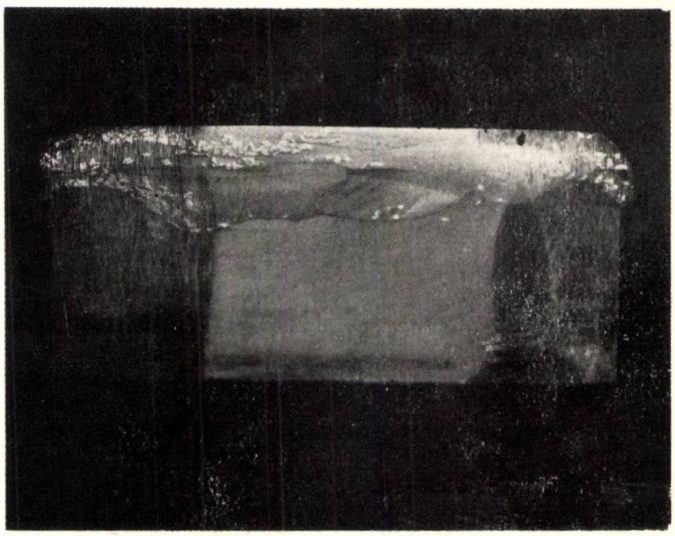


Fig. 7. — Probă de uzură; timpul de încărcare prea lung, carburi de wolfram dizolvate incluse în materialul de bază.

cadmiat şi 2 termocuplului necadmiate). Rezultă, că, în urma cadmierii graţie formării cămăşii de vapori de cadmiere, temperatura maximă scade cu circa 250 de la 1550°C la 1300°C. Se poate accepta ca o diferenţă de temperatură de acelaşi ordin se înregistrează pe granulele de wolfram în cazul armării sapelor cu relit ce conţine carburi necadmiate şi cadmiate. În mod evident, în cazul cadmierii carburilor, acestea se vor dizolva mult mai puţin (temperatură mai mică, strat izolator între carburi şi masa metalică topită), ceea ce se şi constată din examinarea microstructurilor respective (fig. 4 şi 5) obţinute în cazul aplicării procesului tehnologic curent de încărcare (încărcat oxiacetilenic, cementat + carbonitrurat, călit, detensionat 180° — 200°C).

Pentru a se verifica o eventuală sensibilitate sporită la fisurarea în zona influenţată termic, s-au cercetat microstructurile în zona respectivă şi s-au făcut probele după metoda recomandată de Departamentul de sudură de la Ohio — Staate University din Columbia (USA), fără a se constata o influenţă negativă în cazul folosirii carburilor de wolfram cadmiate.

În continuare s-a cercetat comportarea la uzuri abrazive a armării cu relit, corespunzătoare uzurii contraconului sapei cu trei conuri. S-au folosit probe de laborator care după încărcare pe faţa frontală au fost rectificate (fig. 6) (la operaţia de rectificare după încărcare este supus şi

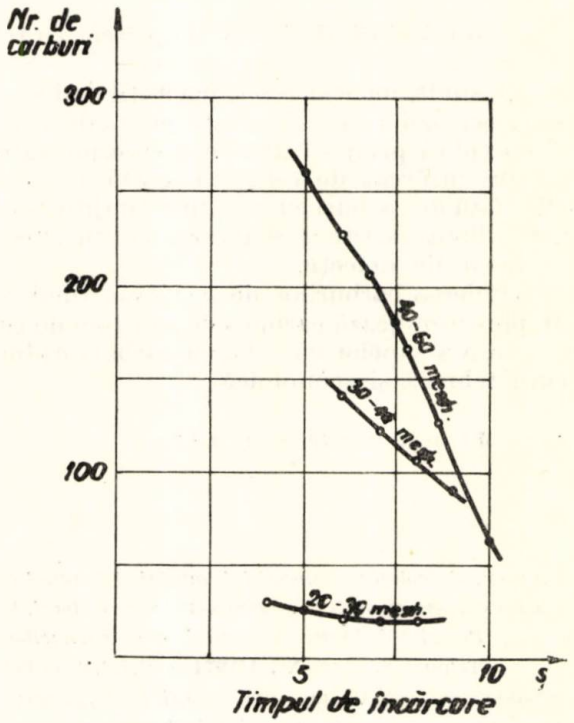


Fig. 8. — Numărul de particole din strat încărcat, funcţie de timpul de încărcare (s).

contraconul rolelor sapei, păstrîndu-se prin aceasta mai bine în timpul forajului diametrul sapei).

Din figurile prezentate se vede influenţa negativă a duratei mari de încărcare ce are drept efect dizolvarea carburilor (fig. 7, 8).

Încercările de uzură s-au făcut pe maşina de uzură (fig. 9) construită special în acest scop. Ea este prevăzută cu un disc orizontal pe care se montează disc abraziv şi care se poate roti cu 20 — 200 rot/min. În timpul efectuării încercării la uzură, discul şi proba sînt continuu spălate de lichid, imitîndu-se în acest fel uzura contraconului în timpul forajului cu sapele cu trei conuri. Rezultatele cercetărilor efectuate sînt date în figura 10. Se constată că în cazul folosirii relitului cu carburi cadmiate, rezistenţa la uzură a probelor creşte cu circa 5 — 8%. În toate cazurile cu cît granulaţia este mai grosolană, cu atît pierderile prin uzură sînt mai mici.

În continuare s-a trecut la cercetări pe standul de încercat sape cu trei conuri. S-au folosit sapele 8 MTA din producţia curentă, la care contraconul a fost încărcat cu relit obişnuit şi cu relit cu carbură de wolfram cadmiată. La o apăsare de 8 tone şi o durată de forare 37 minute în rocă de granit, s-au constatat o pierdere a diametrului în cazul folosirii relitului obişnuit de 1,4 mm, iar în cazul celui cu carburi cadmiate de 1 mm. Aceste rezultate au fost confirmate şi prin probe de cîntărire.

CONCLUZII

Rezultă deci că, deşi stratul încărcat cu relit cu carburi cadmiate are o rezistenţă la uzură cu puţin mai mare (5 — 8%) ca în cazul celui încărcat cu relit obişnuit, menţinerea capacităţii de lucru a sapei armate pe contracon cu electrozii respectivi, este cu mult mai mare (circa 40%). Acest lucru se explică printr-o structură corespunzătoare celei teoretic optime, a stratului încărcat de relit cu carburi cadmiate: carburi cu muchii ascuţite (faţă de carburi cu muchii rotunjite, parţial topite în cazul relitului obişnuit), liant rezistent şi tenace pe un suport de bază — oţel călit — dur şi lipsit de defecte.

Cadmierea carburilor de wolfram, fiind o operaţie simplă şi eftină, care în plus protejează carbura de wolfram de coroziune, rezultă că metoda de încărcare a sapelor cu relit cu carburi cadmiate va avea o importantă eficienţă tehnică şi economică.

Primită la redacţie la 10 octombrie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. D. Raşeev, *Tehnologia construcţiei de maşini şi de utilaj petrolier*. Ed. D. P. Bucureşti, 1962.
2. D. Constantinescu şi N. V. Mereanu, *Sape de foraj*. Ed. T. 1970.
3. D. Ene, *Procedee de încărcare cu aliaje dure a conurilor sapelor de foraj*. Rev. Informarea Tehnică-Sudură, **Nr. 1/1971** a M.I.C.M. — O.D.P.T.
4. K. Korneev şi P. A. Palli, *Sape de foraj*. I.C.D.T. 1961.
5. F. D. Zenkov, *Sape cu trei conuri*. Ed. T. 1965.

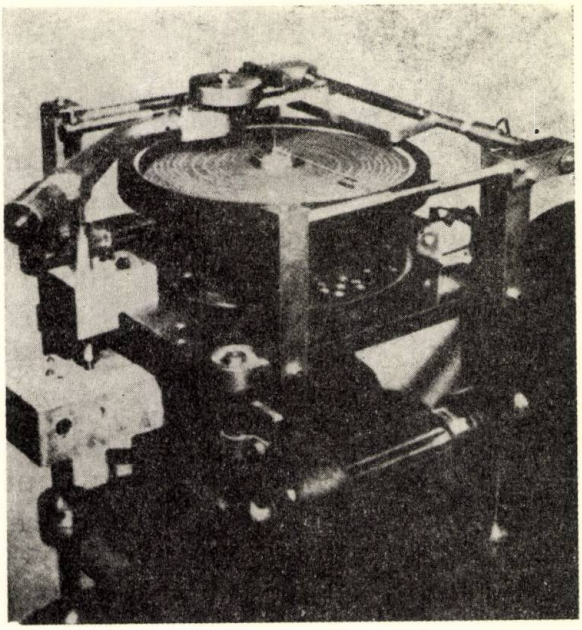


Fig. 9.—Maşina de încercat la uzură.

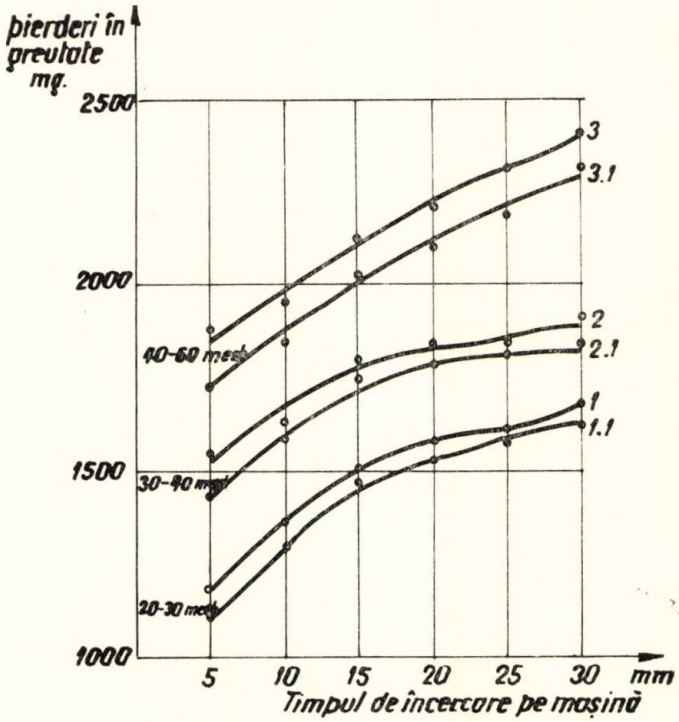
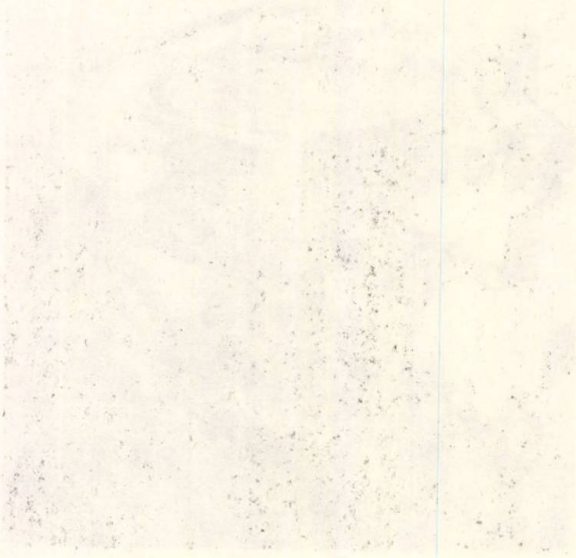


Fig. 10. — Diagrama de uzură pe maşina de încercat a probelor încărcate cu relit cu carburi de wolfram necadmiate de 1—20—30 mesch; 2—30—40 mesch; 3—40—60 mesch şi cu carburi cadmiate de 1. 1—20—30 mesch; 2.1.—30—40 mesch; 3.1.—40—60 mesch.



CALCULUL DE GABARIT AL OCULARELOR DE TIP HUYGENS ŞI RAMSDEN

P. DODOC
Institutul politehnic Bucureşti

Ocularele de tip Huygens se folosesc pe scară largă în construcţia aparatelor optice, în special la microscoapele de cercetare şi la lunetele de observare, datorită unor avantaje importante pe care le oferă.
În literatura de specialitate se dau caracteristicile ocularelor, se indică modul de formare a imaginii şi se precizează condiţiile pe care acestea trebuie să le îndeplinească în ceea ce priveşte calitatea imaginii.
Totuşi, literatura nu oferă suficiente date sau relaţii de calcul pentru stabilirea dimensiunilor de gabarit ale acestor oculare, în funcţie de acţiunea sistemelor optice situate anterior ocularului.
În cele ce urmează se încearcă soluţionarea acestei probleme.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Orice ocular compus este constituit din două grupuri de lentile, adică din două sisteme optice distincte. Sistemul situat lîngă imaginea intermediară dată de sistemele optice situate în faţa ocularului, se numeşte „lentilă de cîmp" (L_c), iar cel de lîngă ochi, „lentilă de ochi" (L_o).

Pentru distingerea şi uşurarea înţelegerii construcţiei lor se foloseşte următorul mod de simbolizare pentru oculare :

(1) — (1) — ocular constituit din două lentile singulare,
(1) — (2) — ocular la care lentila de cîmp este singulară, iar cea de ochi un dublet (două lentile lipite),
(2) — (1) — ocular la care lentila de cîmp este un dublet, iar cea de ochi singulară,
(1) — (1—1) — ocular la care lentila de cîmp este singulară, iar cea de ochi este constituită din două lentile singulare situate la o anumită distanţă, una faţă de alta.

În construcţia aparatelor optice se folosesc diferite oculare, dar oricît de complexe ar fi, ele sînt constituite din cele două grupuri menţionate : „lentilă de cîmp" şi „lentilă de ochi". Iată cîteva exemple :

(2) — (1), (2) — (2), (1—1) — (1), (3) — (1), (1) — (3), (1) — (2—2), (2) — (2—1), (2) — (1—2), (2) — (2—2), (2) — (1 — 1—2), (2—1) — (1—2) ş.a.

Pentru calculul de gabarit este avantajos să se considere sistemele optice ca fiind infinit subţiri, cu planele principale suprapuse. Prin urmare, se poate admite că la baza oricărui ocular compus stau ocularele clasice de tip Ramsden şi Huygens, constituite din cîte două lentile infinit subţiri situate la distanţa e una faţă de alta.

Considerînd că „lentila de cîmp" (L_c) reprezintă un sistem optic cu focala f_1' şi cu planele principale H_1 şi H_1', iar „lentila de ochi" (L_o) un sistem cu focala f_2' şi planele principale H_2 şi H_2', ocularul, ca sistem rezultant, va poseda focala f' şi planele principale H şi H'. Focarele vor fi $\overline{F}$ şi F' (elemente neconjugate). Imaginea intermediară (y'), dată de sistemele optice montate în faţa ocularului, va fi situată în planul focal obiect $\overline{F}$ al ocularului pentru ca ochiul să privească în repaus. Distanţa dintre cele două lentile este $e = \overline{H_1'H_2}$.

Pentru conservarea fluxului luminos la propagarea luminii printr-un aparat trebuie ca tuburile optice să fie conectate în aşa fel încît pupila de ieşire a unui sistem optic să reprezinte pupila de intrare pentru sistemul optic următor.

La lunete se poate admite că diafragma de deschidere este situată în unul din planele principale ale obiectivului şi deci pupilele de intrare şi de ieşire coincid ca mărime şi poziţie, iar abscisa obiect a pupilei de intrare a ocularului este egală cu distanţa focală a obiectivului plus abscisa focarului obiect al ocularului.

La microscoapele simple pupila de ieşire a obiectivului poate fi situată în planul principal imagine; la cele moderne, echipate cu dispozitive de iluminat de tip „Köhler", pupila de ieşire a obiectivului se află situată în planul focal imagine al obiectivului.

Aşa cum s-a menţionat, aceasta este şi pupila de intrare a ocularului.

Dacă între obiectiv şi ocular sînt montate alte sisteme optice (sisteme intermediare) spre exemplu „lentile de tub", lame plan-paralele sau prisme, atunci trebuie avut în vedere faptul că poziţia şi mărimea pupilei de ieşire a obiectivului reprezintă elemente de intrare pentru sistemul intermediar, iar imaginile lor formate de acesta reprezintă elemente de intrare pentru ocular.

2. CALCULUL DE GABARIT AL OCULARELOR DE TIP HUYGENS

2.1. PROPAGAREA LUMINII PRIN OCULARELE DE TIP HUYGENS

În figura 1 se arată modul de formare a imaginii în ocularul de tip Huygens 4 : 3 : 2 cu grosismentul $\Gamma = 250 : f' = 10 \times$ al unui microscop fără sisteme optice intermediare, la care obiectul este iluminat cu fascicule telecentrice sub unghiul de apertură $\pm \sigma_0$.

Dacă nu ar exista ocularul, obiectivul ar forma imaginea y' reală, mărită şi inversată a obiectului y, la distanţa Δ_M faţă de pupila de ieşire a obiectivului. Astfel, razele pupilare principală R şi marginale R_1 şi R_2 ar forma imaginea P' a punctului extrem P din planul obiect.

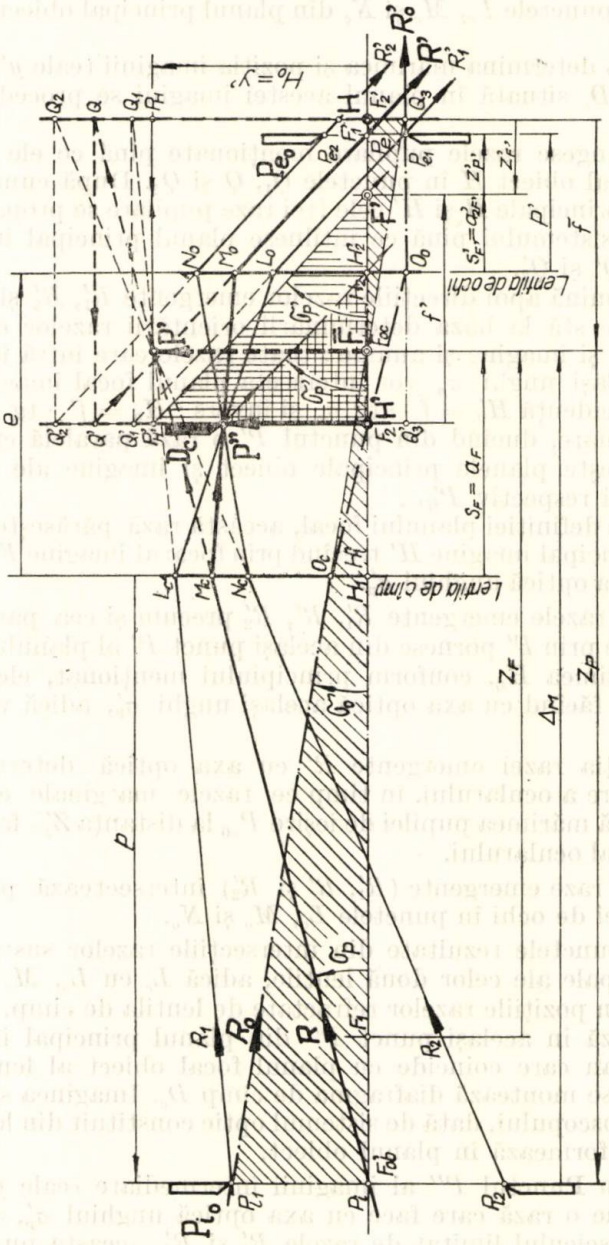


Fig. 1

În prezența ocularului Huygens, constituit din două lentile plan-convexe, orientate cu dioptrii curbi către obiectiv și situat cu planul focal obiect în planul imaginii y', razele pupilare sînt refractate de către lentila de cîmp L_c în punctele L_c, M_c și N_c din planul principal obiect H_1 al acestei lentile.

Pentru a determina mărimea și poziția imaginii reale y'' și a diafragmei de cîmp D_c situată în planul acestei imagini se procedează în felul următor :

Se prelungesc razele pupilare menționate pînă ce ele intersectează planul principal obiect H în punctele Q_1, Q și Q_2. După cum se cunoaște, între planele principale H și H' cele trei raze pupilare se propagă paralel cu axa optică a sistemului pînă ce întîlnesc planul principal imagine H' în punctele Q_1', Q' și Q_2'.

Se determină apoi direcțiile razelor emergente R_1', R_2' și R', aplicînd principiul care stă la baza determinării orientării razelor conjugate din spațiile obiect și imagine și anume : toate razele care intră într-un sistem optic sub același unghi σ_p vor intersecta planul focal imagine la aceeași înălțime de incidență $H_0' = \bar{f} \cdot \operatorname{tg} \sigma_p$ și invers : $H_0 = f' \cdot \operatorname{tg} \sigma_p'$.

Prin urmare, ducînd din punctul P' o rază paralelă cu axa optică, aceasta întîlnește planele principale obiect și imagine ale ocularului în punctele P_H și respectiv $P_{H'}'$.

Conform definiției planului focal, această rază părăsește punctul $P_{H'}'$ din planul principal imagine H' trecînd prin focarul imagine F' al ocularului și făcînd cu axa optică unghiul σ_p'.

Întrucît razele emergente R_1', R', R_2' precum și cea paralelă cu axa optică ce trece prin F' pornesc din același punct P' al planului focal obiect situat la înălțimea H_0, conform principiului menționat, ele vor ieși din sistemul optic făcînd cu axa optică același unghi σ_p', adică vor fi paralele între ele.

Intersecția razei emergente R' cu axa optică determină centrul pupilei de ieșire a ocularului, în timp ce razele marginale emergente R_1' și R_2' determină mărimea pupilei de ieșire P_{e0} la distanța $Z_{p'}'$ față de planul focal imagine al ocularului.

Cele trei raze emergente (R_1', R' și R_2') intersectează planele principale ale lentilei de ochi în punctele L_o, M_o și N_o.

Unind punctele rezultate din intersecțiile razelor susmenționate cu planele principale ale celor două lentile, adică L_c cu L_o, M_c cu M_o și N_c cu N_o, se obțin pozițiile razelor refractate de lentila de cîmp. Cele trei raze se intersectează în același punct P'' din planul principal imagine H' al ocularului, plan care coincide cu planul focal obiect al lentilei de ochi. În acest plan se montează diafragma de cîmp D_c. Imaginea sa, lucarna de intrare a microscopului, dată de sistemul optic constituit din lentila de cîmp și obiectiv se formează în planul obiect.

Dacă din Punctul P'' al imaginii intermediare reale y'' se duce în spațiul imagine o rază care face cu axa optică unghiul σ_p', adică o rază paralelă cu fasciculul limitat de razele R_1' și R_2', aceasta nu poate trece decît prin punctele nodale ale lentilei de ochi, puncte, care, în cazul lentilelor scăldate în aer, se confundă cu cele principale (H_2 și H_2') deoarece numai în acest caz raza trece nedeviată.

2.2. RELAŢII DE CALCUL

2.2.1. Pupila de intrare a ocularului

Admiţînd că pupila de intrare a ocularului se află în planul focal imagine al obiectivului, se poate scrie :

$$P_{ioc} = 2\, f'_0 \cdot \operatorname{tg}\ \sigma_0, \tag{1}$$

unde $2\ \sigma_0$ este unghiul de deschidere (apertură) al obiectivului.

2.2.2. Pupila de ieşire a ocularului

Cel mai important parametru al unui obiectiv de microscop îl consti tuie apertura

$$A_0 = n_0\ \sin\ \sigma_0. \tag{2}$$

Valoarea aperturii se consideră cunoscută, dată iniţial.

Între aperturile obiect şi imagine ale obiectivului există relaţia

$$A_0 = \beta'_0 \cdot A'_0 \tag{3}$$

sau

$$n_0 \cdot \sin\ \sigma_0 = \beta'_0 \cdot n' \cdot \sin\ \sigma'_0. \tag{4}$$

Pentru sisteme scăldate în aer se obţine

$$\sin\ \sigma_0 = \frac{A}{\beta'_0}. \tag{5}$$

În figura 1 se observă că raza care trece prin punctul P_{i1} situat la marginea pupilei de intrare a ocularului, şi focarul obiect $\overline{F}$ va ieşi din sistem paralelă cu axa optică pe la marginea pupilei de ieşire P_{e1}.

Această rază intersectează planele principale obiect şi imagine în punctele Q_3 şi Q'_3, iar lentilele de cîmp şi de ochi în punctele O_c şi, respectiv, în O_o.

Tot în figura 1 se observă mai departe că $\Delta\ \overline{F}\ P_i P_{i1} \sim \Delta\ \overline{F}\ F'_1\ Q_3$, iar $|\bar{f}| = |f'|$ şi deci se poate scrie relaţia :

$$\frac{P_e}{P_i} = \frac{f'}{\Delta_M},$$

din care rezultă diametrul pupilei de ieşire:

$$P_e = P_i \frac{f'}{\Delta_M}. \tag{6}$$

Diametrul pupilei de ieşire se poate deduce şi din $\Delta \overline{F} F_1' Q_3$:

$$P_e = 2 f' \operatorname{tg} \sigma_0'. \tag{7}$$

Introducînd relaţia (5) în relaţia (7) se obţine

$$P_e = 2 f' \frac{A_0}{\beta_0'}, \tag{8}$$

deoarece unghiul σ_0' este suficient de mic pentru a scrie $\sin \sigma_0' = \operatorname{tg} \sigma_0'$.

Pentru aperturi mari relaţia (8) dă valori ceva mai mici decît relaţia (6), deoarece $\operatorname{tg} \sigma_0' > \sin \sigma'_0$.

2.2.3. Cîmpul unghiular imagine ($2\sigma_p'$)

Din $\Delta F' \overline{F}_2 P'_{H'}$, (fig. 1) se poate deduce

$$\operatorname{tg} \sigma_p' = \frac{y'}{f'}. \tag{9}$$

Mărimea y' (jumătatea imaginii intermediare) nu depăşeşte 10 mm la ocularele normale, cu diametrul exterior al monturii de 23,2 mm şi 14 mm la ocularele cu cîmp mare.

Din relaţia (9) rezultă focala ocularului

$$f' = \frac{y'}{\operatorname{tg} \sigma_p'}. \tag{9a}$$

Grosismentul ocularului este

$$\Gamma = \frac{250}{f'} = 250 \frac{\operatorname{tg} \sigma_p'}{y'}. \tag{10}$$

Din relaţia (10) rezultă că pentru grosismente mari ochiul trebuie să se rotească. De aceea, cîmpul obiect liniar al ocularului trebuie să scadă cu creşterea grosismentului.

2.2.4. Diametrul lentilei de cîmp $D_1 = 2\overline{H_1 L_c}$

În figura 1 se observă că diametrul lentilei de cîmp este reprezentat de dublul segmentului $\overline{H_1 L_c}$.

Din figura 3 rezultă :

$$\frac{y' - \frac{P_i}{2}}{\frac{D_1}{2} - \frac{P_i}{2}} = \frac{\Delta_M}{-p} = \frac{-p + s_F}{-p} = \frac{p - s_F}{p}$$

şi

$$\frac{(2\,y' - P_i)\,p}{p - s_F} = D_1 - P_i,$$

de unde

$$D_1 = P_i + \frac{p}{p - s_F}\,(2y' - P_i). \tag{11}$$

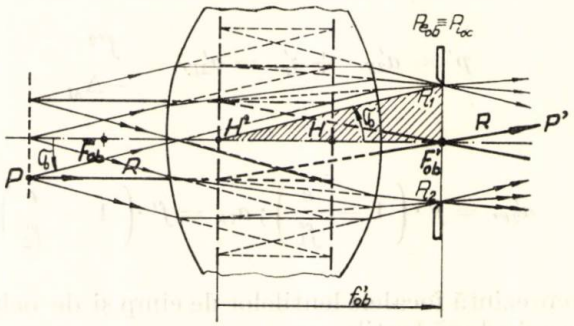


Fig. 2

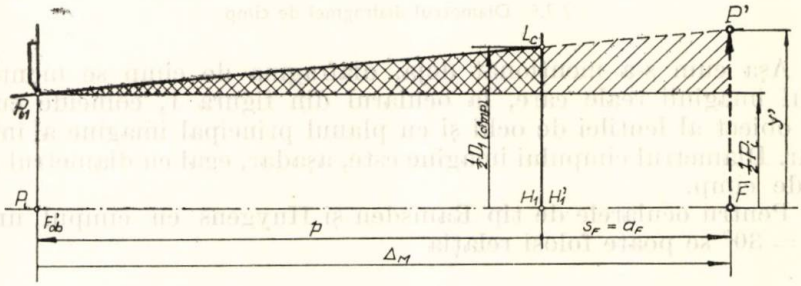


Fig. 3

Se mai poate scrie

$$D_1 = P_i + \frac{\Delta_M - a_F}{\Delta_M}\,(2y' - P_i). \tag{12}$$

2.2.5. Diametrul lentilei de ochi $D_2 = \overline{2H'_2 N_0}$

Din figura 1 se poate deduce diametrul lentilei de ochi :

$$D_2 = 2\,\overline{H'_2 N_0} = P_e + 2\,p' \operatorname{tg} \sigma'_p. \tag{13}$$

Introducînd (6) şi (9) în (13) rezultă

$$D_2 = P_i \frac{f'}{\Delta_M} + 2p' \frac{y'}{f'} \tag{13a}$$

sau

$$D_2 = P_i \frac{f'}{\Delta_M} + 2y' \frac{p'}{f'}. \tag{14}$$

În relaţiile de mai sus se introduc valorile date de expresiile

$$2\ y' = 2\ y \cdot \beta_0', \tag{15}$$

$$p' = a_{2F'}' + z_{p'}' = a_{2F'}' - \frac{f'^2}{-\Delta_M} \tag{16}$$

şi

$$a_{2F'}' = f' \cdot \left(1 - \frac{e}{f_1'}\right); a_{1F} = f' \cdot \left(1 - \frac{e}{f_2'}\right), \tag{17}$$

în care f_1' şi f_2' reprezintă focalele lentilelor de cîmp şi de ochi, iar $e = \overline{H_1' H_2}$ distanţa dintre cele două lentile.

2.2.6. Diametrul diafragmei de cîmp

Aşa cum s-a menţionat deja, diafragma de cîmp se montează în planul imaginii reale care, la ocularul din figura 1, coincide cu planul focal obiect al lentilei de ochi şi cu planul principal imagine al întregului ocular. Diametrul cîmpului imagine este, aşadar, egal cu diametrul diafragmei de cîmp.

Pentru ocularele de tip Ramsden şi Huygens cu cîmpul unghiular $2\ \sigma_p' = 30°$ se poate folosi relaţia

$$2y''\ \Gamma = 133{,}7 \tag{18 a}$$

sau

$$2y'' = 0{,}535 \cdot f'. \tag{18 b}$$

În figura 1 se observă că triunghiurile $F'\ \overline{F}_2\ P_{H'}'$, şi $H_2'\ \overline{F}_2\ P''$ sînt asemenea şi deci se poate scrie:

$$\text{tg}\ \sigma_p = \frac{D_c}{2f_2'} = \frac{2\ y'}{2\ f'},$$

de unde rezultă

$$D_c = 2y' \frac{f_2'}{f'} = 2\ f'\ \text{tg}\ \sigma_p' \frac{f_2'}{f'} = 2\ f_2'\ \text{tg}\ \sigma_p'. \tag{18 c}$$

2.3. EXEMPLU NUMERIC

Se cere dimensionarea unui ocular de tip Huygens 3 : 2 : 1 cu grosismentul $\Gamma = 10\times$, care să funcţioneze la un microscop al cărui obiectiv are $A_0 = 0{,}25$; $\beta_0' = 10:1$; $f_0' = 15{,}6$ mm şi $2y_0 = 1$ mm.

Se mai cunoaşte:

$$f' = \frac{3}{2}a;\ f_1' = 3\ a;\ e = 2\ a;\ f_2' = a.$$

Ceilalţi parametri constructivi se calculează astfel:

$$f' = \frac{250}{\Gamma} = \frac{250}{10} = 25 \text{ mm},$$

$$a = \frac{2}{3}f' = \frac{2}{3}\cdot 25 = 16{,}666 \text{ mm},$$

$$f_1' = 3\ a = 3\cdot 16{,}6666 = 49{,}998 \approx 50 \text{ mm},$$

$$f_2' = a = 16{,}666 \text{ mm},$$

$$e = 2\ a = 33{,}33332 \text{ mm},$$

$$z_F = \overline{F_1 F} = \frac{9}{4}a = 74{,}7 \text{ mm};$$

$$a_F = \overline{H_1 F} = s_F = -f'\left(1 - \frac{e}{f_2'}\right) = -25\left(1 - \frac{33{,}33}{16{,}66}\right) = 25 \text{ mm},$$

$$z_{F'}' = \overline{F_2' F'} = -\frac{1}{2}a = -8{,}33 \text{ mm},$$

$$a_{2F'}' = \overline{H_2' F'} = f'\left(1 - \frac{e}{f_1'}\right) = 25\left(1 - \frac{33{,}33}{50}\right) = 8{,}33 \text{ mm},$$

$$\Delta_M = \overline{F_0' F_{0c}} = \beta_0' f_0' = 10\cdot 15{,}6 = 156 \text{ mm},$$

$$P_{e0} = P_{i_{oc}} = 2 f_0' \operatorname{tg} \sigma_0 = 2\cdot 15{,}6\cdot \operatorname{tg} 14^\circ 30' = 2\cdot 15{,}6\cdot 0{,}258 \approx 8{,}04 \text{ mm},$$

$$P_e = P_{i_{oc}} \frac{f'}{\Delta_M} = 8{,}04\frac{25}{156} = 1{,}288 \text{ mm},$$

$$P_e = 2\ f'\frac{A_0}{\beta_0'} = 2\cdot 25\frac{0{,}25}{10} = 1{,}25 \text{ mm},$$

$$p' = a'_{2F'} + z'_{p'} = a'_{2F'} - \frac{f'^2}{-\Delta_M} = 8{,}33 - \frac{25^2}{-156} = 12{,}33 \text{ mm},$$

$$D_1 = P_i + \frac{p}{p - s_F}(2y' - P_i) = 8{,}04 + \frac{156 - 25}{156}(10 - 8{,}04) \approx 9{,}67 \text{ mm},$$

$$D_2 = P_i \frac{f'}{\Delta_M} + 2y' \frac{p'}{f'} = 8{,}04 \frac{25}{156} + 10 \frac{12{,}33}{25} = 6{,}18 \text{ mm},$$

$$D_c = 2y \frac{f'_2}{f'} = 10 \frac{16{,}66}{25} = 6{,}66 \text{ mm}.$$

3. CALCULUL DE GABARIT AL OCULARELOR DE TIP RAMSDEN

3.1. PROPAGAREA LUMINII PRIN OCULARELE DE TIP RAMSDEN

În figura 4 se vede propagarea luminii printr-un ocular de tip Ramsden 3 : 2 : 3 care funcţionează la un microscop la care obiectul este iluminat cu fascicule telecentrice sub unghiul de apertură $\pm \sigma$.

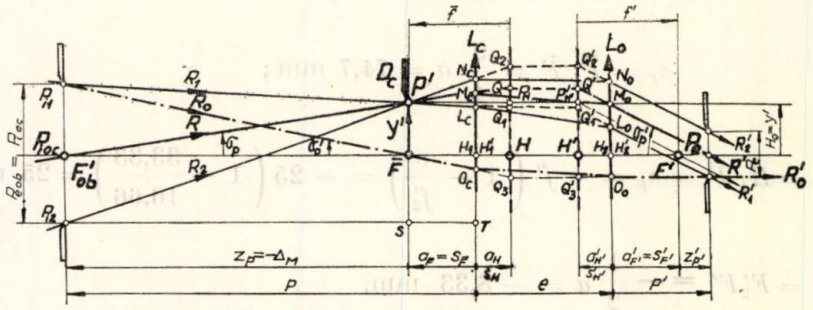


Fig. 4

Raza pupilară principală R, paralelă cu axa optică în spaţiul obiect al obiectivului, iese din obiectiv prin centrul pupilei de ieşire, adică prin focarul imagine al obiectivului (F'_{0b}), făcînd cu axa optică unghiul σ_p.

Razele pupilare R_1, R şi R_2, izvorîte din punctul obiect marginal P, se întîlnesc în punctul P' din planul focal obiect al ocularului, formînd imaginea y' a obiectului y. În acest plan se montează diafragma de cîmp D_c. Imaginea sa dată de obiectiv limitează net spaţiul obiect.

Cele trei raze intersectează real „lentila de cîmp" în punctele N_c, M_c şi L_c şi virtual planul principal obiect H în punctele Q_1, Q şi Q_2. Între planele principale, razele virtuale se propagă paralel cu axa optică pînă ce intersectează planul principal imagine în punctele Q'_1, Q' şi Q'_2. Punctele L_0, M_0 şi N_0 reprezintă intersecţiile reale ale razelor R_1, R şi R_2 cu lentila de ochi infinit subţire.

Pentru a determina poziţiile razelor emergente R_1', R' şi R_2' se duce din punctul imagine P' o rază paralelă la axa optică pînă ce aceasta intersectează planele principale în punctele P_H şi $P_{H'}$. După cum se ştie, această rază trebuie să treacă prin focarul imagine F'.

Razele R_1', R' şi R_2', pornind din acelaşi punct P' al planului focal obiect, vor ieşi din ocular paralele între ele, făcînd cu axa optică unghiul σ_p'.

Deoarece raza pupilară R trece prin centrul pupilei de intrare a ocularului, conjugate sa, raza R', trece prin centrul pupilei de ieşire. Razele R_1' şi R_2' determină mărimea pupilei de ieşire a ocularului şi a întregului aparat.

Drumul razelor prin ocular se găseşte prin unirea punctelor N_c cu N_0, M_c cu M_0 şi L_c cu L_0.

3.2. RELAŢIILE DE CALCUL

3.2.1. Pupila de intrare a ocularului

Pupila de intrare a ocularului este identică cu pupila de ieşire a obiectivului şi se determină cu relaţia (1).

3.2.2. Diafragma de cîmp

Diametrul diafragmei de cîmp este egal cu mărimea imaginii intermediare.

$$D_c = 2\ y' = 2\ \beta_0'\ y. \tag{19}$$

Imaginea intermediară $2y'$ este limitată de diametrul tubului mecanic,

3.2.3. Pupila de ieşire a ocularului

Din $\Delta\ \overline{F}\ H\ Q_3$ (fig. 4) se deduce diametrul pupilei de ieşire

$$P_e = 2\overline{HQ_3} = 2\ f'\ \text{tg}\ \sigma_0'. \tag{20}$$

Pentru sisteme optice scăldate în aer există relaţia $|\bar{f}| = |f'|$, iar pentru unghiuri σ_0' mici se admite tg σ_0' = sin σ_0'.

În aceste condiţii relaţia (20) poate fi scrisă sub forma :

$$P_e = 2\ f'\ \sin\ \sigma_0'. \tag{20 a}$$

Înlocuind sin $\sigma_0' = A_0'$ cu valoarea sa din relaţia (3) se obţine

$$P_e = 2f'\frac{A_0}{\beta_0'} = 2f'\frac{A_0}{\frac{\Delta_M}{f_0'}} = 2f_0' \cdot f'\ \frac{A_0}{\Delta_M}. \tag{20 b}$$

Se știe însă că raportul $\frac{f'_0 \cdot f'_{0c}}{\Delta_M}$ reprezintă focala microscopului f'_M.

Ca urmare, expresia pupilei de ieșire devine:

$$P_e = 2\, f'_M \cdot A_0. \tag{20 c}$$

Pe de altă parte, din asemănarea triunghiurilor cu vîrfurile în $\overline{F}$ și cu bazele alcătuite din pupilele de intrare și de ieșire ($\Delta\, P_{i1}\, \overline{F}\, F'_{0b} \sim \Delta\, Q_3\, \overline{F}\, H$) se obține relația

$$\frac{P_e}{P_i} = \frac{\bar{f}}{z_p} = \frac{-f'_z}{-\Delta_M},$$

din care rezultă

$$P_e = P_i \frac{f'}{\Delta_M} = P_i \frac{a_H - s_F}{\Delta_M} = P_i \frac{a_H - s_F}{\Delta_M}. \tag{20 d}$$

Poziția pupilei de ieșire se determină cu relația de conjugare:

$$z'_{p'} = -\frac{f'^2}{z_p} = \frac{f'^2}{-\Delta_M}. \tag{21}$$

3.2.4. Cîmpul unghiular imagine ($2\sigma'_p$)

Din $\Delta\, P'_{H'}\, H'\, F'$ rezultă

$$\operatorname{tg}\, \sigma'_p = \frac{y'}{f'}. \tag{22}$$

3.2.5. Diametrul lentilei de cîmp $D_1 = 2\overline{H_1 N_c}$

În figura 4 se observă că $\Delta\, N_c\, P_{i2}\, T \sim \Delta\, P' P_{i2} S$. Ca urmare, se poate scrie:

$$\frac{\frac{D_1}{2} + \frac{P_i}{2}}{\frac{2y'}{2} + \frac{P_i}{2}} = \frac{p}{z_p},$$

de unde

$$D_1 = \frac{p}{z_p}\, (2\, y' + P_i) - P_i$$

sau

$$D_1 = \frac{\Delta_M - a_F}{\Delta_M}(2\ y' + P_i) - P_i, \tag{23}$$

în care

$$a_F = f'\left(1 - \frac{e}{f_2'}\right), \quad \Delta_M = \beta_0' \cdot f_0',$$

$$p = a_F - \Delta_M \text{ şi } e = \frac{\varphi_1' + \varphi_2' - \varphi'}{\varphi_1' \cdot \varphi_2'} = \overline{H_1' H_2}.$$

3.2.6. Diametrul lentilei de ochi $D_2 = \overline{2H_2' N_0}$

În figura 4 se vede că diametrul lentilei de ochi este

$$D_2 = 2\ \overline{H_2' N_0} = 2\ (\overline{H_2' M_0} + \overline{M_0 N_0}) = 2\ p'\ \text{tg}\ \sigma_p' + P_e$$

sau

$$D_2 = 2\ y' \frac{p'}{f'} + P_i \frac{f'}{\Delta_M}. \tag{24}$$

Se mai poate scrie:

$$D_2 = 2\ y' \frac{a_{F'}' + z_{P'}'}{f'} + P_i \frac{f'}{\Delta_M}, \tag{25}$$

unde

$$a_{F'}' = f'\left(1 - \frac{e}{f_1'}\right), \qquad z_{p'}' = \frac{f'^2}{\Delta_M}$$

$$\text{şi } p' = a_{F'}' + z_{p'}'.$$

3.3. EXEMPLU NUMERIC

Se cere dimensionarea unui ocular de tip Ramsden cu grosismentul $\Gamma = 10 \times (3:2:3)$, pentru un microscop care are caracteristicile menţionate în § 2.3.

Ocularul 3 :2 : 3 are parametrii următori:

$$f' = \frac{9}{4}a,$$

$$f_1' = 3\ a,$$

$$f_2' = 3\ a,$$

$$e = \overline{H_1' H_2} = 2\ a,$$

$$\Delta_0 = -4\ a.$$

Celelalte caracteristici se determină astfel :

$$f' = \frac{250}{\Gamma} = \frac{250}{10} = 25 \text{ mm},$$

$$a = \frac{4}{9} f' = \frac{4}{9}\ 25 = 11{,}11 \text{ mm},$$

$$f_1' = f_2' = 3\ \text{a} = 3 \cdot 11,\ 11 = 33{,}33 \text{ mm},$$

$$e = 2\ a = 2 \cdot 11{,}11 = 22{,}22 \text{ mm},$$

$$\Delta_0 = \overline{F_1' F_2} = e - (f_1' + f_2') = -4\ a = -44{,}44 \text{ mm},$$

$$a_F = a_{1F} = s_F = \overline{H_1 F} = -f'\left(1 - \frac{e}{f_2'}\right) = -\frac{3}{4}\ a = -\frac{3}{4}\ 11{,}11 =$$

$$= -8{,}33 \text{ mm},$$

$$a_{F'}' = a_{2F'}' = s_{F'}' = \overline{H_2' F'} = f'\left(1 - \frac{e}{f_1'}\right) = +\frac{3}{4}\ a = \frac{3}{4} 11{,}11 =$$

$$= 8{,}33 \text{ mm},$$

$$a_{1H} = a_H = s_H = \overline{H_1 H} = -f_1' \frac{e}{\Delta_0} = +f' \frac{e}{f_2'} = \frac{3}{2}\ a = \frac{3}{2} 11{,}11 =$$

$$= 16{,}66 \text{ mm},$$

$$a_{2H'}' = a_{H'}' = s_{H'}' = \overline{H_2' H'} = f_2' \frac{e}{\Delta_0} = -f' \frac{e}{f_1'} = -\frac{3}{2}\ a = -\frac{3}{2}\ 11,\ 11 =$$

$$= 16{,}66 \text{ mm},$$

$$P_i = 2\ f_0' \text{ tg } \sigma_0 = 2 \cdot 15{,}6 \cdot 0{,}258 = 8{,}05 \text{ mm},$$

$$A_0' = \sin\ \sigma_0' = \frac{A_0}{\beta_0'} = \frac{0{,}25}{10} = 0{,}025 \text{ mm},$$

$$D_c = 2\ y' = 2y \cdot \beta_0' = 1 \cdot 10 = 10 \text{ mm},$$

$$P_e = 2\ f' \text{ tg } \sigma_0' = 2 \cdot 25 \cdot 0{,}0258 = 1{,}29 \text{ mm},$$

$$P_e \approx 2\ f' \frac{A_0}{\beta_0'} = 2 \cdot 25 \cdot \frac{0{,}25}{10} = 1{,}25 \text{ mm},$$

$$f'_M = \frac{P_e}{2A_0} = \frac{1{,}29}{2 \cdot 0{,}25} = \frac{1{,}29}{0{,}5} = 2{,}58 \text{ mm},$$

$$\Delta_M = \beta'_0 \cdot f'_0 = 10 \cdot 15{,}6 = 156 \text{ mm},$$

$$z_p = -\Delta_M = -156 \text{ mm},$$

$$z'_{p'} = \frac{f'^2}{\Delta_M} = \frac{25^2}{156} = 4 \text{ mm},$$

$$\operatorname{tg} \sigma'_p = \frac{y'}{f'} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

$$\sigma'_p \approx 11°20 \rightarrow 2 \quad \sigma'_p = 22°40',$$

$$p = a_F - \Delta_M = -8{,}33 - 156 = -164{,}33 \text{ mm},$$

$$D_1 = \frac{p}{z_p}(2y' + P_i) - P_i = \frac{-164{,}33}{-156}(10 + 8{,}05) - 8{,}05,$$

$$D_1 \approx 11 \text{ mm},$$

$$p' = a'_{F'} + z'_{p'} = 8{,}33 + 4 = 12{,}33 \text{ mm},$$

$$D_2 = 2y' \frac{p'}{f'} + P_i \frac{f'}{\Delta_M} = 10 \frac{12{,}33}{25} + 8{,}05 \frac{25}{156} \approx 6{,}23 \text{ mm}.$$

La diametrele utile D_1 și D_2 se adaugă mărimea δD care depinde de modul de fixare al lentilei.

În cazul cînd lentilele sînt groase, diametrele lor trebuie să fie mai mari cu 2—3 mm, în special lentila de ochi.

Primită la redacție la 28 martie 1972.

RECENZII

VLADIMIR KOLOUŠEK, *Dynamics in Engineering Structures*. Academia Praha, Butterworths, London, 1973, 580 pagini

Lucrarea cu titlul de mai sus reprezintă rezultatul unor preocupări ale profesorului Koloušek, în proiectare şi cercetare, referitoare la structuri supuse la solicitări dinamice.

Încadrîndu-se în domeniul vibraţiilor, lucrarea nu este însă un tratat de teoria vibraţiilor, întrucît abordează doar unele probleme ale acestui domeniu, mai puţin studiate în literatura de specialitate, de care autorul s-a ocupat îndeosebi.

În primul capitol, se examinează modul de scriere a ecuaţiilor de mişcare în sisteme elastice cu mai multe grade de libertate, folosind metoda coeficienţilor de influenţă sau metoda coeficienţilor elastici. Prin calcul matriceal, se studiază vibraţiile libere şi forţate. Capitolul se încheie prin examinarea sistemelor simetrice şi ciclosimetrice.

Al doilea capitol studiază vibraţiile longitudinale, torsionale şi transversale ale barelor prismatice, libere sau forţate.

În al treilea capitol se studiază cadrele formate din bare prismatice, plane sau spaţiale, în vibraţii libere sau forţate.

Capitolul 4 se ocupă de barele neprismatice, drepte, curbe în plan sau în spaţiu, dînd metodele de studiu ale vibraţiilor, însoţite de o serie de exemple de calcul.

Capitolul 5 studiază sistemele de bare ciclosimetrice spaţiale, precum şi sistemele plane cu elemente repetate (poduri cu mai multe deschideri), cadrele multiple.

Al şaselea capitol face o amplă analiză a modului cum intervin amortizările în ecuaţiile de vibraţii. Se iau în considerare diferitele legi de amortizare cunoscute.

În capitolul 7 se studiază efectul sarcinilor periodice mobile asupra podurilor metalice şi de beton armat.

Capitolul 8, intitulat „efecte secundare", se ocupă de probleme ca : efectul forţei tăietoare şi al inerţiei de rotaţie asupra vibraţiilor transversale, efectul forţei axiale.

În capitolul 9 se arată alte aplicaţii ale *funcţiilor de frecvenţă F* (a, d), definite în cadrul lucrării : impactul transversal, vibraţiile de încovoiere ale plăcilor.

Capitolul 10, „anexe" însumînd 165 pagini (aproape 30% din lucrare) cuprinde un mare număr de tabele ale diferitelor funcţii ce intervin în studiul vibraţiilor.

Prin materialul deosebit de interesant pe care îl cuprinde, prin mulţimea de tabele, lucrarea profesorului Koloušek este un auxiliar deosebit de preţios pentru cei care — în cercetare sau proiectare — lucrează în domeniul vibraţiilor în diferite elemente de construcţii.

Gh. Buzdugan

ŞT. ZAREA, N. VASILIU

COMPORTAREA ATENUATORULUI-DERIVAŢIE PLIN CU LICHID FAŢĂ DE O UNDĂ DE PRESIUNE SIMPLĂ

În lucrare se analizează eficacitatea unui atenuator cu lichid care formează o ramificaţie închisă a unei conducte, utilizîndu-se pentru aceasta metoda undelor asociate de debit şi de presiune. Se evidenţiază astfel faptul că un atenuator cu lichid nu împiedică propagarea undelor de presiune în conducta protejată, ci, prin fragmentarea acestora în serii infinite de unde de mică intensitate, întîrzie transmiterea suprapresiunii în conducta din aval, dînd astfel posibilitate undelor negative provenite din diverse puncte ale sistemului hidraulic să ajungă la conducta protejată şi să atenueze efectul undelor transmise iniţial.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 3—13
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

T. OROVEANU

ASUPRA UNEI ECUAŢII NELINIARE DIN TEORIA FILTRĂRII

Se studiază ecuaţia lui Boussinesq pentru cazul filtrării plane şi se arată care sînt condiţiile de existenţă şi unicitate a soluţiei unei anumite probleme, condiţii care sînt satisfăcute şi de o soluţie aproximativă cunoscută.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 15—23
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

DOINA BRĂDEANU

FORMULE NUMERICE ÎN VARIABILELE LUI MISES PENTRU GROSIMILE STRATULUI-LIMITĂ PLAN-INCOMPRESIBIL

Se deduc formule numerice care indică corespondenţa dintre variabilele lui Mises (x, ψ) şi coordonatele stratului-limită incompresibil plan-paralel. Se dau, de asemenea, formule pentru calculul grosimilor stratului-limită. Aceste formule se aplică, folosind o integrare numerică cu ajutorul calculatorului FELIX C 256, la stratul-limită care se formează pe cilindrul circular.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 25—37
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

G. BĂRĂNESCU

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE ALE UNOR TERMENI DE ORDIN PAR ODATĂ CU MOMENTUL EXTERN AL TERMENILOR DE ORDINUL ÎNTÎI LA MOTORUL ÎN LINIE ÎN DOI TIMPI CU NUMĂR PAR DE CILINDRI ŞI APRINDERI UNIFORM REPARTIZATE

În lucrare se stabilesc situaţiile care permit echilibrarea unor termeni de ordin par odată cu momentul extern al termenilor de ordinul întîi la motoarele în doi timpi cu număr par de cilindri, aprinderi uniform repartizate şi distanţe egale între cilindri consecutivi. Soluţiile sînt deosebit de avantajoase în cazul motoarelor mari la care odată cu echilibrarea momentului extern al termenilor de ordinul întîi se poate echilibra şi momentul extern al termenilor de ordinul doi deoarece acest moment poate provoca trepidaţii însemnate. Teoria elaborată are un caracter general, ea putînd fi aplicată oricare ar fi numărul de cilindri ai motorului.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 39—50
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

A. P. STOICESCU

CONTRIBUȚII LA STUDIUL STABILITĂȚII AUTOMOBILULUI CU DIFERENȚIAL AUTOBLOCABIL

În lucrare se studiază stabilitatea la perturbații mici a automobilului cu diferențial autoblocabil, evidențiindu-se influența unor parametri constructivi și a diferențialului asupra stabilității mișcării precum și asupra vitezelor critice. Se arată că prin folosirea diferențialului autoblocabil se îmbunătățește stabilitatea mișcării comparativ cu cea din cazul automobilului cu diferențial normal. În cazul neglijării efectelor aerodinamice se deduce o formulă simplă pentru calculul vitezei critice.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 51—73
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M. RADEȘ

METODE DE ANALIZĂ GRAFICĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC AL SISTEMELOR MECANICE

În lucrare se prezintă modul de utilizare a diagramelor polare ale răspunsului în frecvență la determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor. Se arată importanța definirii corecte a rezonanței și antirezonanței, precum și dificultățile pe care le ridică determinarea experimentală a acestora. Se propune un criteriu de localizare a rezonanței și o metodă pentru calculul factorului de amortizare al elementelor folosite în izolarea antivibratorie.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 75—103
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

. DUMITRESCU, C. VENETE, GH. DODESCU

PROCEDEE PENTRU DETERMINAREA EFORTURILOR DIN PRĂJINILE INSTALAȚIILOR DE POMPAJ A ȚIȚEIULUI, ÎN REGIM DINAMIC, PRIN UTILIZAREA SISTEMELOR DE CALCUL AUTOMAT

În articol este prezentat un nou procedeu de analiză a comportării în regim dinamic a garniturilor de prăjini ale instalațiilor cu pompaj de adîncime pentru extracția țițeiului, prin utilizarea metodelor și tehnicilor de calcul specifice informaticii aplicate.
Analiza urmărește — în principal — să determine repartiția eforturilor în lungul prăjinilor de pompaj, precum și variația locală a acestor eforturi în timp, în cadrul procesului de pompare a țițeiului.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 105—120
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

T. PANĂ, VASILICA COSAC

VIBRAȚIILE LATERALE DE ÎNCOVOIERE-RĂSUCIRE ALE GRINZII-PENDUL. I

În lucrare se stabilește sistemul de ecuații diferențiale care guvernează mișcarea vibratorie de încovoiere-răsucire a grinzii, produsă de oscilațiile pendulare laterale ale acesteia, și se studiază soluțiile lui atît pentru regimul staționar de vibrație, cît și pentru cel de rezonanță. Sistemul oscilant fiind autoexcitat, în apropierea rezonanței au loc interferențe între oscilațiile pendulare și cele de încovoiere, care, în anumite condiții, conduc la apariția bătăilor. Se ajunge la concluzia că perioada bătăilor crește rapid odată cu apropierea de rezonanță, devenind infinită la atingerea acesteia.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 121—136
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

C. STĂNESCU, V. VISARION

STĂRI DE TENSIUNE ÎN TEORIA PLĂCILOR CURBE DE MICĂ CURBURĂ. I

Sistemul de ecuaţii, relativ simplu, al teoriei plăcilor curbe de mică curbură permite aplicarea, fără dificultăţi principiale deosebite, a metodei integrării asimptotice a ecuaţiilor cu derivate parţiale conţinînd un parametru mic şi deducerea pe această cale a stărilor de tensiune.
Metoda integrării asimptotice este utilizată sub forma axiomatizată propusă în lucrarea [1], generalizînd rezultatele deduse de A. L. Goldenweizer [2], [4].

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 137—152
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

TR. ONEŢ

CONTRIBUŢII LA STUDIUL ARTICULAŢIEI PLASTICE ÎN ELEMENTELE DIN BETON UŞOR ARMAT

Se prezintă rezultatele unui studiu teoretic şi experimental cu privire la comportarea elementelor încovoiate cu secţiune dreptunghiulară (simplu sau dublu armată) în faza plastică, bazat pe cunoaşterea particularităţilor de comportare ale betonului uşor armat cu agregate de granulit (de tip Mureşeni) sub acţiunea încărcărilor de scurtă durată.
Se propun relaţii de calcul pentru cele două limite ale stadiului de comportare plastică a elementului (momentul încovoietor de plastificare şi momentul încovoietor de rupere), precum şi pentru evaluarea capacităţii de rotire a articulaţiei plastice.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 153—175
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

D. COŞA, C. PAVEL

CALCULUL DE ORDINUL II AL GRINZILOR „T" CU TALPA LATĂ, FLEXIBILĂ, LA ÎNCOVOIERE DREAPTĂ

În ultimul timp a căpătat o largă dezvoltare utilizarea grinzilor prefabricate din beton precomprimat, de mare deschidere, avînd secţiunea transversală în formă de T, cu talpa lată şi relativ subţire. La asemenea grinzi ipoteza nedeformabilităţii secţiunilor transversale, acceptată pentru grinzile obişnuite încovoiate, este susceptibilă de a fi pusă sub semnul întrebării.
În lucrare, folosind o metodă inversă, se dă soluţia analitică a stării de efort şi deformaţie pentru cazul grinzii supusă la încovoiere dreaptă, de valoare constantă pe toată deschiderea. Formulele obţinute se pot utiliza prin interaţii.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974. p. 177—189
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

D. CONSTANTINESCU

ASUPRA LEGII FIZICE A BETONULUI ÎN DOMENIUL CURGERII LENTE LINIARE

În ultimii ani CEB—FIP şi ACI au propus noi grafice sau formule pentru funcţia de curgere lentă φ. care sintetizează rezultatele studiilor experimentale efectuate în Europa şi America pe o perioadă de peste 40 ani.
În lucrare se compară curbele de curgere lentă sub $\sigma(t) = \text{const.}$ şi curbele de relaxare sub $\varepsilon(t) = \text{const.}$ obţinute aplicînd propunerile CEB—FIP şi ACI.
Se propun de asemenea, formule care aproximează foarte bine graficele indicate de CEB—FIP pentru funcţia φ şi care permit totodată scrierea legii fizice a betonului solicitat monoaxial în domeniul curgerii lente liniare, sub forma unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul I sau II.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 191—217
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

D. RAŞEEV, D. ENE

UNELE PROBLEME PRIVIND ARMAREA SAPELOR CU TREI CONURI CU ALIAJE DURE

Se cercetează influenţa caracteristicilor relitului folosit la încărcarea sapelor şi a factorilor tehnologici asupra calităţii armării cu aliaje dure a sapelor cu trei conuri.
Se propune o nouă metodă tehnologică de prelucrare a relitului folosit la încărcare (cadmiere) şi se precizează parametrii procesului tehnologic de încărcare, prin care se asigură creşterea durabilităţii suprafeţelor active ale sapei cu trei conuri.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 1, 1974, p. 219—225
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

P. DODOC

CALCULUL DE GABARIT AL OCULARELOR DE TIP HUYGENS ŞI RAMSDEN

În lucrare se arată modul de formare a imaginii cu ajutorul razelor pupilare şi se indică relaţiile pentru calculul de gabarit la ocularele de tip Huygens şi Ramsden în funcţie de elementele optice situate anterior ocularului.

St. cerc. mec. apl., tom, 33, nr. 1, 1974, p. 227—241
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă,termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 1.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

I. S. GHEORGHIU, ALEXANDRU S. FRANSUA, Tratat de mașini electrice, vol. IV, mașini sincrone, 1972, 482 p., 30 lei.

P. P. TEODORESCU, Dinamica corpurilor liniare elastice, 1972 392 p., 24, 50 lei.

M. MIȘICU, Teoria mobilității elastice, 1972, 428 p., 23,50 lei.

EDMOND NICOLAU, Cîmpuri și unde electromagnetice, 1972, 350 p., 21,50 lei.

C. A. VASILESCU, S. FAUR, V. PIMSNER, GH. RĂDULESCU, Corelațiile dintre combustibilul lichid și motorul cu ardere internă, 1972, 336 p., 23, 50 lei

CHRISTIAN PELECUDI, Teoria mecanismelor spațiale, 1972, 512 p., 30 lei.

I. A. ADĂMUȚ, Analiza propagării undelor electromagnetice pe linii în regim tranzitoriu, 1972, 374 p., 25 lei.

VLAD IONESCU, Sisteme liniare, 1973, 228 p., 10 lei.

V. I. NITU, Fiabilitatea instalațiilor energetice, 1973, 362 p., 28 lei.

BAZIL POPA, VIRGINIA ISCRULESCU, Procese de ardere în cimp sonor, 1973, 256 p., 17 lei.

N. DĂNILĂ, Centrale nucleare-electrice, 1973, 775 p., 52 lei.

G. MOISIL, Controlul electric al coroziunii rețelelor subterane, 1973, 240 p., 9, 75 lei.

EDMOND NICOLAU, Radiația electromagnetică, 1973, 231 p., 10,50 lei.

M. MIȘICU, Încovoiere și torsiune, 1973, 380 p., 22 lei.

ADRIANA NĂSTASE, Utilizarea calculatoarelor în optimizarea formelor aerodinamice, 1973, 282 p., 21,50 lei.

M. M. NIȚĂ, Teoria zborului spațial, 1973, 500 p,. 31 lei.

AUGUSTIN PETRE, Teoria aeroelasticității. Fenomene dinamice periodice, 1973, 402 p., 29 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES

— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. . APL. TOM. 33, NR. 1, 1974, P. 1—244

I. P. Informația c. 3462

43 832

Lei 40.—

F2557

2
TOMUL 33
1974

1975 FEB 25

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil,*
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct,*
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție.*

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuța poștală 2001, București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, București

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 33 2/1974

SUMAR

STUDII

Pag.

DOINA BRĂDEANU, O metodă a micilor perturbaţii pentru ecuaţia stratului-limită 247

L. BRÎNDEU, Stabilitatea mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu limitator elastic, avînd un grad de libertate 257

CH. VASILIU, Influenţa dinamicităţii automobilului asupra procesului de depăşire . 267

G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU, Echilibrajul momentelor externe ale forţelor de inerţie la motoarele cu două linii paralele de cilindri şi doi arbori cotiţi care se rotesc în sensuri contrare 277

A. P. STOICESCU, Influenţa deblocării diferenţialului asupra stabilităţii automobilului cu diferenţial autoblocabil 297

M. BUCULEI, Asupra termoelastodinamicii solidului cu masă variabilă 317

R. C. BOGDAN, N. MANAFI, Analiza cinematică şi cinetostatică a unei unităţi de pompaj din industria petrolieră cu ajutorul calculatorului electronic 325

CHR. PELECUDI, D. IONESCU, ADRIANA MARINESCU, Analiza şi sinteza structural geometrică a mecanismelor 3 C 351

M. BUCULEI, SEVASTULA MIŢIS, I. POPESCU, Contribuţii la studiul vibraţiilor mecanismelor plane din familia a treia 365

C. STĂNESCU, V. VISARION, Stări de tensiune în teoria plăcilor curbe de mică curbură. II 379

I. COŞEREANU, I. DEUTSCH, T. NEAMŢU, FL. SPERCHEZ, Cercetări asupra rezistenţei arborelui cotit static nedeterminat, cu luarea în considerare a jocurilor în lagăre 403

N. POSEA, O metodă recurentă pentru calculul stabilităţii cadrelor etajate 415

I. SILION, Calculul distanţei optime pentru stabilizatorii multipli cu joc redus folosiţi în forajul sondelor 431

FL. DIMOFTE, ERMINA RĂDULESCU, Progrese înregistrate în domeniul maşinilor de rectificat cu performanţe superioare prin utilizarea broşelor lubrificate cu aer 465

RECENZII 477

ST. CERC MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 245 — 478

1—c.3628

O METODĂ A MICILOR PERTURBAȚII PENTRU ECUAȚIA STRATULUI-LIMITĂ

de DOINA BRĂDEANU
Universitatea din Cluj

Se introduce o metodă a micilor perturbații pentru ecuația lui Mises din teoria stratului-limită incompresibil de fluid vîscos. Se determină transformarea de coordonate și ecuațiile aproximațiilor de ordinele zero și unu. Se analizează problema calculului soluției inițiale, necesară în folosirea metodelor numerice.

Notații

$\bar{x}$, $\bar{\psi}$ — variabilele lui Mises; $\bar{x}$ se măsoară pe meridiana corpului, $\bar{\psi}$ este funcția de curent,
$\bar{u}(\bar{x}, \bar{\psi})$ — viteza în direcția $\bar{x}$ din interiorul stratului-limită,
$\bar{u}_1(\bar{x})$ — viteza scurgerii exterioare stratului-limită plan,
y — ordonata măsurată pe normala la suprafața corpului,
$\delta(\bar{x})$ — grosimea stratului-limită,
$\bar{\psi}_\infty$ — valoarea funcției de curent pentru $y = \delta$; $\bar{\psi}_\infty = \bar{\psi}(\bar{x}, \delta)$,
ν, μ — viscozitatea cinematică și viscozitatea dinamică,
ρ — densitatea fluidului,
ε — parametrul de perturbație,
α, β — variabile independente (vezi (2)—(3)—(6)),
L — o lungime caracteristică (de referință),
u_∞ — viteza de la infinit ($\vec{u}_\infty$ = const.),
W_0 — funcție definită cu formula (15),
W_1 — funcție definită cu formula (24),
c_0, c_1, C_0, C_1 — constante în expresiile vitezei exterioare din vecinătatea punctului critic,
0, 1 — indici pentru aproximația de ordinul zero și ordinul întîi.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 247 – 256

METODA MICILOR PERTURBAȚII PENTRU ECUAȚIA LUI MISES

1.1. *Ecuațiile perturbațiilor.* Ecuația stratului-limită dinamic incompresibil în raport cu variabilele lui Mises $(\bar{x}, \bar{\psi})$, unde $\bar{\psi}$ este funcția de curent, are următoarea formă parabolică [2], [3]:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \bar{u}_1\frac{\mathrm{d}\bar{u}_1}{\mathrm{d}\bar{x}} + \nu\bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\psi}}\right) \tag{1}$$

$$(0 \leqslant \bar{x}^0 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{x}_1;\quad 0 < \bar{\psi} < \infty,\ \psi_\infty),$$

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = 0,\ \bar{u}(\bar{x},\ \bar{\psi}_\infty) = \bar{u}_1(\bar{x}),\quad \bar{x}^0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

cu condiția inițială

$$\bar{u}(\bar{x}^0, \bar{\psi}) = \bar{u}^0(\bar{\psi}),\quad 0 \infty\ \bar{\psi} \leqslant \bar{\psi}_\infty. \tag{1'}$$

Se presupune că abscisa curbilinie $\bar{x}$, variabila $\bar{\psi}$ și viteza $\bar{u}_1(\bar{x})$ a scurgerii exterioare se pot reprezenta în forma următoarelor serii de puteri:

$$\bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(\alpha)\varepsilon^n = x_0 + \varepsilon x_1 + 0(\varepsilon^2), \tag{2}$$

$$\bar{\Psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\beta)\varepsilon^n = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + 0(\varepsilon^2), \tag{3}$$

$$\bar{u}_1(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(\alpha)\varepsilon^n = u_{10} + \varepsilon u_{11} + 0(\varepsilon^2) \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\psi} &= \sqrt{\nu}\,\bar{\Psi} = \sqrt{\nu L u_\infty}\,\psi^* = \\ &= \sum_0^\infty \bar{\psi}_n\varepsilon^n = \sqrt{\nu}\sum_0^\infty \Psi_n\varepsilon^n = \sqrt{\nu L u_\infty}\sum_0^\infty \psi_n\varepsilon^n \end{aligned}\right\}, \tag{4'}$$

unde ε este o mărime mică (parametrul de perturbație), care urmează să fie precizată în fiecare problemă particulară. Parametrul ε indică gradul de apropiere al aproximației considerate de soluția principală ($\varepsilon = 0$)

notată prin indicele zero. Variabilele α și β sînt noile variabile independente care trebuie, de asemenea, să fie precizate. Funcțiile x_n și u_{1n} se consideră continue și cu derivate continue.

Se deduc, imediat, următoarele formule :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{d\alpha}{d\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{1}{1 + \varepsilon x_1' + \varepsilon^2 x_2' + \dots} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} = \frac{d\beta}{d\Psi} \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{1}{1 + \varepsilon \Psi_1' + \varepsilon^2 \Psi_2' + \dots} \frac{\partial}{\partial \Psi} \tag{5}$$

$$\left(x_i' = \frac{dx_i}{dx}, \quad \Psi_i' = \frac{d\Psi_i}{d\Psi}, \quad i = 1, 2, \dots \right)$$

dacă se consideră că

$$\alpha = x_0 \equiv x, \quad \beta = \Psi_0 \equiv \Psi (\psi_0 \equiv \psi) \tag{6}$$

$$(\bar{\psi}_0 = | \bar{\nu} \Psi = \psi \sqrt{\nu L u_\infty}) \tag{6'}$$

și se lasă la o parte indicele zero de la x_0 și Ψ_0.

Vom căuta pentru viteza $\bar{u}$ din stratul-limită o soluție în forma seriei de puteri

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{\Psi}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, \Psi) \varepsilon^n = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + 0(\varepsilon^3) \tag{7}$$

și vom considera că

$$\bar{u}_1^2 = u_{10}^2 + 2\varepsilon u_{10} u_{11} + \varepsilon^2 (u_{11}^2 + 2 u_{10} u_{12}) + 0(\varepsilon^3),$$

$$\bar{u}^2 = u_0^2 + 2\varepsilon u_0 u_1 + \varepsilon^2 (u_1^2 + 2 u_0 u_2) + 0(\varepsilon^3). \tag{7'}$$

În aceste formule $u_0, u_1, \dots$ sînt funcții care vor trebui determinate în calitate de necunoscute principale ale problemei.

Aplicînd formulele precedente, ecuația (1) se transformă în următoarea identitate în raport cu ε :

$$[1 + 2\varepsilon \Psi_1' + \varepsilon^2 (\Psi_1'^2 + 2\Psi_2')] \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} - \frac{d\bar{u}_1^2}{dx} \right) \equiv (1 + \varepsilon x_1' + \varepsilon^2 x_2') \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \Psi^2}. \tag{8}$$

Din egalarea coeficienților puterilor lui ε, se deduc ecuațiile aproximațiilor de ordinul zero (0), ordinul întîi (I) și ordinul doi (II) în următoarele forme :

$$(0) \qquad \frac{\partial u_0^2}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u_{10}^2}{\mathrm{d}x} + u_0 \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2}, \tag{9}$$

$$(I) \qquad \frac{\partial}{\partial x}(u_0 u_1) = u_0 \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2}(u_0 u_1) + \frac{u_1}{2}\frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_{10}u_{11}) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x} - 2\frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}\Psi}\right) u_0 \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2}, \tag{10}$$

$$(II) \qquad \frac{\partial}{\partial x}(u_0 u_2) = u_0 \frac{\partial^2 (u_0 u_2)}{\partial \Psi^2} + \frac{u_2}{2}\frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_{10}u_{12}) + \\ + \frac{1}{2}(u_0 x_2' - 2\Psi_2' u_0 + u_1 x_1' - \Psi_1'^2 u_0)\frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2} + \frac{u_0}{2}\frac{\partial^2 u_1^2}{\partial \Psi^2} + \\ + (u_1 + u_0 x_1')\frac{\partial^2}{\partial \Psi^2}(u_0 u_1) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}u_{11}^2}{\mathrm{d}x}\right) - \\ - 2\Psi_1'\left(\frac{\partial (u_0 u_1)}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}(u_{10}u_{11})}{\mathrm{d}x}\right), \tag{11}$$

. . . . . .

$$(n) \qquad \frac{\partial U_n}{\partial x} = u_0 \frac{\partial^2 U_n}{\partial \Psi^2} + \frac{U_n}{2u_0}\frac{\partial^2 u_0^2}{\partial \Psi^2} + F_n(x, \Psi) \tag{12}$$

$$(U_n \equiv u_0 u_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

1.2. *Condiții la limită și proprietăți generale pentru funcțiile considerate.* Pe suprafața corpului și pe frontiera exterioară a stratului-limită, potrivit aderenței la suprafața solidă și a traversării continue (linie) a frontierei exterioare, avem condițiile la limită

$$u_i(x, 0) = 0, \quad u_i(x, \infty) = u_{1i}(x), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Se consideră, de asemenea, condiția inițială, din secțiunea inițială

$$u_i(x^0, \Psi) = u_i^0(\Psi), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

unde funcțiile $u_{1i}(x)$ sînt date prin dezvoltarea (4), iar funcțiile u_i^0 se presupun cunoscute în secțiunea inițială (ca și pe o linie caracteristică a unei ecuații parabolice).

— Se presupune că mișcarea vîscoasă se studiază în domeniul $D = \{(x, \Psi), 0 < x < x_1, 0 < \Psi < \infty\}$ (fie $\bar{D}$ domeniul închis) și că $u_i^0 > 0$ pentru $\Psi > 0$, $u_i^0(\Psi) \to 0$ pentru $\Psi \to 0$, $u_i^0 \to u_{1i}(x^0)$ pentru $\Psi \to \infty$, $du_i^0/d\Psi > 0$ pentru $\Psi = 0$.

Să presupunem că ecuațiile (9), (10) au soluții, care satisfac următoarele proprietăți :

1) $\bar{u}$ și u_0 sînt funcții continue și mărginite în domeniul $\bar{D}$,

2) $\bar{u} \geqslant 0$ și $u_0 \geqslant 0$ în domeniul $\bar{D}$,

3) derivatele de ordinul întîi și doi, care se află în (9), (10) sînt continue și mărginite în D,

4) $$\left|\frac{\partial f}{\partial \Psi}\right| \leqslant M, \quad \left|\sqrt{f}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \Psi^2}\right| \leqslant M \qquad (f \equiv \bar{u}^2, u_0^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Psi} \geqslant m > 0 \text{ pentru } 0 \leqslant \Psi \leqslant \psi^1,$$

unde mărimile M, m și Ψ^1 depind de x_1, $f(x^0, \Psi)$ și de viteza exterioară (presiune).

SOLUȚIE INIȚIALĂ (SOLUȚIE AUTOMODELATĂ)

2.1. *Aproximația de ordinul zero.* Pentru a determina soluția inițială, $u_0(x^0, \Psi) = u^0(\Psi)$, din secțiunea transversală $x = x^0$, ne vom referi la vecinătatea punctului critic ($x = 0$) unde, după cum este cunoscut, ecuația mișcării admite soluție automodelată (similară) dată de o ecuație diferențială ordinară care se poate introduce după cum urmează.

Fie transformarea de funcție și variabile

$$u_0^2 = u_{10}^2(1 - W_0), \; u_{10} = u_\infty U_{10}, \; x = LX \; (\Psi = \psi\sqrt{Lu_\infty}), \tag{15}$$

care aduce ecuația (9) cu condițiile la limită (13) la o problemă la limită cu condiții independente de x de forma

$$\frac{\partial}{\partial X}(U_{10}^2 W_0) = U_{10}^3\sqrt{1 - W_0}\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial \Psi^2}, \tag{16}$$

$$W(x, 0) = 1, \quad W(x, \infty) = 0.$$

Dacă facem în (16) transformarea de variabile

$$\xi = X, \; \eta = \alpha(X)\psi; \quad \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\alpha'}{\alpha}\eta\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

și luăm

$$U_{10} = C_0 X, \; \alpha(X) = \frac{1}{X} \quad (C_0 = \text{const.}), \tag{17}$$

atunci

$$\eta = \frac{\psi}{X}, \qquad \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial \psi^2} = \frac{1}{X^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tag{18}$$

şi ecuaţia (16), referitor la funcţia $W_0(\eta)$ dependentă numai de η, primeşte forma diferenţială ordinară

$$C_0\sqrt{1-W_0}\,W_0'' + \eta W_0' - 2W_0(\eta) = 0, \tag{19}$$
$$W(0) = 1, \quad W_0(\infty) = 0.$$

Soluţia $W_0(\eta)$ a acestei ecuaţii va folosi la calculul soluţiei iniţiale $u_0^0(\psi)$. Potrivit cu transformarea (15) avem formula

$$u_0^0 = u_\infty C_0 X^0 \sqrt{1-W_0^0} \tag{20}$$

$$(X^0 = x^0/L,\ W_0^0 = W_0(\eta^0 = \psi/X^0), \quad x^0 \text{ este dat}).$$

Se vede că $u_0^0(0) = 0$, ceea ce înseamnă că există compatibilitate între condiţia la limită şi condiţia iniţială (valori egale în punctul $(x^0, 0)$).

— Să menţionăm că, în vederea integrării numerice a ecuaţiei lui Mises (9), nu este nevoie să rezolvăm, efectiv, ecuaţia (19) deoarece se poate folosi ecuaţia lui Falkner-Skan şi soluţia ei. Într-adevăr, să efectuăm transformările

$$\xi_0 = \mu\rho\int_0^x u_{10}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu\rho c_0}{2}x^2,\ \eta_0 = \frac{u_{10}}{\sqrt{2\xi_0}}\rho y = y\sqrt{\frac{c_0}{\nu}} \quad (u_{10} = c_0 x), \tag{21}$$

$$\psi = \frac{u_{10}}{\sqrt{c_0 L u_\infty}} f_0(\eta_0),\ W_0 = 1 - \left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\eta_0}\right)^2 \tag{22}$$

$$\left(\text{unde funcţia de curent } \psi_0 = \psi\sqrt{\nu L u_\infty},\ u_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial y} = u_{10}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}\eta_0}\sqrt{\frac{c_0}{\nu}},\ \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0\right),$$

$$\eta = \frac{\psi}{X} = f_0\sqrt{\frac{c_0 L}{u_\infty}},$$

$$\frac{\mathrm{d}W_0}{\mathrm{d}\eta} = -2\sqrt{\frac{u_\infty}{c_0 L}}f_0'',\ \frac{\mathrm{d}^2 W_0}{\mathrm{d}\eta^2} = -2\frac{u_\infty}{c_0 L}\frac{f_0'''}{f_0'}$$

$$(u_{10} = c_0 x = c_0 L X = u_\infty U_{10} = u_\infty C_0 X,\ C_0 = c_0 L/u_\infty).$$

Atunci, ecuaţia (19), după cum se constată uşor, primeşte forma

$$f_0''' + f_0 f_0'' + 1 - f_0'^2 = 0 \tag{22'}$$
$$(f_0(0) = 0, f_0'(0) = 0, f_0'(\infty) = 1;\ f_0'(\eta_0) \equiv u_0/u_{10}),$$

adică, tocmai, un caz particular al ecuației lui Falkner-Skan care apare în studiul mișcării automodelate (similare) din vecinătatea punctului critic. Integrarea numerică a ecuației (22′) a fost efectuată de mai mulți autori. Se poate folosi soluția dată de Howarth sub forma unui tabel care conține valorile η_0, f_0, f_0' și f_0'' [2], [3].

Valorile soluției inițiale, din secțiunea inițială $x = x^0$, se vor calcula, în consecință, cu formula

$$W_0^0 = W_0(x^0, \psi) = 1 - \left[\left(\frac{df_0}{d\eta_0}\right)^2\right]^0 \tag{23}$$

$$(W_0^0(x^0, 0) = 1,\ W_0^0(x^0, \infty) = 0)$$

în modul următor : la valoarea dată $\psi = \psi_j$ corespunde, după (22), valoarea f_{0j} căreia putem face să-i corespundă, prin intermediul tabelului numeric, valoarea f_{0j}' care ne va da, după (23), valoarea $W_0^0 = W_{0j}^0$. Valorile W_{0j}^0 se pot, eventual, înlocui în formula (20) și să se obțină, astfel, valorile funcției $u_0^0(\psi)$.

2.2. *Aproximația de ordinul întîi.* Soluția inițială, pentru aproximația de ordinul întîi, este dată, ca și în cazul aproximației de ordinul zero, de soluția mișcării din vecinătatea punctului critic. Să aplicăm, atunci, ecuația (10) în vecinătatea punctului critic folosind transformările (15), (17)—(18) la care mai adăugăm transformarea

$$u_0 u_1 = u_\infty^2 U_{10} U_{11}(1 - W_1) \tag{24}$$

$$(u_{11} = u_\infty C_1 X,\ C_1 = \text{const.},\ \frac{dx_1}{dx} = 0,\ \Psi_1 = \psi_1 \sqrt{L u_\infty}).$$

Se obține ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi în raport cu W_1

$$2W_1 + \xi \frac{\partial W_1}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial W_1}{\partial \eta} = C_0 \sqrt{1 - W_0} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} C_0 \frac{1 - W_1}{\sqrt{1 - W_0}} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} - \frac{C_0^2}{C_1} \frac{d\psi_1}{d\psi} \sqrt{1 - W_0} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2}, \tag{25}$$

cu condițiile la limită, independente de ξ,

$$W_1(\xi, 0) = 1,\ W_1(\xi, \infty) = 0.$$

Pentru ca această ecuație să admită soluția automodelată $W_1(\eta)$ va trebui ca $d\psi_1/d\psi = KC_1/C_0 (K = \text{const.})$ și atunci ecuația (25) devine

$$C_0 \sqrt{1 - W_0}\ W_1'' + \eta W_1' - 2W_1 - \frac{C_0}{2} \frac{W_1 - 1 - 2K(W_0 - 1)}{\sqrt{1 - W_0}} W_0'' = 0, \tag{26}$$

$$W_1(0) = 1,\ W_1(\infty) = 0$$

$$(W_0 = W_0(\eta)).$$

Toate soluţiile automodelate sînt date de o singură ecuaţie diferenţială ordinară, aşa că, condiţiile la limită fiind identice pentru W_1 şi W_0, va trebui ca (26) să se reducă la (19) $[W_1 \equiv W_0]$ ceea ce se întîmplă dacă luăm $K = 1/2$.

Soluţia iniţială pentru problema la limită a aproximaţiei de ordinul întîi (10) va fi, după (24),

$$u_1^0(\psi) = C_1 u_\infty X^0 \sqrt{1 - W_0^0} \quad (\psi = \Psi/\sqrt{L u_\infty}) \tag{27}$$

dacă în ecuaţia (10), şi respectiv în transformarea (3), se consideră că

$$\frac{d\psi_1}{d\psi} = \frac{d\Psi_1}{d\Psi} = \frac{C_1}{2C_0}, \quad \Psi_1 = \frac{C_1}{2C_0}\Psi, \tag{28}$$

unde C_0 şi C_1 sînt constante date de expresiile cunoscute ale vitezelor exterioare u_{10} şi u_{11} în vecinătatea punctului critic (dependente de forma corpului dat). Din $W_1 = W_0$ deducem că în secţiune iniţială $x = x^0$ avem egalitatea

$$W_1^0(\eta) = W_0^0(\eta). \tag{29}$$

Referitor la viteza u_1 cu valorile iniţiale $u_1(x^0, \Psi) = u_1^0$ avem, dacă folosim şi (20), formula următoare :

$$\frac{u_1^0}{u_{11}^0} = \frac{u_0^0}{u_{10}^0} \quad \text{sau} \quad u_1^0 = u_\infty C_1 X^0 \sqrt{1 - W_0^0} \tag{30}$$

$$(x = LX, \; u_{11} = c_1 x = c_1 LX = u_\infty U_{11} = u_\infty C_1 X, \; C_1 = c_1 L/u_\infty).$$

După cum se observă, funcţia $u_1^0(\Psi)$ satisface condiţiile

$$u_1^0(0) = 0, \; \lim_{\Psi \to \infty} u_1^0(\Psi) = u_\infty C_1 X^0 = u_{10}^0, \tag{30'}$$

ceea ce dovedeşte compatibilitatea condiţiei iniţiale cu condiţiile la limită.

CONCLUZII ŞI OBSERVAŢII

Metoda micilor perturbaţii, mai puţin studiată în teoria stratului-limită, se poate aplica, în forma descrisă mai sus, dacă se cunosc dezvoltările (2)—(4) prin care se introduce parametrul de perturbaţie mic ε. Metoda micilor perturbaţii în raport cu variabilele lui Mises, expusă aici, prezintă, de altfel ca şi metodele clasice ale teoriei micilor perturbaţii, următoarele două avantaje importante :

— liniarizează ecuaţiile aproximaţiilor succesive superioare celei de ordinul zero,

— permite aplicarea unor procedee de iterație; aproximația de ordinul n conține numai funcțiile u_n, $u_{n-1}, \ldots, u_0$ în forma (12), unde $u_{n-1}, \ldots, u_0$ și F_n se consideră funcții cunoscute.
Ecuația de ordinul zero coincide cu ecuația lui Mises și se poate studia cu teoria acestei ecuații în ipoteza că u_{10} poate fi exprimată prin funcții elementare, simple, în raport cu x. Funcția $u_{10}(x)$, ca și toate funcțiile $u_{1i}(x)$ reprezintă influența formei corpului și se determină, prin formula (4), cu ajutorul teoriei fluidului ideal. Să remarcăm că aproximația de ordinul zero (9) are o singularitate pe suprafața corpului ($\partial^2 u_0/\partial \Psi^2 \to \infty$ pentru $\Psi \to 0$) și că această singularitate nu se datorește metodei micilor perturbații, cu deformare de coordonate, ci își are originea în însăși ecuația inițială a lui Mises (1). În lucrarea [6] se studiază aproximația de ordinul zero prin metode numerice cu aplicații la cilindrul circular.

Aproximația de ordinul întîi, proporțională cu ε, reprezentată prin funcția $u_1(x, \Psi)$, este dată de ecuația (10) în care u_0, u_{10}, u_{11} se consideră funcții cunoscute. Ecuația (10) conține, încă, funcția $x_1(x)$ și constantele C_0 și C_1, care se calculează relativ ușor dacă forma corpului, în jurul căruia se mișcă fluidul vîscos, este cunoscută. Aproximația de ordinul întîi Ψ_1 (și ψ_1) s-a determinat cu condiția ca în vecinătatea punctului critic al mișcării, aproximațiile de ordinele zero și unu ale vitezei să fie asemenea între ele, determinarea lor reducîndu-se la aceeași ecuație diferențială ordinară. Potrivit cu § 1.2 și ecuațiile (30), (20) și (19) găsim că

$$\frac{\mathrm{d}u_k^0}{\mathrm{d}\Psi} = -C_k \sqrt{\frac{u_\infty}{L(1-W_0^0)}} \frac{\mathrm{d}W_0^0}{\mathrm{d}\eta^0} > 0 \quad (k = 0\,;\, 1)$$

și, prin urmare,

$$\frac{\mathrm{d}W_0^0}{\mathrm{d}\eta^0} < 0, \frac{\mathrm{d}^2 W_k^0}{\mathrm{d}\eta^{02}} = \infty \quad \text{pentru } \Psi^0 = \eta^0 = 0,$$

ceea ce pune în evidență singularitatea ecuației funcției W_1^0 în punctul (X^0, $\Psi = 0$). Este puțin probabil ca ecuația (10) să depășească gradul de singularitate al ecuației (9) în domeniul care ne interesează.

Studiul soluției inițiale are un dublu scop : să indice modul în care se calculează soluția cu care pornește o eventuală metodă numerică și să indice un criteriu de determinare a perturbației coordonatei Ψ.

Metoda micilor perturbații, analizată aici, poate fi considerată ca o variantă a metodei lui Poincaré-Lighthill-Kuo [4] și poate fi folosită pentru studiul unei mișcări vîscoase care se abate puțin de la o mișcare vîscoasă neperturbată, neuniformă, dată prin funcțiile u_0 și u_{10}. O aplicare a teoriei aproximației de ordinul întîi o vom face într-o lucrare viitoare în care vom cerceta, prin metode numerice, mișcarea unui fluid vîscos incompresibil, cu formare de strat-limită, peste un cilindru deformat.

Primită la redacție la 16 februarie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Acad. Press, New York and London, 1964.
2. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor viscoase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967.
3. H. Schlichting, *Teoria pogran. sloia*, IIL, Moskva, 1956.
4. H. S. Tsien, *The Poincaré-Lighthill-Kuo Method*, Advances in Applied Mechanics, edit. H. L. Dryden and Th. Karman, vol. IV, Acad. Press, NewYork, 1956 (vezi şi Prob. Mehaniki, sbor. statei, IIL, Moskva, 1959).
5. G. Kuerti, *The Laminar Boundary Layer in Compressible Flow*, Advances in Appl. Mech., vol. II, 1951 (edited by R. von Mises and Th. Karman).
6. D. Brădeanu, *Rezolvarea numerică a problemei stratului-limită incompresibil în forma lui Mises prin metoda diferenţelor finite. Aplicaţie la cilindrul circular*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj, st. Math-Mech, *2* (1974).

STUDII

STABILITATEA MIŞCĂRILOR PERIODICE ALE SISTEMULUI VIBROPERCUTANT CU LIMITATOR ELASTIC, AVÎND UN GRAD DE LIBERTATE

de L. BRÎNDEU

Institutul politehnic Timişoara

Folosind metoda directă elaborată anterior [1], [2] se studiază stabilitatea mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu caracteristica biliniară între ciocniri.

În acest scop se scriu ecuaţiile în variaţii (9) pentru care se determină condiţiile iniţiale (12), de trecere (17)—(18) şi finale (13) din intervalul cuprins între două ciocniri succesive.

După integrarea ecuaţiei în variaţii, prin aplicarea acestor condiţii, rezultă ecuaţiile liniarizate în perturbaţii (21) şi apoi ecuaţia caracteristică din care se obţin condiţiile de stabilitate (28).

În studiul stabilităţii mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante am elaborat o metodă directă de scriere a condiţiilor de stabilitate [1], [2]. Această metodă este mai simplă şi nu necesită cunoaşterea, în prealabil, a legii mişcării. Prin folosirea metodei directe se pot scrie condiţiile de stabilitate şi în cazul sistemelor neliniare pentru care mişcările periodice nu se pot determina decît aproximativ.

Pentru sistemele liniare cu un grad de libertate şi o cuplă percutantă s-au studiat complet atît mişcările periodice [3], cît şi stabilitatea lor [1], [2].

Prin introducerea unui limitator elastic, caracteristica sistemului devine biliniară, iar studiul mişcărilor periodice şi al stabilităţii este mai dificil. În lipsa ciocnirilor pentru sistemul cu caracteristica biliniară au fost determinate condiţiile de stabilitate ale mişcărilor periodice [1], [4], [5]. Folosind metoda directă [2], în continuare se determină simplu condiţiie de stabilitate a mişcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu caracteristica biliniară.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, p. 257—266

1. DESCRIEREA SISTEMULUI VIBROPERCUTANT

Sistemul elastic este format din masa m, arcurile cu constanta elastică k_1 şi sistemul amortizor ce introduce frecarea vîscoasă avînd coeficientul c (fig. 1). Asupra masei acţionează forţa perturbatoare periodică $Q(t+T) = Q(t)$, T fiind perioada. Limitatorul elastic este format din arcurile cu constanta $k_2 - k_1$ şi se presupune că nu are masă.

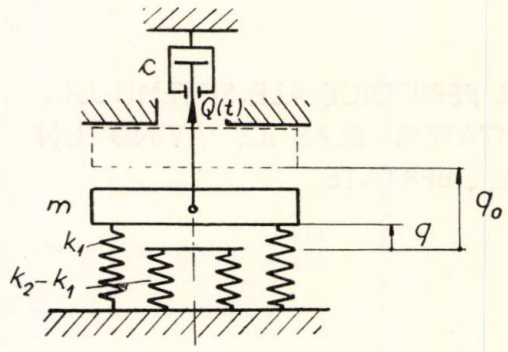


Fig. 1

Notînd prin q coordonata masei m măsurată din poziţia limitatorului elastic cu arcurile nedeformate ecuaţia diferenţială a mişcării sistemului va fi

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + F(q) = Q(t), \qquad (1)$$

unde caracteristica $F(q)$ are expresia

$$F(q) = \begin{cases} k_1 q & \text{pentru } q \geqslant 0, \\ k_2 q & \text{pentru } q \leqslant 0. \end{cases} \qquad (1')$$

În timpul mişcării, masa se ciocneşte de un reper fix. Deci sistemul mai conţine şi o cuplă percutantă [4], care se poate prezenta analitic cu ajutorul legăturii unilaterale

$$f(q) = q_0 - q \geqslant 0. \qquad (2)$$

Presupunînd că la momentul $t = t_k$ are loc o ciocnire, între vitezele de la începutul şi sfîrşitul ciocnirii, $\dot{q}(t_k - 0)$, respectiv $\dot{q}(t_k + 0)$, există relaţia

$$\dot{q}(t_k + 0) = -R\dot{q}(t_k - 0), \qquad (3)$$

R fiind coeficientul de restituire la ciocnire.

2. MIŞCĂRI PERIODICE ŞI PERTURBATE

Mişcările periodice ale sistemului se va presupune că au perioada $t_{k+1} - t_k = rT$

$$(r = 1, 2, \ldots).$$

Legea mişcării periodice $\bar{q} = \bar{q}(t)$, soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1), trebuie să fie continuă, iar pe intervalul (t_k, t_{k+1}) trebuie să fie şi derivabilă. De asemenea, ea va mai satisface condiţiile iniţiale

$$\bar{q}(t_k + 0) = q_0, \qquad \dot{\bar{q}}(t_k + 0) = -R\dot{q}_c \qquad (4)$$

şi finale

$$\bar{q}(t_{k+1} - 0) = q_0, \qquad \dot{\bar{q}}((t_{k+1} - 0) = \dot{q}_c. \tag{5}$$

Sistemul ajunge în contact cu limitatorul elastic la momentul $t = \tau'_k$ în a cărui vecinătate legea mişcării este continuă şi derivabilă, deci sînt satisfăcute condiţiile

$$\bar{q}(\tau'_k - 0) = \bar{q}(\tau'_k + 0) = 0 \tag{6}$$

şi

$$\dot{\bar{q}}(\tau'_k - 0) = \dot{\bar{q}}(\tau'_k + 0). \tag{6'}$$

Desprinderea sistemului de limitatorul elastic are loc la momentul $t = \tau''_k$, pentru care corespund condiţiile

$$\bar{q}(\tau''_k + 0) = \bar{q}(\tau''_k + 0) = 0 \tag{7}$$

şi

$$\dot{\bar{q}}(\tau''_k - 0) = \dot{\bar{q}}(\tau''_k + 0). \tag{7'}$$

Evident, pe fiecare din cele trei intervale ale perioadei, despărţite de momentele $t = \tau'_k$ şi $t = \tau''_k$, legea mişcării are expresii analitice diferite care satisfac condiţiile de margini (4), (5), (6), (6'), (7) şi (7'). Punînd aceste condiţii se pot determina parametrii mişcării periodice $\dot{q}_c$, t_0, τ'_0 şi τ''_0.

Pentru studiul stabilităţii mişcărilor periodice se vor considera mişcări perturbate. Aceste mişcări se obţin dînd perturbaţii iniţiale mici parametrilor mişcării periodice.

Legea mişcării perturbate va fi soluţia ecuaţiei diferenţiale (1) care diferă prin variaţia x de legea mişcării periodice $\bar{q} = \bar{q}(t)$, adică

$$q = \bar{q} + x. \tag{8}$$

Dacă se efectuează această transformare în ecuaţia diferenţială (1) se ajunge la ecuaţia în variaţii

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial q} x = 0. \tag{9}$$

Folosirea acestei ecuaţii este însă posibilă numai după ce în prealabil se determină legătura dintre variaţii şi perturbaţiile parametrilor mişcării.

Faţă de mişcarea periodică, parametrilor mişcării le vor corespunde perturbaţiile $\Delta\dot{q}_k$, Δt_k, $\Delta\tau'_k$ şi $\Delta\tau''_k$ ($k = 1, 2, \ldots$), care se datoresc perturbaţiilor iniţiale $\Delta\dot{q}_0$ şi Δt_0. Deci ciocnirea de ordinul k va avea loc la momentul $t = t_k + \Delta t_k$, iar vitezele înainte şi după ciocnire vor fi

$\dot{q}(t_k + \Delta t_k - 0) = \dot{q}_c + \Delta\dot{q}_k$, respectiv $\dot{q}(t_k + \Delta t_k + 0) = -R(\dot{q}_c + \Delta\dot{q}_k)$. De asemenea, contactul cu limitatorul elastic se realizează la momentul $t = \tau_k' + \Delta\tau_k'$, iar desprinderea la $t = \tau_k'' + \Delta\tau_k''$.

După cum se constată în intervalul dintre două ciocniri succesive $(t_k + \Delta t_k,\ t_{k+1} + \Delta t_{k+1})$, legea mişcării perturbate se exprimă analitic şi aici diferit pe cele trei intervale despărţite de momentele $t = \tau_k' + \Delta\tau_k'$ şi $t = \tau_k'' + \Delta\tau_k''$. Aceste expresii sînt funcţii analitice ce pot fi prelungite şi în afara domeniilor lor de definiţie. Presupunînd că sînt şi dezvoltabile în serie de puteri, acestea se pot liniariza în raport cu perturbaţiile.

Mişcarea perturbată, în intervalul dintre ciocnirile de ordin k şi $k+1$, are condiţiile iniţiale

$$q(t_k + \Delta t_k + 0) = q_0;\ \dot{q}(t_k + \Delta t_k + 0) = \dot{q}_c + \Delta\dot{q}_k, \tag{10}$$

şi finale

$$q(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - 0) = q_0;\ \dot{q}(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - 0) = -R(\dot{q}_c + \Delta\dot{q}_{k+1}). \tag{11}$$

Ţinînd seama că perturbaţiile şi variaţiile sînt mici, avînd acelaşi ordin de mărime, prin transformarea (8) condiţiile (10) după liniarizare devin

$$x(t_k + 0) = R\dot{q}_c\,\Delta t_k;\ \dot{x}(t_{k+1} + 0) = -R\Delta\dot{q}_k - \ddot{\bar{q}}(t_k + 0)\Delta t_k, \tag{12}$$

iar condiţiile (11)

$$x(t_{k+1} - 0) = -\dot{q}_c\Delta t_{k+1};\ \dot{x}(t_{k+1} - 0) = \Delta\dot{q}_{k+1} - \ddot{\bar{q}}(t_{k+1} - 0)\Delta t_{k+1}. \tag{13}$$

Aici, conform ecuaţiei diferenţiale a mişcării (1), se vor folosi următoarele relaţii:

$$\ddot{\bar{q}}(t_k + 0) = \frac{1}{m}[Q(t_k) - F(q_0) + cR\dot{q}_c],\ \ddot{\bar{q}}(t_{k+1} - 0) =$$

$$= \frac{1}{m}[Q(t_k) - F(q_0) - c\dot{q}_c]. \tag{14}$$

În momentele intermediare, la realizarea contactului cu limitatorul elastic şi apoi la desprindere, pe baza continuităţii mişcării se deduc condiţiile de trecere de la un interval la următorul. Astfel, la realizarea contactului se pot scrie condiţiile

$$q(\tau_k' + \Delta\tau_k' - 0) = q(\tau_k' + \Delta\tau_k' + 0),\ \dot{q}(\tau_k' + \Delta\tau_k' - 0) =$$

$$= \dot{q}(\tau_k' + \Delta\tau_k' + 0); \tag{15}$$

iar la desprindere

$$q(\tau_k'' + \Delta\tau_k'' - 0) = q(\tau_k'' + \Delta\tau_k'' + 0),\ \dot{q}(\tau_k'' + \Delta\tau_k'' - 0) =$$

$$= \dot{q}(\tau_k'' + \Delta\tau_k'' + 0). \tag{16}$$

Funcția $F(q)$ cu expresia analitică (1′) este continuă pentru $q = 0$. Cu ajutorul ecuației diferențiale (1) se pot ușor verifica egalitățile $\dot{q}(\tau_k' - 0) = \dot{q}(\tau_k' + 0)$ și $\dot{q}(\tau_k'' - 0) = \dot{q}(\tau_k'' + 0)$. Prin urmare, dacă și în condițiile (15), (16) se face transformarea (8), atunci după liniarizare se obține

$$x(\tau_k' - 0) = x(\tau_k' + 0) = x(\tau_k'), \quad \dot{x}(\tau_k' - 0) = \dot{x}(\tau_k' + 0) = \dot{x}(\tau_k') \tag{17}$$

și

$$x(\tau_k'' - 0) = x(\tau_k'' + 0) = x(\tau_k''), \quad \dot{x}(\tau_k'' - 0) = \dot{x}(\tau_k'' + 0) = \dot{x}(\tau_k''). \tag{18}$$

După cum se constată, funcția $x(t)$ în momentele $t = \tau_k'$ și $t = \tau_k''$ este continuă și derivabilă, ceea ce înseamnă că pentru studiul stabilității nu mai este necesar să se considere perturbațiile $\Delta\tau_k'$ și $\Delta\tau_k''$.

3. INTEGRAREA ECUAȚIILOR ÎN VARIAȚII

În mișcarea perturbată, funcția $x(t)$ este definită pe întregul interval de timp dintre două ciocniri succesive. S-a arătat însă anterior că intervalul de definiție poate fi luat astfel încît să coincidă cu perioada corespunzătoare din mișcarea periodică. De asemenea, expresia analitică a funcției $x(t)$ se modifică în aceleași momente ca în mișcarea periodică. Astfel, într-o perioadă (t_k, t_{k+1}) se obțin expresii analitice diferite pe cele trei intervale delimitate de momentele $t = \tau_k'$ și $t = \tau_k''$, iar pulsațiile proprii corespunzătoare vor fi succesiv $p_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$, $p_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$ și din nou p_1.

Pentru simplificare, integrarea ecuației în variații (9) s-a limitat la cazul $c < c_{cr}$, unde se consideră $c_{cr} = 2\sqrt{mk_2}$ deoarece $k_2 > k_1$.

Considerînd primul interval (t_k, τ_k'), după integrarea ecuației diferențiale (9), între condițiile inițiale (12) și de continuitate (17) rezultă relațiile

$$p_1 x(\tau_k') = e^{-\frac{c}{2m}(\tau_k' - t_k)} \left\{ \left[\dot{x}(t_k + 0) + \frac{c}{2m} x(t_k + 0) \right] \sin p_1(\tau_k' - t_k) + \right.$$

$$\left. + p_1 x(t_k + 0) \cos p_1(\tau_k' - t_k) \right\}, \tag{19}$$

$$\dot{x}(\tau_k') + \frac{c}{2m} x(\tau_k') = e^{-\frac{c}{2m}(\tau_k' - t_k)} \left\{ \left[\dot{x}(t_k + 0) + \frac{c}{2m} x(t_k + 0) \right] \cos p_1(\tau_k' - t_k) - \right.$$

$$\left. - p_1 x(t_k + 0) \sin p_1(\tau_k' - t_k) \right\}.$$

Pentru intervalul (τ_k', τ_k'') trebuie considerate condițiile de continuitate (17) drept condiții inițiale. Dacă se introduc condițiile (18) în soluția găsită prin integrarea ecuației diferențiale (9) se obține

$$p_2 x(\tau_k'') = e^{-\frac{c}{2m}(\tau_k''-\tau_k')}\left\{\left[\dot{x}(\tau_k') + \frac{c}{2m}x(\tau_k')\right]\sin p_2(\tau_k'' - \tau_k') + \right.$$

$$\left. + p_2 x(\tau_k')\cos p_2(\tau_k'' - \tau_k')\right\}, \tag{20}$$

$$\dot{x}(\tau_k'') + \frac{c}{2m}x(\tau_k'') = e^{-\frac{c}{2m}(\tau_k''-\tau_k')}\left\{\left[\dot{x}(\tau_k') + \frac{c}{2m}x(\tau_k')\right]\cos p_2(\tau_k'' - \tau_k') - \right.$$

$$\left. - p_2 x(\tau_k')\sin p_2(\tau_k'' - \tau_k')\right\}.$$

Procedînd în același mod și în ultimul interval (τ_k'', t_{k+1}), unde din ecuațiile de continuitate (18) se determină constantele de integrare, pentru condițiile finale (13) se poate scrie

$$p_1 x(t_{k+1} - 0) = e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-\tau_k'')}\left\{\left[\dot{x}(\tau_k'') + \frac{c}{2m}x(\tau_k'')\right]\sin p_1(t_{k+1} - \tau_k'') + \right.$$

$$\left. + p_1 x(\tau_k'')\cos p_1(t_{k+1} - \tau_k'')\right\}, \tag{21}$$

$$\dot{x}(t_{k+1} - 0) + \frac{c}{2m}x(t_{k+1} - 0) = e^{-\frac{c}{2m}(t_{k+1}-\tau_k'')}\left\{\left[\dot{x}(\tau_k'') + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{c}{2m}x(\tau_k'')\right]\cos p_1(t_{k+1} - \tau_k'') - p_1 x(\tau_k'')\sin p_1(t_{k+1} - \tau_k'')\right\}.$$

Sînt ușor de găsit acum relațiile de legătură între condițiile inițiale (12) și finale (13). Într-adevăr, se înlocuiesc expresiile (19) în relațiile (20), apoi expresiile obținute în relațiile (21) și rezultă următoarele relații:

$$p_1 x(t_{k+1} - 0) = B_1\left[\dot{x}(t_k + 0) + \frac{c}{2m}x(t_k + 0)\right] + B_2 p_1 x(t_k + 0),$$

$$\dot{x}(t_{k+1} - 0) + \frac{c}{2m}x(t_{k+1} - 0) = B_3\left[\dot{x}(t_k + 0) + \frac{c}{2m}x(t_k + 0)\right] -$$

$$- B_4 p_1 x(t_k + 0), \tag{22}$$

unde

$$B_1 = e^{-\frac{c}{2m}rT}\left\{\sin p_1(rT - \tau_k'' + \tau_k')\cos p_2(\tau_k'' - \tau_k') + \right.$$

$$+\left[\frac{p_1}{p_2}\cos p_1(\tau_k' - t_k)\cos p_1(t_{k+1} - \tau_k'') - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{p_2}{p_1}\sin p_1(\tau_k' - t_k)\sin p_1(t_{k+1} - \tau_k'')\right]\sin p_2(\tau_k'' - \tau_k')\right\},$$

$$B_2 = e^{-\frac{c}{2m}rT}\left\{\cos p_1(rT - \tau_k'' + \tau_k')\cos p_2(\tau_k'' - \tau_k') - \right.$$

$$-\left[\frac{p_1}{p_2}\sin p_1(\tau_k' - t_k)\cos p_1(t_{k+1} - \tau_k'') + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{p_2}{p_1}\cos p_1(\tau_k' - t_k)\sin p_1(t_{k+1} - \tau_k'')\right]\sin p_2(\tau_k'' - \tau_k')\right\},$$

$$B_3 = e^{-\frac{c}{2m}rT}\left\{\cos p_1(rT - \tau_k'' + \tau_k')\cos p_2(\tau_k'' - \tau_k') - \right.$$

$$-\left[\frac{p_1}{p_2}\cos p_1(\tau_k' - t_k)\sin p_1(t_{k+1} - \tau_k'') + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{p_2}{p_1}\sin p_1(\tau_k' - t_k)\cos p_1(t_{k+1} - \tau_k'')\right]\sin p_2(\tau_k'' - \tau_k')\right\},$$

$$B_4 = e^{-\frac{c}{2m}rT}\left\{\sin p_1(rT - \tau_k'' + \tau_k')\cos p_2(\tau_k'' - \tau_k') - \right.$$

$$-\left[\frac{p_1}{p_2}\sin p_1(\tau_k' - t_k)\sin p_1(t_{k+1} - \tau_k'') - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{p_2}{p_1}\cos p_1(\tau_k' - t_k)\cos p_1(t_{k+1} - \tau_k'')\right]\sin p_2(\tau_k'' - \tau_k')\right\}.$$

Relaţiile (22) în care se înlocuiesc efectiv expresiile găsite anterior pentru condiţiile iniţiale (12) şi finale (13) reprezintă chiar ecuaţiile de recurenţă liniarizate în perturbaţii, necesare pentru studiul stabilităţii.

DETERMINAREA CONDIŢIILOR DE STABILITATE

Ecuaţiile liniarizate în perturbaţii (22) reprezintă un sistem de ecuaţii cu diferenţe finite ale cărui soluţii se pot uşor determina. Pentru aceasta se încearcă soluţii de forma

$$\Delta\dot{q}_k = v\beta^k, \quad \Delta t_k = \theta\beta^k. \tag{24}$$

Introducînd soluţiile (24) în condiţiile iniţiale (12) şi finale (13), iar apoi în ecuaţiile (22), se obţine un sistem liniar şi omogen în raport cu v şi θ. Din condiţia ca sistemul omogen să admită şi soluţii nenule, rezultă ecuaţia caracteristică în β de forma

$$\beta^2 + \left[(B_2 + B_3)R - B_1 \frac{\ddot{q}(t_k + 0) + R\ddot{q}(t_{k+1} - 0)}{p_1 \dot{q}_c}\right]\beta +$$

$$+ (B_1B_4 + B_2B_3)R^2 = 0. \tag{25}$$

Dacă se ţine seama de notaţiile (23) se obţin expresiile

$$B_2 + B_3 = \left[2\cos p_1(rT - \tau_k'' + \tau_k') - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1}\right)\sin p_1(rT - \tau_k'' + \tau_k')\sin p_2(\tau_k'' - \tau_k')\right] e^{-\frac{c}{2m}rT},$$

$$B_1B_4 + B_2B_3 = e^{-\frac{c}{m}rT}. \tag{26}$$

De asemenea, din relaţiile (14), unde $F(q_0) = k_1q_0$ deoarece $q_0 > 0$, rezultă

$$\ddot{q}(t_k + 0) + R\ddot{q}(t_{k+1} - 0) = \frac{Q(t_k) - k_1q_0}{m}. \tag{26}$$

Prin urmare ecuaţia caracteristică (25) în β a sistemului se mai poate scrie

$$\beta^2 + \left\{(B_2 + B_3)R - B_1 \frac{(1 + R)[Q(t_k) - k_1q_c]}{mp_1\dot{q}_c}\right\}\beta + R^2e^{-\frac{c}{2m}rT} = 0. \tag{27}$$

Mişcarea este stabilă dacă rădăcinile acestei ecuaţii sînt în modul subunitare. Condiţiile de stabilitate se obţin aplicînd ecuaţiei (27) criteriul lui Schur [7]. Prima condiţie, $R < e^{\frac{c}{2m}rT}$, în sistemele cu amortizare ($c > 0$), este întotdeauna verificată. Astfel, mişcarea periodică va fi asimptotic stabilă pentru $0 < c < c_{cr}$ dacă sînt satisfăcute condiţiile

$$-(1 + R^2 e^{-\frac{c}{2m}rT}) < (B_2 + B_3)R - B_1 \frac{(1 + R)[Q(t_k) - k_1 q_0]}{m p_1 \dot{q}_c} <$$

$$< 1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT}. \tag{28}$$

Aici $\dot{q}_c$ şi $Q(t_k)$ se calculează folosind condiţiile de periodicitate a mişcării.

În particular, condiţiile de stabilitate a mişcărilor periodice pentru sistemul vibropercutant fără limitator elastic se obţin considerînd $k_1 = k_2 = k$, adică $p_1 = p_2 = p = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$. Astfel rezultă $B_1 = B_4 = e^{-\frac{c}{2m}rT} \sin(pr\,T)$, $B_2 = B_4 = e^{-\frac{c}{2m}rT} \cos(pr\,T)$ şi deci condiţia de stabilitate (28) devine

$$-(1 + R^2 e^{-\frac{c}{2m}rT}) < \left\{2R\cos(pr\,T) - \right.$$

$$\left. - \frac{(1 + R)[Q(t_k) - k_1 q_0]}{m p \dot{q}_c} \sin(pr\,T)\right\} e^{-\frac{c}{2m}rT} < 1 + R^2 e^{-\frac{c}{2m}rT}. \tag{29}$$

Această condiţie de stabilitate este cunoscută pentru sistemul vibropercutant liniar cu un grad de libertate şi o cuplă percutantă [1], [2]

Primită la redacţie la 17 iunie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. L. Brîndeu, *Contribuţii privind studiul mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante*, Teză de doctorat. Institutul politehnic Timişoara, 1970.
2. L. Brîndeu, *Über die Bestimmung der Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad*, Bul. Inst. polit. Iaşi, secţia IV-Mecanică termică, **XVII (XXI)**, *3—4* (1971).

3. Gh. Silaș, L. Brîndeu, *Regimurile periodice staționare ale mecanismelor vibropercutante cu amortizare viscoasă avînd un grad de libertate*, Bul. șt. și tehnic al Institutului politehnic Timișoara (serie nouă) **11** (**25**), *1* (1966).
4. Gh. Silaș, L. Brîndeu, V. Bacria, *Mișcările periodice ale unei mase libere pe un limitator cu excitație periodică*, Bul. șt. și tehnic al Institutului politehnic Timișoara, seria Mat.-Fiz.-Mec. teoretică și aplicată **15** (**29**), *1* (1970).
5. L. Brîndeu, *Stabilitatea mișcărilor periodice ale unui sistem cu caracteristica biliniară*, Bul. șt. și tehnic al Institutului politehnic Timișoara, seria Mat.-Fiz.-Mec. teoretică și aplicată, **16** (**30**), *1* (1971).
6. Gh. Silaș, L. Brîndeu, *Behandlung periodischer Bewegungen von Ruttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen*, VDI Berichte, *135* (1969).
7. A. E. Kobrinskii, *Mehanizmi s uprughimi sviaziami*, Izd. Nauka, Moskva, 1964.

INFLUENȚA DINAMICITĂȚII AUTOMOBILULUI ASUPRA PROCESULUI DE DEPĂȘIRE

de CH. VASILIU
Institutul politehnic București

În analiza proceselor de depășire dintre autovehiculele care circulă în același sens, se obișnuiește, mai ales, ca valoarea accelerației să fie considerată fie constantă, fie liniar variabilă, folosindu-se mărimile medii ale acesteia.
Deoarece accelerația dezvoltată de un automobil este, în primul rînd, dependentă de caracteristicile dinamice ale motorului cu care este echipat, rezultă că modelul matematic al procesului de depășire trebuie să țină seama de aceasta.
Analiza teoretică — prin această prismă — a procesului, conduce la obținerea unor relații care dau posibilitatea determinării unor valori pentru spațiul și timpul de depășire mult apropiate de cele reale.

1. PROCESUL DEPĂȘIRII DINTRE AUTOVEHICULE

Procesul de depășire dintre autovehiculele care circulă în același sens pe căile rutiere, cu două sau mai multe benzi de circulație, este destul de complex, fiind influențat — în afară de caracteristicile căii și ale traficului rutier — de posibilitățile dinamice ale vehiculului care depășește.

Analiza cinematică a diferitelor aspecte ale acestui proces, atît de des întîlnit în desfășurarea circulației rutiere, fundamentată de prof. Alfred Jante de la „Tehnische Hochschule" din Drezda [1], este prezentată sub diferite forme — mai mult sau mai puțin dezvoltate — în aproape toate lucrările de teoria circulației rutiere.

Pentru studierea cinematicii acestui proces se consideră că depășirile sînt efectuate, de către vehiculul care depășește, astfel :

— cu viteză constantă, procesul fiind guvernat de diferența de viteză ;

— cu accelerație și decelerație constante, procesul fiind sub influența combinată a mărimii acestora ;

— cu accelerație și decelerație constante și cu viteză limitată, procesul fiind mai complex dar mai apropiat de modul real de desfășurare a depășirilor dintre vehicule ;

— cu accelerație și decelerație liniar variabile și cu viteză limitată, modelul matematic fiind mult apropiat de realitatea procesului de depășire.

Cu toate acestea, nici ultima ipoteză, care reprezintă cel mai complex caz al procesului de depășire dintre autovehicule, nu exprimă — în totalitate — realitatea fenomenului.

Mișcarea decelerată a vehiculului care depășește, după ce acesta a ajuns la nivelul vehiculului depășit, poate fi controlată — prin forța de apăsare pe pedala de frînă — astfel ca decelerația la începutul mișcării să fie mare, apoi să scadă proporțional cu viteza vehiculului și să ajungă la valoarea minimă atunci cînd vehiculul a căpătat viteza de mers a coloanei.

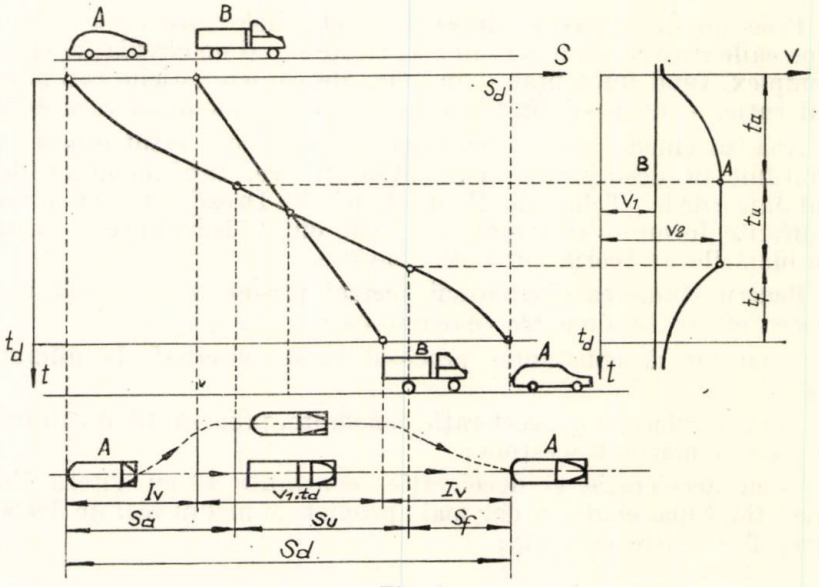
Mișcarea accelerată, însă, nu poate fi controlată, în totalitate, de conducător deoarece accelerația pe care o poate dezvolta un automobil depinde în primul rînd de dinamicitatea motorului cu care este echipat, de rezistența specifică a căii rutiere și de rezistența aerului.

Ținînd seama de aceste realități, modelul matematic al procesului de depășire trebuie să redea cît mai fidel mărimea elementelor cinematice caracteristice acestui proces.

2. ELEMENTELE CINEMATICE ALE PROCESULUI DE DEPĂȘIRE

Inițial, înainte de depășire, autovehiculul A care depășește are viteza vehiculului B din față (fig. 1):

$$v_A = v_B = v_1. \tag{1}$$



Fig, 1

În timpul depășirii, vehiculul B se va deplasa cu viteză constantă, parcurgînd spațiul

$$S_B = v_1 \cdot t_d, \tag{2}$$

în care t_d este timpul de depășire.

Vehiculul A — în același timp — va parcurge spațiul de depășire, care este format din :

— spațiul mișcării accelerate :

$$S_a = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{a}, \tag{3}$$

— spațiul mișcării uniforme :

$$S_u = v_2 \cdot t_u, \tag{4}$$

— spațiul mișcării decelerate :

$$S_f = \int_{v_2}^{v_1} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{-d}, \tag{5}$$

și este dat de relația

$$S_A = S_d = S_a + S_u + S_f = \int_{v_1}^{v_2} \frac{d \cdot \mathrm{d}v}{a} + v_2 \cdot t_u + \int_{v_2}^{v_1} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{-d}, \tag{6}$$

timpul de depășire fiind egal cu

$$t_d = t_a + t_u + t_f, \tag{7}$$

în care t_a este timpul mișcării accelerate ;
t_u — timpul mișcării uniforme ;
t_f — timpul mișcării decelerate (frînate) ;
a — accelerația vehiculului care depășește ;
d — decelerația provocată vehiculului prin frînare ;
v_2 — viteza limitată de regulile de circulație.

3. ELEMENTELE MIȘCĂRII ACCELERATE

3.1. *Determinarea accelerației.* Ecuația diferențială a mișcării autovehiculelor este dată [2] sub forma :

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{\delta \cdot G_a} \cdot (F_t - \Sigma R), \tag{8}$$

în care F_t este forța de tracțiune;
ΣR — suma rezistențelor la înaintare;
δ — coeficientul de calcul al influenței inerției maselor în mișcare de rotație;
G_a — greutatea autovehiculului;
a — accelerația.

Forța de tracțiune este corelată cu mărimea momentului motor prin relația

$$F_t = M \frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t, \tag{9}$$

în care M este momentul motor;
i_t — raportul de transmitere total;
r_r — raza de rulare a roților motoare;
η_t — randamentul global al transmisiei.

Curba momentului motor poate fi asimilată cu o parabolă (fig. 2), de forma

$$M = M_M - p \cdot (n - n_c)^2, \tag{10}$$

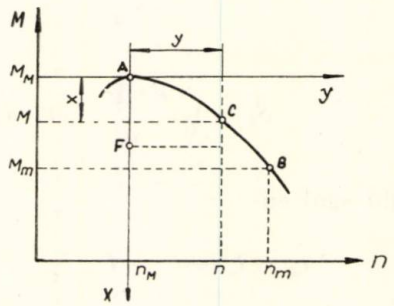


Fig. 2

în care M_M este valoarea momentului motor maxim;
n — turația la momentul M;
n_c — turația critică (la momentul M_M);
p — parametrul parabolei.

Parametrul parabolei [2] este dat de relația

$$p = \frac{M_M - M_m}{(n_m - n_c)^2}. \tag{11}$$

Relația momentului motor (10), va deveni, deci:

$$M = M_M - \frac{M_M - M_m}{(n_m - n_c)^2} \cdot (n - n_c)^2, \tag{12}$$

în care M_m este momentul la putere maximă;

n_m — turația la putere maximă.

Cunoscînd că între turația motorului și viteza de mers a autovehiculului există relația

$$v = r_r \cdot \omega_r = r_r \cdot \frac{\pi \cdot n_r}{30} = \frac{\pi}{30} \cdot r_r \cdot \frac{n}{i_t}, \tag{13}$$

rezultă că relația (12) se poate scrie sub forma

$$M = M_M - \frac{M_M - M_m}{(v_m - v_c)^2} \cdot (v - v_c)^2, \tag{14}$$

în care v_m este viteza corespunzătoare lui n_m;

v_c — viteza critică.

Ținînd seama de relația (14), forța de tracțiune (relația 9) va căpăta expresia

$$F_t = \frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t \cdot \left[M_M - \frac{M_M - M_m}{(v_m - v_c)^2} \cdot (v - v_c)^2 \right]. \tag{15}$$

Rezistențele la înaintare sînt exprimate prin relația:

$$\Sigma R = G_a(f \cdot \cos \alpha \pm \sin \alpha) + kAv^2 = \psi \cdot G_a + kAv^2, \tag{16}$$

în care ψ este rezistența specifică a căii rutiere;

G_a — greutatea autovehiculului;

k — coeficientul aerodinamic;

A — aria frontală a autovehiculului;

α — unghiul de pantă al căii rutiere.

În concluzie, accelerația va fi determinată de relația

$$a = \frac{g}{\delta \cdot G_a} \cdot \left\{ \frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t \cdot \left[M_M - \frac{M_M - M_m}{(v_m - v_c)^2} \cdot (v - v_c)^2 \right] - \psi \cdot G_a - kAv^2 \right\} \tag{17}$$

sau, ordonînd după puterile lui v,

$$a = \frac{g}{\delta \cdot G_a} \cdot \left\{ \left[\frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t \cdot \left(M_M - \frac{M_m - M_m}{(v_m - v_c)^2} \cdot v_c^2 \right) - \psi \cdot G_a \right] + 2 \frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t \times \right.$$

$$\left. \times \frac{M_M - M_m}{(v_m - v_c)^2} \cdot v_c \cdot v - \left[\frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t \cdot \frac{M_M - M_m}{(v_m - v_c)^2} + kA \right] \cdot v^2 \right\}. \tag{18}$$

Dacă se notează

$$\alpha = \frac{g}{\delta \cdot G_a} \cdot \frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t \cdot \left(M_M - \frac{M_M - M_m}{(v_m - v_c)^2} \cdot v_c^2 \right) - \frac{g}{\delta} \cdot \psi,$$

$$\beta = 2 \frac{g}{\delta \cdot G_a} \cdot \frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t \cdot \frac{M_M - M_m}{(v_m - v_c)^2} \cdot v_c,$$

$$\gamma = - \frac{g}{\delta \cdot G_a} \cdot \left(\frac{i_t}{r_r} \cdot \eta_t \cdot \frac{M_M - M_m}{(v_m - v_c)^2} + kA \right),$$

expresia (18) se prezintă, simplificat, astfel :

$$a = \alpha + \beta \cdot v + \gamma \cdot v^2 \tag{19}$$

sau

$$a = \gamma \cdot \left(v^2 + \frac{\beta}{\gamma} v + \frac{\alpha}{\gamma} \right). \tag{20}$$

Dacă se notează

$$\frac{\beta}{\gamma} = p \text{ și } \frac{\alpha}{\gamma} = q,$$

atunci relația (20) devine

$$a = \gamma \cdot (v^2 + p\, v + q), \tag{21}$$

care reprezintă relația simplificată a accelerației.

3.2. *Determinarea spațiului.* Cunoscînd expresia accelerației, vom avea

$$S_a = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{a} = \frac{1}{\gamma} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{v^2 + pv + q} = \frac{1}{\gamma} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{v^2 + pv + q}. \tag{22}$$

Dar

$$\frac{v}{v^2 + pv + q} \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{2v + p}{v^2 + pv + q} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{v^2 + pv + q}.$$

Deci

$$S_a = \frac{1}{2\gamma} \int_{v_1}^{v_2} \frac{2v + p}{v^2 + p \cdot v + q} \cdot \mathrm{d}v - \frac{p}{2\gamma} \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{v^2 + pv + q}. \tag{23}$$

Fie

$$I_1 = \int_{v_1}^{v_2} \frac{2v + p}{v^2 + pv + q} \cdot \mathrm{d}v = \ln \frac{v_2^2 + pv_2 + q}{v_1^2 + pv_1 + q} \tag{24}$$

și

$$I_2 = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{v^2 + p\,v + q} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{\left[\left(v + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]}.$$

Dacă schimbăm variabila cu

$$u = v + \frac{p}{2} \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}v \text{ și } v = u - \frac{p}{2},$$

și ținînd seama că

$$p^2 - 4q > 0 \Rightarrow q^2 - \frac{p^2}{4} = -c^2,$$

rezultă că

$$I_2 = \int_{u_1 - \frac{p}{2}}^{u_2 - \frac{p}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - c^2} = \frac{1}{2c} \ln \frac{u - c}{u + c} \Bigg|_{u_1 - \frac{p}{2}(v_1)}^{u_2 - \frac{p}{2}(v_2)}$$

sau

$$I_2 = \frac{1}{2c} \ln \frac{(v_2 - c)\,(v_1 + c)}{(v_2 + c)\,(v_1 - c)}.$$

Dar

$$c^2 = -q^2 + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2 - 4q}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

deci

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \cdot \ln \frac{(2v_2 - \sqrt{p^2 - 4q}) \cdot (2v_1 + \sqrt{p^2 - 4q})}{(2v_2 + \sqrt{p^2 - 4q}) \cdot (2v_1 - \sqrt{p^2 - 4q})}. \tag{25}$$

Spațiul mișcării accelerate va fi dat deci de relația

$$S_a = \frac{1}{2\gamma} \cdot \left[\ln \frac{v_2^2 + p\,v_2 - q}{v_1^2 + p\,v_1 + q} - \frac{p}{\sqrt{p^2 - 4q}} \cdot \ln \frac{(2v_2 - \sqrt{p^2 - 4q})}{(2v_2 + \sqrt{p^2 - 4q})} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(2v_1 + \sqrt{p^2 - 4q})}{(2v_1 - \sqrt{p^2 - 4q})}\right]. \tag{26}$$

3.3. *Determinarea timpului de deplasare accelerată.* Ținînd seama de relația (8), rezultă că, pentru a atinge viteza v_2, automobilul are nevoie de timpul

$$t_a = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{a} = \frac{1}{\gamma} \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}v}{v^2 + p \cdot v + q}, \tag{27}$$

care, potrivit relației (26), va deveni

$$t_a = \frac{1}{\gamma \cdot \sqrt{p^2 - 4q}} \cdot \ln \frac{(2v_2 - \sqrt{p^2 - 4q})\,(2v_1 + \sqrt{p^2 - 4q})}{(2v_2 + \sqrt{p_2 - 4q})\,(2v_1 - \sqrt{p^2 - 4q})}. \tag{28}$$

4. ELEMENTELE MIȘCĂRII FRÎNATE

4.1. *Expresia decelerației.* Cea mai indicată frînare în cazul depășirilor, este aceea care la început produce o decelerație maximă, respectiv d_2, corespunzătoare vitezei v_2 a automobilului și care descrește proporțional cu variația vitezei, astfel ca la viteza v_1 să aibă valoarea d_1, variația fiind liniară [1]:

$$d = k_1 + k_2 v. \tag{29}$$

4.2. *Determinarea spațiului.* Plecînd de la expresia clasică a spațiului în mișcarea variată, avem:

$$S_f = \int_{v_2}^{v_1} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{-d} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{d} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v \cdot \mathrm{d}v}{k_1 + k_2 v}. \tag{30}$$

Se face schimbarea de variabilă,

$$k_1 + k_2 v = u \Rightarrow \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}u}{k_2} \text{ și } v = \frac{u - k_1}{k_2}.$$

Deci

$$S_f = \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u - k_1) \cdot \mathrm{d}u}{k_2^2 \cdot u} = \frac{1}{k_2^2} \int_{u_1}^{u_2} \mathrm{d}u - \frac{k_1}{k_2^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{u},$$

de unde

$$S_f = \frac{1}{k_2^2} \left(u_2 - u_1 - k_1 \cdot \ln \frac{u_2}{u_1} \right) \tag{31}$$

sau, revenind la vechea variabilă,

$$S_f = \frac{1}{k_2^2} \cdot \left[(k_1 + k_2 v_2) - (k_1 + k_2 v_1) - k_1 \cdot \ln \frac{k_1 + k_2 v_2}{k_1 + k_2 v_1} \right] \tag{32}$$

sau

$$S_f = \frac{1}{k_2} \cdot (v_2 - v_1) + \frac{k_1}{k_2^2} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}. \tag{33}$$

Relația (33) se mai poate scrie și astfel:

$$S_f = \frac{1}{k_2^2} \cdot \left(d_2 - d_1 - k_1 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} \right). \tag{34}$$

4.3. *Determinarea timpului de deplasare frînată.* Ca și în relația (27), vom avea

$$t_f = \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{-d} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{d} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{k_1 + k_2 v} = \frac{1}{k_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{d(k_1 + k_2 v)}{k_1 + k_2 v},$$

de unde

$$t_f = \frac{1}{k_2} \cdot \ln \frac{k_1 + k_2 v_2}{k_1 + k_2 \cdot v_1} = \frac{1}{k_2} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}. \tag{35}$$

5. ELEMENTELE MIȘCĂRII UNIFORME

5.1. *Determinarea spațiului.* Automobilul va parcurge un spațiu egal cu

$$S_u = v_2 \cdot t_u, \tag{36}$$

mergînd cu viteza limitată (de restricțiile de circulație sau de posibilitățile automobilului), de mărime v_2.

5.2. *Determinarea timpului de mișcare cu viteză constantă.* Urmărind notațiile de pe figura 1, se constată că între mărimea intervalului dintre cele două autovehicule și drumurile parcurse de acestea există relația

$$2.\ I_v = S_A - S_B, \tag{37}$$

în care I_v este mărimea intervalului dintre cele două automobile, la viteza de deplasare v_1;

S_A; S_B — spațiile parcurse de autovehiculul A, respectiv vehiculul B.

Urmărind să determinăm mărimea timpului t_u, vom scrie relația sub forma:

$$2\,I_v = S_a + S_u + S_f - v_1 \cdot t_d$$

sau $$2\,I_v = (S_a + S_f) + v_2 \cdot t_u - v_1(t_a + t_u + t_f)$$

sau $$2\,I_v = (S_a + S_f) - v_1(t_a + t_f) + t_u(v_2 - v_1), \tag{38}$$

de unde rezultă

$$t_u = \frac{1}{v_2 - v_1} \cdot [2\,I_v - (S_a + S_f) + v_1(t_a + t_f)]. \tag{39}$$

6. CONCLUZII

Elementele cinematice ale întregului proces de depășire putînd fi determinate potrivit relațiilor analitice stabilite, rezultă că cei doi parametri care caracterizează acest proces și influențează traficul rutier se pot determina cu relațiile :

— pentru spațiul de depășire :

$$S_d = S_a + S_u + S_f, \tag{40}$$

— pentru timpul de depășire :

$$t_d = t_a + t_u + t_f. \tag{41}$$

Relațiile stabilite, ținînd seama de realitatea fenomenelor ce intervin în procesul de depășire, dau posibilitatea obținerii unor valori foarte apropiate de cele reale, verificabile experimental.

Primită la redacție la 21 august 1973

BIBLIOGRAFIE

1. A. Jante, *Kraftfahrtmeckanik*, B. G. Teubner VG, Leipzig, 1955.
2. C. Ghiulai, Ch. Vasiliu, *Dinamica autovehiculelor rutiere*, Edit. I.P., Buc., 1973.
3. Bussien, *Automobiltechnische Handbuch*.

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE ALE FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE CU DOUĂ LINII PARALELE DE CILINDRI ȘI DOI ARBORI COTIȚI CARE SE ROTESC ÎN SENSURI CONTRARE

de G. BĂRĂNESCU și GH. ZĂTREANU
Institutul politehnic București

Se cercetează pentru motoarele cu două linii paralele de cilindri și doi arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare posibilitățile de echilibrare a momentului extern al oricărui termen al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație. Se precizează momentele externe care se echilibrează simultan, condiția care asigură cel mai bun echilibraj al momentelor rezultante și echilibrajul posibil prin repartiția uniformă a aprinderilor pe întregul motor.

1. INTRODUCERE

La motorul cu ardere internă cu două linii de cilindri, echilibrajul momentelor forțelor de inerție prezintă anumite caracteristici determinate pe de o parte de faptul că fiecare linie este echipată cu un arbore cotit, iar, pe de altă parte, de particularitățile funcționale privind sensurile de rotație ale arborilor cotiți și succesiunea proceselor de lucru în cilindrii celor două linii. Unele dintre aceste caracteristici au constituit obiectul unor preocupări anterioare ale autorilor. Astfel, echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție în alternativa cînd arborii cotiți au același sens de rotație a fost examinat în lucrarea [1]. Pentru aceeași alternativă, aplicată la unele tipuri particulare de motoare cu două linii de cilindri, lucrările [2], [3] prezintă soluții avantajoase atît din punctul de vedere al echilibrajului forțelor de inerție, cît și sub aspectul echilibrajului momentelor externe ale acestor forțe.

În lucrarea de față se cercetează echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție la motoarele amintite, în cazul cînd cei doi arbori cotiți se rotesc în sensuri contrare. Expunerea privește echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, deoarece momentele externe ale forțelor de inerție ale maselor cu

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 277–295

mişcare de rotaţie urmează regimul de echilibrare al momentului extern al termenilor de ordinul întîi ai forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie.

Studiul se referă la echilibrajul acelor momente externe ale forţelor de inerţie care subzistă în fiecare linie de cilindri. În scopul simplificării exprimării, momentul extern pentru ansamblul motorului, corespunzător momentelor externe produse în fiecare linie de termenii de ordinul p ai forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie, este numit în continuare moment rezultant de ordinul p.

Se presupune că cei doi arbori cotiţi sînt identici şi au distanţe egale între manivelele consecutive, axele lor de rotaţie fiind paralele. Viteza unghiulară ω a arborilor cotiţi este considerată variabilă. Se admite că aprinderile alternează de la o linie la cealaltă, în fiecare linie aprinderile fiind uniform repartizate.

În primul rînd se stabileşte expresia momentului rezultant de un ordin oarecare în cazul general al motoarelor la care planele determinate de axele cilindrilor din fiecare linie (numite în continuare planele liniilor de cilindri) fac între ele un unghi oarecare γ. Constatînd că momentul rezultant de un ordin oarecare poate fi echilibrat numai cînd liniile de cilindri sînt paralele sau opuse, lucrarea se referă în continuare la motoarele cu două linii paralele de cilindri. Se cercetează condiţiile de echilibrare a momentului rezultant de un ordin oarecare, posibilităţile de echilibrare simultană a momentelor rezultante de ordine diferite, condiţia care asigură cel mai bun echilibraj al momentelor rezultante şi posibilităţile de echilibrare a momentelor rezultante oferite de repartiţia uniformă a aprinderilor pe ansamblul motorului.

2. NOTAŢII ŞI PRECIZĂRI

Se folosesc notaţiile: 1, 2, 3, ... $\frac{i}{2}$ — numerele de ordine ale cilindrilor consecutivi din fiecare linie, şi ale manivelelor aferente, începînd de la aceeaşi extremitate a motorului; I, II, III, ... K ... $\frac{i}{2}$ — numerele de ordine ale aprinderilor consecutive din fiecare linie, numerele I desemnînd aprinderile din cilindrii 1; s şi d — indici atribuiţi numerelor precedente, şi altor notaţii utilizate în continuare, pentru precizarea liniei din stînga şi respectiv din dreapta, faţă de un observator care priveşte motorul dinspre extremitatea unde se află cilindrii 1.

Se consideră vectorii T_{p_v} şi T_{p_τ}, definiţi în [4], care interpretează termenul de ordinul p al forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie corespunzătoare unui cilindru. Pentru fiecare linie de cilindri, momentul vectorilor T_{p_v} şi momentul vectorilor T_{p_τ} sînt reprezentaţi de vectorii M_{p_v} şi, respectiv, M_{p_τ}, care, ca şi vectorii T_{p_v} şi T_{p_τ}, sînt permanent perpendiculari între ei şi se rotesc în sensul de rotaţie al arborelui cotit aferent liniei considerate cu viteza unghiulară $p\omega$; datorită identităţii

tuturor mecanismelor bielă-manivelă, momentele de același fel din cele două linii sînt egale în același moment de timp

$$M_{p_{\nu_s}} = M_{p_{\nu_d}} = M_{p_\nu}\,; \qquad M_{p_{\tau_s}} = M_{p_{\tau_d}} = M_{p_\tau}.$$

Deoarece vectorii-moment M_{p_ν} și M_{p_τ} ai unei linii sînt legați indeformabil unul de altul și variază în mărime numai datorită variației vitezei unghiulare ω, echilibrarea unuia dintre ei este însoțită de echilibrarea celuilalt. Măsurile care conduc la echilibrarea lui M_{p_ν} (și, implicit, la echilibrarea lui M_{p_τ}) asigură, evident, echilibrarea momentelor externe $\mathfrak{M}_{p_\nu}$ și $\mathfrak{M}_{p_\tau}$ produse în linia considerată de termenii de ordinul p întrucît momentul $\mathfrak{M}_{p_\nu}$ este egal cu proiecția vectorului M_{p_ν} pe un plan normal la planul Q, care este paralel cu planul liniei de cilindri considerate și conține axa de rotație a arborelui cotit aferent acestei linii [1]), iar momentul $\mathfrak{M}_{p_\tau}$ este egal cu proiecția vectorului M_{p_τ} pe planul Q. În consecință, pentru fiecare linie este suficient să se ia în considerare fie vectorul M_{p_ν}, fie vectorul M_{p_τ} ; astfel, echilibrajul momentului rezultant de ordinul p se studiază ținînd seamă numai de momentele externe $\mathfrak{M}_{p_\nu}$ sau numai de momentele externe $\mathfrak{M}_{p_\tau}$ din fiecare linie.

În cele ce urmează este luat în considerare vectorul M_{p_ν} din fiecare linie, care, pentru simplificarea scrierii, este notat cu M_p. Pentru momentul extern reținut astfel în fiecare linie se face înlocuirea $\mathfrak{M}_{p_\nu} = \mathfrak{M}_p$.

Ca sens pozitiv al momentului M_p se alege sensul unui burghiu manevrat de o persoană care are în dreapta cilindrul numărul 1. Sensul de rotație al arborelui cotit din stînga este considerat sens pozitiv pentru măsurarea unghiurilor.

Conform precizărilor precedente, cuplajul aprinderilor dintre linii este de tipul $I_s \to K_d$ (aprinderea I_s este urmată de aprinderea K_d). Dacă ζ este decalajul unghiular între aprinderile I_s și K_d, cuplajul $I_s \to K_d$ comportă decalajul $\psi - \zeta$ între arborii cotiți, unde

$$\psi = (K_d - 1)\frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}} \tag{1}$$

este unghiul cu care arborele cotit din dreapta ar fi rotit în sens negativ pentru declanșarea simultană a aprinderilor I_s și K_d, τ fiind numărul de timpi [1]. Avînd în vedere particularitățile dinamice ale vectorilor M_p din cele două linii, rezultă că decalajului $\psi - \zeta$ dintre arborii cotiți îi corespunde decalajul $p(\psi - \zeta)$ între vectorii M_{p_s} și M_{p_d}.

---

[1]) Cînd mecanismele bielă-manivelă sînt axate, planul Q este chiar planul liniei de cilindri.

3. DETERMINAREA MOMENTULUI REZULTANT DE UN ORDIN OARECARE

Se alege ca origine momentul de timp în care manivela 1_s se află în poziția corespunzătoare punctului mort interior. Se notează cu $\theta^{(0)}_{p_{I_s}}$ și $\theta^{(0)}_{p_{K_d}}$ unghiurile pe care vectorii M_{p_s} și M_{p_d} le fac în acest moment, respectiv cu semiaxele $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_s}$ și $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_d}$. Între cele două unghiuri există relația

$$\theta^{(0)}_{p_{K_d}} = \theta^{(0)}_{p_{I_s}} - p(\psi - \zeta).$$

După ce arborii cotiți parcurg unghiul α, unghiurile care precizează pozițiile vectorilor M_{p_s} și M_{p_d} față de semiaxele $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_s}$ și, respectiv, $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_d}$ sînt (fig. 1):

$$\theta_{p_{I_s}} = \theta^{(0)}_{p_{I_s}} + p\alpha$$

și

$$\theta_{p_{K_d}} = \theta^{(0)}_{p_{I_s}} - p(\alpha + \psi - \zeta).$$

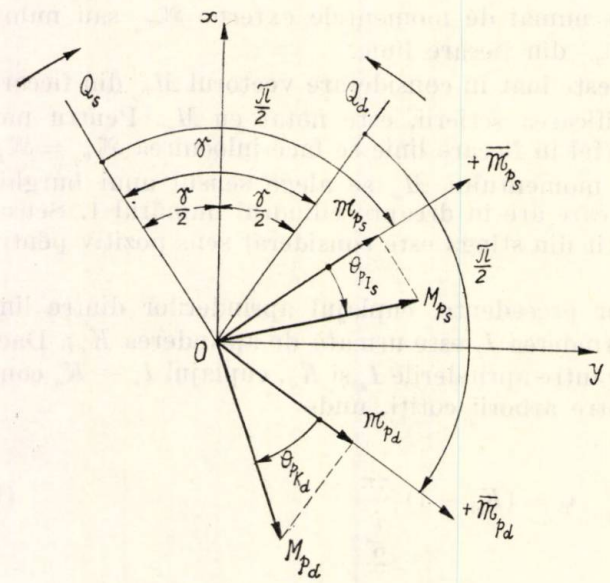


Fig. 1. — Determinarea momentului rezultant de un ordin oarecare.

Pentru simplificarea scrierii, se face în continuare înlocuirea $\theta^{(0)}_{p_{I_s}} = \theta$, acest unghi fiind numit unghi la origine.

Momentele externe reținute în cele două linii, conform metodei de cercetare adoptate, au expresiile

$$\mathfrak{M}_{p_s} = M_p \cos(\theta + p\alpha),$$

$$\mathfrak{M}_{p_d} = M_p \cos[\theta - p(\alpha + \psi - \zeta)].$$

Folosind sistemul de coordonate constituit de bisectoarele unghiului dintre planele Q_s și Q_d, se obțin proiecțiile

$$X_{\mathfrak{M}_p} = M_p\{\cos(\theta + p\alpha) - \cos[\theta - p(\alpha + \psi - \zeta)]\} \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$Y_{\mathfrak{M}_p} = M_p\{\cos(\theta + p\alpha) + \cos[\theta - p(\alpha + \psi - \zeta)]\} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

După transformări, ultimele relații devin

$$X_{\mathfrak{M}_p} = 2M_p \sin\left(\theta - p\frac{\psi - \zeta}{2}\right) \sin\frac{\gamma}{2} \sin p\left(\frac{\zeta - \psi}{2} - \alpha\right),$$

$$Y_{\mathfrak{M}_p} = 2M_p \cos\left(\theta - p\frac{\psi - \zeta}{2}\right) \cos\frac{\gamma}{2} \cos p\left(\frac{\zeta - \psi}{2} - \alpha\right).$$

Cu notațiile

$$A_{\mathfrak{M}_p} = 2M_p \sin\left(\theta - p\frac{\psi - \zeta}{2}\right) \sin\frac{\gamma}{2},$$

$$B_{\mathfrak{M}_p} = 2M_p \cos\left(\theta - p\frac{\psi - \zeta}{2}\right) \cos\frac{\gamma}{2}, \tag{2}$$

se obține

$$X_{\mathfrak{M}_p} = A_{\mathfrak{M}_p} \sin p\left(\frac{\zeta - \psi}{2} - \alpha\right),$$

$$Y_{\mathfrak{M}_p} = B_{\mathfrak{M}_p} \cos p\left(\frac{\zeta - \psi}{2} - \alpha\right)$$

sau

$$\frac{X^2_{\mathfrak{M}_p}}{A^2_{\mathfrak{M}_p}} + \frac{Y^2_{\mathfrak{M}_p}}{B^2_{\mathfrak{M}_p}} = 1. \tag{3}$$

Conform expresiei (3), momentul rezultant de ordinul p este reprezentat de un vector rotitor aplicat într-un punct situat pe linia de intersecție a planelor Q_s și Q_d.

4. POSIBILITĂȚI DE ECHILIBRARE A MOMENTELOR REZULTANTE

Echilibrarea momentului rezultant de ordinul p reclamă alegerea unghiurilor γ, ψ și ζ corespunzător îndeplinirii simultane a condițiilor $A_{\mathfrak{M}_p} = 0$ și $B_{\mathfrak{M}_p} = 0$. Avînd în vedere formulele (2) aceste condiții se exprimă prin ecuațiile

$$\sin \frac{\gamma}{2} = 0,$$

$$\cos\left(\theta - p\,\frac{\psi - \zeta}{2}\right) = 0 \tag{4}$$

sau prin ecuațiile

$$\cos \frac{\gamma}{2} = 0,$$

$$\sin\left(\theta - p\,\frac{\psi - \zeta}{2}\right) = 0. \tag{5}$$

Relațiile (4) și (5) arată că echilibrarea momentului rezultant de ordinul p este posibilă numai cînd liniile de cilindri sînt paralele ($\gamma = 0$) sau opuse ($\gamma = \pi$). Așa cum s-a arătat, mai jos se analizează prima din aceste variante de dispunere relativă a liniilor de cilindri.

5. ECHILIBRAREA MOMENTELOR REZULTANTE LA MOTOARELE CU DOUĂ LINII PARALELE DE CILINDRI

5.1. CONDIȚII DE ECHILIBRARE A MOMENTULUI REZULTANT DE UN ORDIN OARECARE

Se cercetează posibilitățile de echilibrare a momentului rezultant un ordin oarecare; fie p_0 acest ordin. Conform relațiilor (4), în care $\gamma = 0$, aceste posibilități implică satisfacerea condiției

$$\theta_0 - p_0\,\frac{\psi - \zeta}{2} = \pm\,(2\lambda_0 - 1)\,\frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

unde θ_0 este unghiul la origine corespunzător ordinului p_0, iar factorul λ_0 poate lua numai anumite valori întregi stabilite în continuare.

La orice motor, unghiul θ_0 reprezintă o constantă determinată de numărul de cilindri și de dispunerea manivelelor arborilor cotiți; această constantă este supusă condiției

$$0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi. \tag{7}$$

Pentru un anumit motor (θ_0 precizat), valorile posibile ale factorului λ_0 depind de succesiunea aprinderilor între linii, adică de mărimea unghiurilor ζ și ψ.

Pentru unghiul ζ este posibil domeniul de variație

$$0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}, \tag{8}$$

ale cărui limite corespund cazurilor particulare de declanșare simultană a aprinderilor în cele două linii.

În privința unghiului ψ se pot prezenta două alternative: $K_d > 1$ și $K_d = 1$.

1) Pentru $K_d > 1$, din formula (1) se deduce $\psi \geqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$ și deci, ținînd seama de (8), rezultă $\psi - \zeta \geqslant 0$. În această alternativă trebuie considerate numai valorile

$$\psi - \zeta > 0 \tag{9}$$

deoarece valoarea $\psi - \zeta = 0$, obținută pentru $K_d = 2$ si $\zeta = \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$, corespunde de fapt cuplajului $I_s I_d$ al aprinderilor (aprinderea I_s este însoțită de aprinderea I_d)[2].

Avînd în vedere condiția (9), relația (6) poate fi scrisă sub forma

$$\zeta = \psi - \frac{1}{p_0}\left[2\theta_0 + (2\lambda_0 - 1)\pi\right]; \tag{10}$$

înlocuind în (10) expresia (1) a unghiului ψ și comparînd rezultatul cu condiția (8), se obține

$$(K_d - 2)\frac{\tau p_0}{i} - \frac{\theta_0}{\pi} + \frac{1}{2} \leqslant \lambda_0 \leqslant (K_d - 1)\frac{\tau p_0}{i} - \frac{\theta_0}{\pi} + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Astfel, echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 poate fi realizată în alternativa $K_d > 1$ cînd unghiul θ_0 asigură existența unor valori întregi λ_0 cuprinse în domeniul (11); pentru valorile λ_0 precizate în acest mod, se determină din formula (10) unghiurile ζ care antrenează echilibrajul propus.

---

[2] Pentru $\psi - \zeta = 0$, se obține din (6) $\theta_0 = (2\lambda_0 - 1)\frac{\pi}{2}$, unde, ținînd seamă că θ_0 aparține domeniului (7), factorul λ_0 poate lua una din valorile $\lambda_0 = 1$ și $\lambda_0 = 2$. Astfel, prin adoptarea cuplajului $I_s I_d$ al aprinderilor se echilibrează momentele rezultante ale căror ordine p_0 comportă unghiurile la origine $\theta_0 = \frac{\tau}{2}$ și $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Pentru orice motor există totdeauna o soluție care permite rezolvarea problemei. Într-adevăr, echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este asigurată dacă momentele $\mathfrak{M}_{p_0}$ din cele două linii sînt permanent egale și de semne opuse. Întrucît arborii cotiți se rotesc în sensuri contrare, condiția este respectată cînd vectorii M_{p_0} ai celor două linii ocupă în orice moment de timp poziții simetrice față de planul V situat la mijlocul distanței dintre planele Q_s și Q_d și paralel cu acestea[3]).

În funcție de ordinul p_0, pot exista mai multe soluții de echilibrare. Fiindcă limitele domeniului (11) diferă între ele prin $\frac{\tau p_0}{i}$, există cel puțin o soluție pentru orice valoare supraunitară a lui K_d dacă $\frac{\tau p_0}{i} \geqslant 1$, deci cînd $p_0 \geqslant \frac{i}{\tau}$ [4]).

Tot în alternativa $K_d > 1$, problema echilibrării momentului rezultant de ordinul p_0 mai poate fi tratată și pe o cale particulară. În acest scop se observă că, pentru

$$\theta_0 > (2\lambda_0 - 1)\frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

---

[3]) Această condiție este satisfăcută evident în cazul particular al cuplajului $I_s I_d$, pentru ordinul p_0 căruia îi corespunde unghiul la origine $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ sau $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$.

[4]) În acest caz, pentru a preciza numărul de soluții distincte, aferente oricărui K_d supraunitar, se consideră că domeniul (11) cuprinde μ valori întregi λ_0, pentru $K_d = K_d'$. Dacă una dintre limitele domeniului (11) este un număr întreg, ea reprezintă una din cele μ valori λ_0; această particularitate se poate realiza, de pildă, pentru limita superioară

$$\lambda_0' = (K_d' - 1)\frac{\tau p_0}{i} - \frac{\theta_0}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Pentru λ_0' și K_d' se obține soluția ce comportă decalajul ζ', dedus din (10), între aprinderile I_s și K_d'. Avînd în vedere expresia lui λ_0', rezultă $\zeta' = 0$, deci soluția implică declanșarea simultană a aprinderilor I_s și K_d'.

Pentru $K_d = K_d'' = K_d' + 1$, limita inferioară a domeniului (11) are aceeași valoare întreagă, fiindcă

$$\lambda_0'' = (K_d'' - 2)\frac{\tau p_0}{i} - \frac{\theta_0}{\pi} + \frac{1}{2} = \lambda_0'.$$

Cu λ_0' și K_d'' se stabilește una dintre soluțiile posibile pentru $K_d = K_d''$, caracterizată prin decalajul ζ'' între aprinderile I_s și K_d''. Înlocuind în (10) ultima expresie a lui λ_0', se obține $\zeta'' = \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$, adică decalajul dintre două aprinderi consecutive din aceeași linie. În consecință, cuplajul $I_s \to K_d''$ al aprinderilor, reclamat de noua soluție, se realizează tot cu producerea simultană a aprinderilor I_s și K_d', ceea ce înseamnă că cele două soluții nu sînt distincte.

Se constată astfel că cele μ valori λ_0 cuprinse în intervalul (11) pentru un anumit K_d precizează soluții distincte de echilibrare cînd limitele intervalului sînt numere fracționare. Numărul K_d considerat conduce la $\mu - 1$ soluții distincte cînd una dintre limitele domeniului (11) este un număr întreg, respectiv la $\mu - 2$ soluții distincte cînd ambele limite sînt numere întregi.

inegalitatea (9) este satisfăcută şi cînd relaţia (6) ia forma

$$\zeta = \psi - \frac{1}{p_0}[2\theta_0 - (2\lambda_0 - 1)\pi], \tag{13}$$

unde sînt posibile numai valorile λ_0 care asigură îndeplinirea simultană a condiţiilor (7) şi (12), adică valorile 0, 1 sau 2. În funcţie de aceste posibilităţi, relaţia (13) devine

$$\zeta = \psi - \frac{2\theta_0 + \pi}{p_0}, \tag{14}$$

$$\zeta = \psi - \frac{2\theta_0 - \pi}{p_0}, \tag{15}$$

sau

$$\zeta = \psi - \frac{2\theta_0 - 3\pi}{p_0}. \tag{16}$$

Înlocuind valoarea unghiului ψ dată de (1) în relaţiile (14)...(16) şi avînd în vedere domeniul posibil (8), se deduce

$$1 + \frac{i}{\tau p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \leqslant K_d \leqslant 2 + \frac{i}{\tau p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} + \frac{1}{2}\right), \tag{17}$$

$$1 + \frac{i}{\tau p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \leqslant K_d \leqslant 2 + \frac{i}{\tau p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} - \frac{1}{2}\right), \tag{18}$$

şi, respectiv,

$$1 + \frac{i}{\tau p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} - \frac{3}{2}\right) \leqslant K_d \leqslant 2 + \frac{i}{\tau p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} - \frac{3}{2}\right). \tag{19}$$

Astfel, după cum unghiul θ_0 se încadrează între limitele $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \theta_0 \leqslant \frac{3\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2} < \theta_0 \leqslant 2\pi$, momentul rezultant de ordinul p_0 se echilibrează dacă se adoptă unghiul ζ conform relaţiei (14), (15) sau (16), unde K_d este cuprins în intervalul (17), (18), respectiv (19).

Deoarece limitele oricăruia dintre aceste intervale diferă între ele prin 1, se pot prezenta două situaţii: fiecare interval are ambele limite fie fracţionare, fie numere întregi. În prima situaţie orice interval conţine un singur număr întreg, deci calea particulară examinată conduce evident la o singură soluţie. În a doua situaţie s-ar părea că sînt posibile două soluţii, cîte una pentru fiecare limită a fiecărui interval. Notînd limita inferioară cu K_d^*, ea precizează soluţia caracterizată prin unghiul $\zeta = 0$,

deci prin declanșarea simultană a aprinderilor I_s și K_d^*. Limitei superioare, ce are valoarea K_d^*+1, îi corespunde unghiul dintre două aprinderi consecutive din aceeași linie $\zeta = \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$, adică aceeași soluție, cu aprinderile I_s și K_d^* simultane. În consecință, prin considerarea domeniului restrîns în care se încadrează unghiul θ_0, se poate stabili numai o singură soluție de echilibrare a momentului rezultant de ordinul p_0.

2) Pentru $K_d = 1$, $\psi = 0$, relația (6) devine

$$\zeta = \frac{1}{p_0}[(2\lambda_0 - 1)\pi - 2\theta_0]. \tag{20}$$

Comparînd relația (20) cu domeniul de variație (8) se constată următoarele:

a) Deoarece $\zeta \geqslant 0$, trebuie îndeplinită condiția $\theta_0 \leqslant (2\lambda_0 - 1)\frac{\pi}{2}$, unde $\lambda_0 = 1$ și $\lambda_0 = 2$, fiindcă θ_0 se află în intervalul (7). Ca atare, relația (20) ia forma

$$\zeta = \frac{\pi - 2\theta_0}{p_0} \tag{21}$$

sau forma

$$\zeta = \frac{3\pi - 2\theta_0}{p_0}. \tag{22}$$

b) Întrucît $\zeta \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$, se poate aplica relația (21) dacă

$$\frac{\tau p_0}{i} + \frac{\theta_0}{\pi} \geqslant \frac{1}{2} \tag{23}$$

sau relația (22) dacă

$$\frac{\tau p_0}{i} + \frac{\theta_0}{\pi} \geqslant \frac{3}{2}. \tag{24}$$

În consecință, alternativa $K_d=1$ oferă o soluție de echilibrare a momentului rezultant de ordinul p_0 cînd sînt satisfăcute simultan condițiile $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$ și (23), sau condițiile $\frac{\pi}{2} < \theta_0 \leqslant \frac{3\pi}{2}$ și (24). Unghiul ζ corespunzător se calculează cu formula (21), respectiv cu formula (22).

★

Adoptarea unui decalaj ζ, care asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0, antrenează creșterea unor momente rezultante rămase neechilibrate. Expresia amplitudinii acestor momente, dedusă

prin înlocuirea relației (6) în (2), unde $\gamma = 0$, este

$$B_{\mathfrak{M}_p} = 2M_p \cos\left\{\frac{\theta_0}{\pi} - \frac{p}{2p_0}\left[\frac{2\theta_0}{\pi} \mp (2\lambda_0 - 1)\right]\right\}\pi. \tag{25}$$

Dacă

$$\frac{\theta_0}{\pi} - \frac{p}{2p_0}\left[\frac{2\theta_0}{\pi} \mp (2\lambda_0 - 1)\right] = \pm\,\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

adică

$$p = \frac{(\theta_0 \pm \nu\pi)p_0}{\theta_0 \mp (2\lambda_0 - 1)\dfrac{\pi}{2}}, \tag{26}$$

relația (25) devine $|B_{\mathfrak{M}_p}| = 2M_p$. Astfel, momentele rezultante ale căror ordine respectă condiția (26) înregistrează valoarea maximă la echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0.

5.2. DETERMINAREA MOMENTELOR REZULTANTE CARE SE ECHILIBREAZĂ SIMULTAN

Se presupune că se adoptă un decalaj ζ care asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0. Această măsură poate determina și echilibrarea altor momente rezultante, și anume : momente rezultante ale căror ordine p_0^* comportă tot unghiul la origine θ_0 și momente rezultante ale căror ordine p sînt asociate cu alt unghi la origine $\theta \neq \theta_0$.

Dacă echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este realizată în alternativa $K_d > 1$, ordinele p_0^* și p se deduc, respectiv, din relațiile

$$\frac{2\theta_0 + (2\xi_1 - 1)\pi}{p_0^*} = \frac{2\theta_0 + (2\lambda_0 - 1)\pi}{p_0}, \tag{27}$$

în care ξ_1 este un număr întreg, și

$$\frac{2\theta + (2\lambda - 1)\pi}{p} = \frac{2\theta_0 + (2\lambda_0 - 1)\pi}{p_0}, \tag{28}$$

unde λ rezultă prin aplicarea condiției (11) pentru ordinele p și unghiul θ asociat lor ; într-adevăr, înlocuind atît relația (27), cît și relația (28) în formula (10), se obține tot decalajul ζ adoptat. Dacă se folosește alter-

nativa $K_d=1$, adică se deduce decalajul ζ din (20), ordinele p_0^* și p satisfac, respectiv, egalitățile

$$\frac{(2\xi_2-1)\pi - 2\theta_0}{p_0^*} = \frac{(2\lambda_0 - 1)\pi - 2\theta_0}{p_0}$$

și

$$\frac{(2\rho - 1)\pi - 2\theta}{p} = \frac{(2\lambda_0 - 1)\pi - 2\theta_0}{p_0},$$

unde ξ_2 și ρ sînt numere întregi, întrucît membrul drept al oricăreia din aceste egalități reprezintă chiar unghiul ζ ales.

În legătură cu ordinele p_0^* și p se pot face următoarele precizări.

a) În linia de cilindri din stînga vectorii $M_{p_0^*}$ sînt în fază cu vectorul M_{p_0} în momentul de timp ales ca origine, deoarece pozițiile tuturor acestor vectori sînt precizate prin același unghi la origine θ_0. Dacă manivela 1_d se află în poziția corespunzătoare punctului mort interior în momentul de timp ales ca origine, vectorii $M_{p_0^*}$ ai liniei din dreapta sînt și ei în acest moment în fază cu vectorul M_{p_0} al aceleiași linii; poziția unică a vectorilor $M_{p_0^*}$ și M_{p_0} dintr-o linie este atunci paralelă cu poziția unică a vectorilor $M_{p_0^*}$ și M_{p_0} din cealaltă linie. Această situație corespunde cuplajului I_sI_d al aprinderilor și este arătată în figura 2*a*, unde unghiul α_i precizează poziția necesară a manivelelor 1_s și 1_d.

Dacă se folosește alternativa $K_d > 1$, arborele cotit din dreapta este rotit cu unghiul $-(\psi - \zeta)$ față de poziția sa precedentă, în vederea realizării cuplajului $I_s \to K_d$. Această schimbare de poziție a arborelui cotit din dreapta, respectiv rotirea vectorului M_{p_0} din dreapta față de poziția sa precedentă cu unghiul $-p_0(\psi - \zeta)$, asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0. Aceeași schimbare antrenează și echilibrarea momentelor rezultante de ordinele p_0^* dacă rotirile corespunzătoare ale vectorilor $M_{p_0^*}$ din dreapta determină o nouă coincidență de fază a acestor vectori cu vectorul M_{p_0} din dreapta (fig. 2*b*), deci cînd este îndeplinită condiția

$$p_0^*(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\sigma\pi,$$

unde σ este un număr întreg.

Dacă se utilizează alternativa $K_d = 1$, situația corespunzătoare cuplajului I_sI_d se modifică în scopul realizării cuplajului $I_s \to I_d$, prin rotirea arborelui cotit din dreapta cu unghiul ζ. Reeditarea coincidenței de fază a vectorilor $M_{p_0^*}$ și M_{p_0} din dreapta la sfîrșitul rotirilor corespunzătoare ale acestor vectori (fig. 2*c*), necesară pentru echilibrarea momentelor rezultante de ordinele p_0^*, reclamă satisfacerea condiției

$$p_0^*\zeta = p_0\zeta + 2\sigma\pi.$$

Astfel, simultan cu echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0, se echilibrează și momentele rezultante de ordinele

$$p_0^* = p_0 + 2\sigma \frac{\pi}{\psi - \zeta} \tag{29}$$

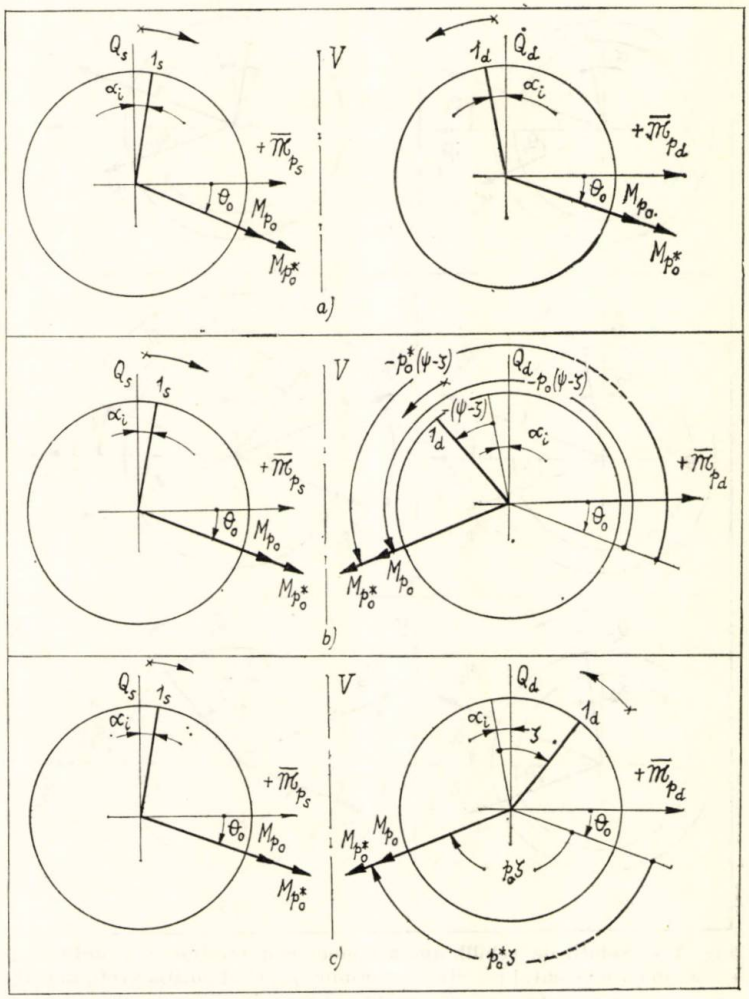


Fig. 2. — Soluțiile de echilibrare a momentelor rezultante de ordinele p_0^* simultan cu momentul rezultant de ordinul p_0.

în alternativa $K_d > 1$, respectiv

$$p_0^* = p_0 + 2\sigma \frac{\pi}{\zeta} \tag{30}$$

în alternativa $K_d = 1$; în oricare din formulele (29) și (30) trebuie considerate numerele σ care conduc la ordine ale unor momente externe ce subzistă în fiecare linie.

b) În momentul de timp ales ca origine, vectorii M_p ai liniei din stînga ocupă aceeaşi poziţie, precizată de unghiul θ. Se consideră că în acest moment de timp arborii cotiţi sînt dispuşi corespunzător cuplajului

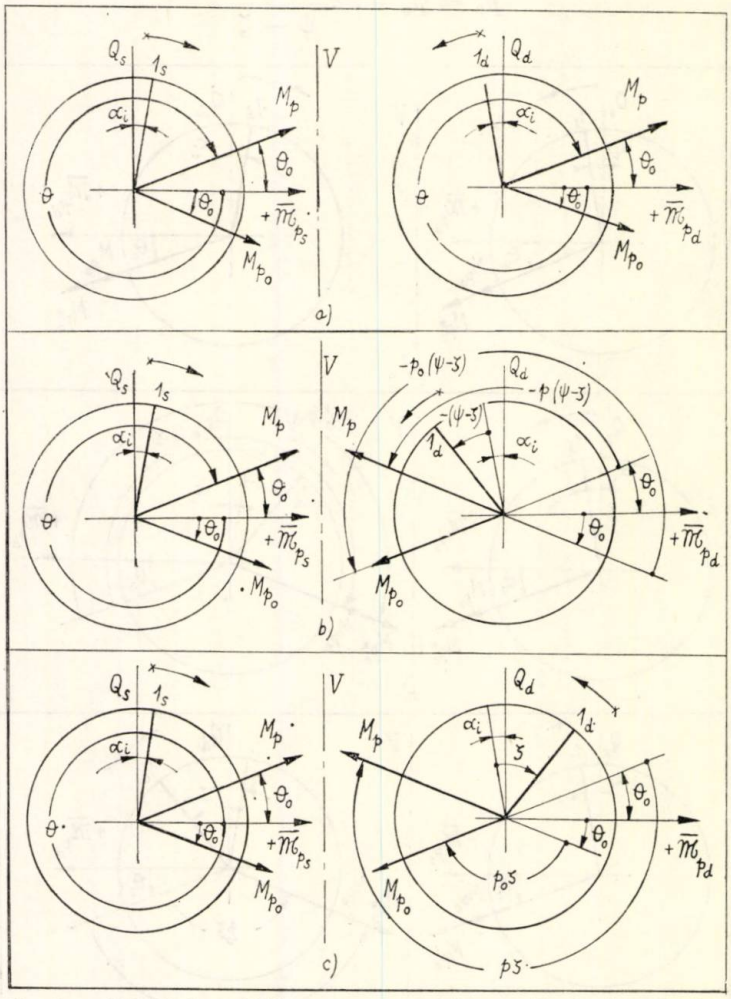


Fig. 3. — Soluţii de echilibrare a momentelor rezultante de ordinele p simultan cu momentul rezultant de ordinul p_0, cînd poziţia vectorilor M_p este simetrică cu vectorul M_{p_0} faţă de semiaxa $+\overline{\mathfrak{M}}_p$.

I_sI_d al aprinderilor, ceea ce asigură şi vectorilor M_p din dreapta o poziţie unică, paralelă cu poziţia vectorilor M_p din stînga; conform aceleiaşi ipoteze, vectorii M_{p_0} din cele două linii sînt atunci paraleli. Se mai presupune că poziţia vectorilor M_p din fiecare linie este simetrică cu vectorul M_{p_0} al liniei respective, în raport cu semiaxa $+\overline{\mathfrak{M}}_p$, deci se admite existenţa relaţiei

$$\theta = 2\pi - \theta_0; \tag{31}$$

pentru $\theta > \theta_0$, această situaţie este arătată în figura 3*a*.

Fără ca arborele cotit din stînga să se deplaseze, se rotește arborele cotit din dreapta cu unghiul $-(\psi - \zeta)$ sau cu unghiul ζ, după cum se utilizează alternativa $K_d > 1$, respectiv alternativa $K_d = 1$. În acest fel vectorul M_{p_0} din dreapta, care se rotește cu unghiul $-p_0(\psi - \zeta)$ respectiv cu unghiul $p_0\zeta$, este adus în poziția simetrică cu poziția vectorului M_{p_0} din stînga, față de planul V, ceea ce asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0. Momentele rezultante de ordinele p vor fi și ele echilibrate dacă rotirile vectorilor M_p din dreapta, corespunzătoare rotirii executate de arborele cotit din dreapta, determină o nouă coincidență de fază a acestor vectori, în poziția simetrică cu poziția vectorilor M_p din stînga, în raport cu planul V; situația astfel obținută este prezentată în figura 3*b* pentru $K_d > 1$ și în figura 3*c* pentru $K_d = 1$. Deoarece noua poziție a vectorilor M_p din dreapta este totodată simetrică cu vectorul M_{p_0} din dreapta, față de semiaxa $-\overline{\mathfrak{M}}_{p_d}$, această condiție este exprimată prin relația

$$p(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\chi\pi - 4\theta_0 \tag{32}$$

cînd $K_d > 1$, și prin relația

$$p\zeta = p_0\zeta + 2\chi\pi + 4\theta_0 \tag{33}$$

cînd $K_d = 1$, χ fiind un număr întreg.

Dacă se păstrează ipotezele precedente și se reface același raționament în cazul $\theta < \theta_0$, se obține pentru cele două alternative

$$p(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\chi\pi + 4\theta$$

și

$$p\zeta = p_0\zeta + 2\chi\pi - 4\theta.$$

Ținînd seamă că și în acest caz este îndeplinită condiția (31), ultimele relații devin

$$p(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\chi\pi + 8\pi - 4\theta_0 \tag{34}$$

și

$$p\zeta = p_0\zeta + 2\chi\pi - 8\pi + 4\theta_0. \tag{35}$$

Pornind tot de la dispunerea arborilor cotiți corespunzător cuplajului I_sI_d în momentul de timp ales ca origine, dar considerînd că simetria dintre poziția vectorilor M_p din fiecare linie și vectorul M_{p_0} al liniei respective se realizează în acest moment în raport cu semiaxa $-\overline{\mathfrak{M}}_p$ se deduce

$$p(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\chi\pi + 2(\theta - \theta_0)$$

pentru $K_d > 1$, și

$$p\zeta = p_0\zeta + 2\chi\pi - 2(\theta - \theta_0)$$

pentru $K_d = 1$, indiferent dacă $\theta > \theta_0$ sau dacă $\theta < \theta_0$. Și în aceste cazuri este respectată condiția (31), astfel încît din relațiile precedente rezultă, respectiv,

$$p(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\chi\pi + 4\pi - 4\theta_0 \tag{36}$$

și

$$p\zeta = p_0\zeta + 2\chi\pi - 4\pi + 4\theta_0. \tag{37}$$

Dacă se presupune că dispunerea inițială a arborilor cotiți, corespunzătoare cuplajului $I_s I_d$, este asociată cu situarea vectorilor M_p și M_{p_0} din fiecare linie de aceeași parte a planului $\mathfrak{M}_p$ al liniei alese și că poziția vectorilor M_p dintr-o linie este simetrică cu vectorul M_{p_0} din acea linie în raport cu planul Q, se obține una din relațiile (32), (34) sau (36) pentru $K_d > 1$, respectiv una din relațiile (33), (35) sau (37) pentru $K_d = 1$. De exemplu, cînd vectorii M_p și M_{p_0} sînt plasați dedesubtul planului $\mathfrak{M}_p$ și $\theta > \theta_0$ (fig. 4), rezultă relația (32) cînd $K_d > 1$ și relația (33) cînd $K_d = 1$.

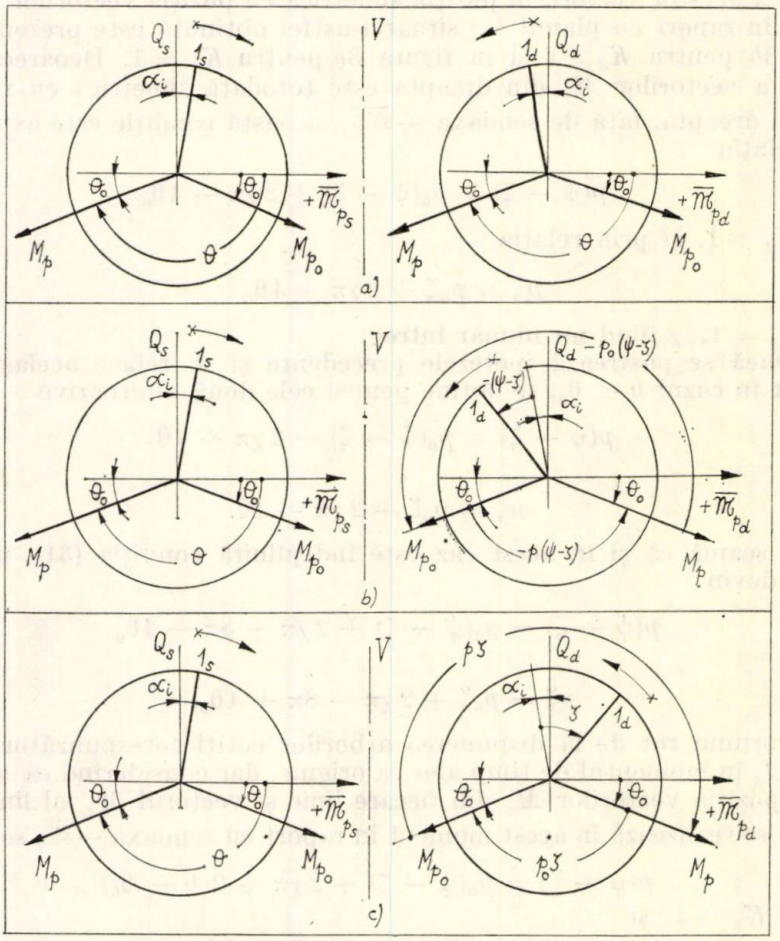


Fig. 4. — Soluții de echilibrare a momentelor rezultante de ordinele p simultan cu momentul rezultant de ordinul p_0, cînd poziția vectorilor M_p este simetrică cu vectorul M_{p_0} față de planul Q.

În comparație cu relația (32), relațiile (34) și (36) conțin cîte un termen în plus. Avînd în vedere că acest termen este un multiplu de 2π și că cele trei relații se referă la deplasări unghiulare, se poate considera că relația (32) reprezintă o expresie generală, care permite formularea

unui punct de vedere unitar pentru toate cazurile corespunzătoare alternativei $K_d > 1$. În mod asemănător, se deduce că formula (33) este reprezentativă pentru alternativa $k_d = 1$.

Se constată astfel că, simultan cu echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0, se mai echilibrează și momentele rezultante de ordinele

$$p = p_0 + 2\frac{\chi\pi - 2\theta_0}{\psi - \zeta} \tag{38}$$

dacă se folosește alternativa $K_d > 1$, respectiv momentele rezultante de ordinele

$$p = p_0 + 2\frac{\chi\pi + 2\theta_0}{\zeta} \tag{39}$$

dacă se aplică alternativa $K_d = 1$; unghiul θ asociat ordinelor (38) sau (39) asigură simetria poziției vectorilor M_p din orice linie cu vectorul M_{p_0} al aceleeași linii, fie în raport cu planul $\mathfrak{M}_p$, fie în raport cu planul Q, cînd arborii cotiți sînt dispuși conform cuplajului $I_s I_d$ al aprinderilor în momentul de timp ales ca origine. În formulele (38) și (39) trebuie considerate numai numerele χ care conduc la ordine ale unor momente externe ce subzistă în fiecare linie.

5.3. CONDIȚIA CARE ASIGURĂ CEL MAI BUN ECHILIBRAJ AL MOMENTELOR REZULTANTE

Pentru a realiza cel mai bun echilibraj al momentelor rezultante, decalajul funcțional dintre liniile de cilindri trebuie stabilit punînd condiția de echilibrare a momentului rezultant de ordinul cel mai mic. Într-adevăr, acest moment rezultant are, de regulă, amplitudinea cea mai mare, iar momentele rezultante care se mai echilibrează în același timp au amplitudini maximale deoarece relațiile (29) și (38), respectiv (30) și (39), precizează ordine minimale cînd $p_0 = p_{\min}$.

5.4. POSIBILITĂȚILE DE ECHILIBRARE A MOMENTELOR REZULTANTE OFERITE DE REPARTIȚIA UNIFORMĂ A APRINDERILOR PENTRU ANSAMBLUL MOTORULUI

O situație avantajoasă se obține cînd echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este asigurată prin repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul motorului, deci cînd

$$\zeta = \frac{\tau\pi}{i}. \tag{40}$$

Dacă $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, o posibilitate de realizare a acestei situații în alternativa $k_d > 1$ este evidențiată prin identificarea relațiilor (14) și

(40); se precizează astfel necesitatea ca unul dintre numerele K_d să respecte condiția

$$K_d = \frac{3}{2} + \frac{i}{\tau} \cdot \frac{2\theta_0 + \pi}{2\pi p_0}.$$

Cînd $\frac{\pi}{2} < \theta_0 \leqslant \frac{3\pi}{2}$ și se folosește aceeași alternativă, condiția impusă numărului K_d, obținută prin identificarea relațiilor (15) și (40) este

$$K_d = \frac{3}{2} + \frac{i}{\tau} \cdot \frac{2\theta_0 - \pi}{2\pi p_0}.$$

În sfîrșit, pentru $\frac{3\pi}{2} < \theta_0 \leqslant 2\pi$ și $K_d > 1$, din (16) și (40) rezultă

$$K_d = \frac{3}{2} + \frac{i}{\tau} \cdot \frac{2\theta_0 - 3\pi}{2\pi p_0}.$$

În alternativa $K_d = 1$, posibilitatea ca repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul motorului să asigure echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 se cercetează introducînd condiția (40) în (21) sau (22). Se constată că ordinul p_0 și unghiul θ_0 asociat lui trebuie să îndeplinească egalitatea

$$\frac{1 - 2\frac{\theta_0}{\pi}}{p_0} = \frac{\tau}{i}$$

dacă $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, respectiv egalitatea

$$\frac{3 - 2\frac{\theta_0}{\pi}}{p_0} = \frac{\tau}{i}$$

dacă $\frac{\pi}{2} < \theta_0 \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

Cea mai avantajoasă împrejurare s-ar obține cînd una dintre soluțiile de echilibrare a momentului rezultant de ordinul p_{min} ar corespunde repartiției uniforme a aprinderilor pentru ansamblul motorului, această soluție fiind evident preferabilă. În caz contrar se optează fie pentru echilibrajul optim, fie pentru repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul motorului, asociată cu un echilibraj mai slab.

6. CONCLUZII

La orice motor cu două linii paralele de cilindri și prevăzut cu arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare, se poate asigura echilibrajul momentului rezultant corespunzător oricărui termen al forțelor de inerție

ale maselor cu mişcare de translaţie, adoptînd un decalaj funcţional corespunzător între cilindrii celor două linii. În plus, orice soluţie de echilibrare a unui moment rezultant antrenează şi echilibrarea altor momente rezultante.

Aceste constatări permit abordarea problemei echilibrajului optim al momentelor rezultante şi studierea posibilităţilor de echilibraj al momentelor rezultante oferite de repartiţia uniformă a aprinderilor pentru ansamblul motorului.

Primită la redacţie la 11 august 1973

BIBLIOGRAFIE

1. G. Bărănescu, Gh. Zătreanu, *Îmbunătăţirea echilibrajului momentelor forţelor de inerţie prin plasarea cilindrilor în două linii prevăzute fiecare cu un arbore cotit*, St. cerc. mec. apl., *5* (1969).
2. Gh. Zătreanu, *Aspecte ale dinamicii motoarelor cu două linii paralele de cilindri*, Constr. de maşini, *6* (1970).
3. — *Soluţii dinamice raţionale la motoarele în patru timpi cu două linii paralele de cilindri*, St. cerc. mec. apl., *1* (1971).
4. G. Bărănescu, *Interpretări vectoriale ale forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variaţiei vitezei unghiulare de rotaţie a arborelui cotit*, St. cerc. mec. apl., *6* (1969).

INFLUENȚA DEBLOCĂRII DIFERENȚIALULUI ASUPRA STABILITĂȚII AUTOMOBILULUI CU DIFERENȚIAL AUTOBLOCABIL

de A. P. STOICESCU
Institutul politehnic București

În lucrare se studiază stabilitatea mișcării rectilinii a automobilului cu diferențial autoblocabil în cazul cînd diferențialul se deblochează.
Se arată că, pentru viteze mai mici decît viteza critică corespunzătoare automobilului cu diferențial normal, mișcarea rectilinie a aceluiași automobil, dar cu diferențial autoblocabil care funcționează este stabilă. În schimb, pentru viteze mai mari decît viteza critică menționată, mișcarea automobilului al cărui diferențial autoblocabil funcționează ar putea deveni instabilă.
Se mai arată că la automobilele cu diferențial normal funcționarea acestuia n-are nici o influență asupra vitezei critice.

În lucrarea [4] s-a studiat stabilitatea la perturbații mici a mișcării rectilinii a automobilului cu diferențial autoblocabil. În studiul efectuat s-a făcut presupunerea că diferențialul rămîne blocat. Însă, este posibil ca la mersul în linie dreaptă perturbațiile să atingă o asemenea valoare, încît forțele tangențiale care iau naștere la roți să producă deblocarea diferențialului. În aceste condiții ecuațiile de mișcare nu vor mai fi aceleași ca în [4], schimbîndu-se astfel și condițiile de stabilitate.

În lucrarea de față se studiază stabilitatea mișcării rectilinii a automobilului cu diferențial autoblocabil în cazul cînd diferențialul se deblochează.

Deblocarea diferențialului poate fi realizată prin perturbațiile inițiale sau prin evoluția în timp a perturbațiilor cînd diferențialul era încă blocat. Modul cum s-a ajuns la deblocare nu prezintă importanță, întrucît perturbațiile din momentul în care se începe descrierea mișcării diferențialului deblocat vor fi considerate ca perturbații inițiale.

În prealabil se vor deduce ecuațiile de mișcare ținînd seamă de particularitățile introduse datorită deblocării diferențialului. După aceea se vor scrie ecuațiile în perturbații și se vor examina amănunțit condițiile de stabilitate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 297–315

1. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE AUTOMOBILULUI AL CĂRUI DIFERENȚIAL ESTE DEBLOCAT

Ca și în [4] se consideră modelul matematic fără ruliu, cu mecanism de direcție rigid. De asemenea, se vor folosi aceleași notații ca în [4], ele fiind indicate și în anexă.

Ecuațiile de mișcare sînt alcătuite din ecuațiile de mișcare propriuzise ale automobilului și din ecuațiile de mișcare ale diferențialului. Se observă că prima grupă de ecuații este reprezentată chiar de ecuațiile (3) din [4], ele avînd caracter general, în orice condiții s-ar afla diferențialul.

Pentru cea de a doua grupă de ecuații trebuie să se țină seama de faptul că, în cazul de față, diferențialul este deblocat. Cînd diferențialul este deblocat, deci cînd funcționează efectiv, raportul momentelor ce acționează la semiarborii planetari poate fi exprimat în funcție de coeficientul de blocare al diferențialului [2].

Momentele care acționează la cei doi semiarbori planetari sînt determinate de ecuațiile :

$$\begin{aligned} M_2' &= I_r\dot{\omega}_{2r}' + X_2'r_{d_2}' + M_{ru2}', \\ M_2'' &= I_r\dot{\omega}_{2r}'' + X_2''r_{d_2}'' + M_{ru2}''. \end{aligned} \tag{1}$$

Întrucît diferențialul este deblocat, are loc relația (se presupune că $\omega_{2r}' > \omega_{2r}''$)

$$\frac{I_r\dot{\omega}_{2r}'' + X_2''r_{d_2}' + M_{ru2}''}{2I_r\dot{\omega}_{2r} + X_2r_{d_2} + M_{ru2}} = D, \tag{2}$$

în care D este o funcție ce se exprimă prin coeficientul de blocare al diferențialului K și $\omega_{2r}' - \omega_{2r}''$, așa cum arată figura 1.

De asemenea, se mai poate scrie încă o relație similară cu (3), și anume

$$\frac{I_r\dot{\omega}_{2r}' + X_2'r_{d_2}' + M_{ru2}'}{2I_r\dot{\omega}_{2r} + X_2r_{d_2} + M_{ru2}} = 1 - D. \tag{3}$$

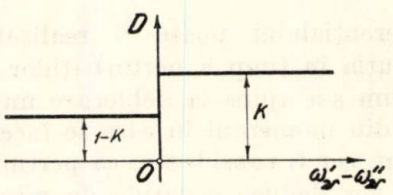


Fig. 1

Făcînd legătura dintre vitezele unghiulare ale roților și vitezele centrelor lor, se obține

$$v_2' = (r_{20}' - \lambda X_2')\,\omega_{r_2}'. \tag{4}$$

Dar, potrivit celor arătate în [4], se poate scrie

$$v_2' = v + 0{,}5\, B_2. \tag{4'}$$

Din relațiile (4) și (4') se obține

$$X_2' = \frac{r_{20}'}{\lambda} - \frac{v + 0{,}5\, B_2\omega}{\lambda\omega_{2r}'}. \tag{5}$$

Procedînd în mod asemănător se ajunge și la relația

$$X_2'' = \frac{r_{20}''}{\lambda} - \frac{v - 0{,}5\, B_2\omega}{\lambda\omega_{2r}''}. \tag{6}$$

Prin scăderea relațiilor (3) și (2) membru cu membru, considerînd că $r_{d_2}' \simeq r_{d_2}'' = r_{d_2}$, se obține

$$I_r(\dot{\omega}_{2r}' - \dot{\omega}_{2r}'') + (X_2' - X_2'')\, r_{d_2} = 2I_r(1 - 2D)\,\dot{\omega}_{2r} + r_{d_2}(1 - 2D)\, X_2 + \\ + (1 - 2D)\, M_{ru2}. \tag{7}$$

Întrucît $Z_2' = Z_2''$, rezultă că și $M_{ru2}' = M_{ru2}''$.

Plecînd de la definiția funcției D, se verifică ușor că funcția $1-2D$ se reprezintă grafic așa cum este indicat în figura 2. Prin urmare

$$1 - 2D = (1 - 2K)\ \text{sign}\ (\omega_{2r}' - \omega_{2r}''). \tag{8}$$

Din relațiile (5) și (6) se explicitează ω_{2r}' și ω_{2r}'', după care se poate scrie

$$\omega_{2r}' - \omega_{2r}'' = \frac{v + 0{,}5\, B_2\omega}{r_{20}' - \lambda X_2'} - \frac{v - 0{,}5\, B_2\omega}{r_{20}'' - \lambda X_2''}. \tag{9}$$

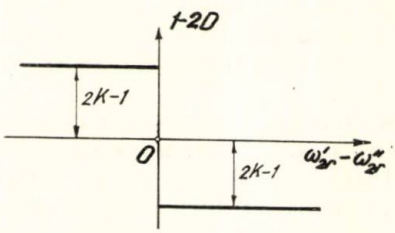


Fig. 2

De asemenea, există următoarele relații:

$$M_2 = M_2' + M_2'', \tag{10}$$

$$2\omega_{2r} = \omega_{2r}' + \omega_{2r}'', \tag{11}$$

$$X_2 = X_2' + X_2'', \tag{12}$$

în care M_2 este momentul aplicat diferențialului prin intermediul angrenajului principal.

Dacă se ține seamă de relațiile (10) și (11), prin adunarea membru cu membru a celor două relații (1) se obține

$$2I_r\dot{\omega}_{2r} = X_2 r_{d_2} - M_{ru2} + M_2. \tag{13}$$

Între momentul motor și momentul aplicat casetei sateliților există următoarea dependență :

$$M_2 = [M_m(\omega_m) - I_m\dot{\omega}_m]\,\eta_t i_t. \tag{14}$$

Ținîndu-se seama de relația

$$\omega_{2r} = \omega_m i_t^{-1},$$

precum și de (14), relația (13) devine

$$(2I_r + I_m i_t^2 \eta_t)\,\dot{\omega}_{2r} = -fr_{d_2}Z_2 - X_2 r_{d_2} + M_m(\omega_{2r} i_t). \tag{15}$$

Avînd în vedere că

$$0{,}5\,v = v_2' + v_2''$$

și folosind relația (4), împreună cu analoga ei pentru cealaltă roată, rezultă

$$v = 0{,}5\,\omega_{2r}'(r_{20}' - \lambda X_2') + 0{,}5\,\omega_{2r}''(r_{20}'' - \lambda X_2''). \tag{16}$$

Problema generală a mișcării automobilului cu diferențialul autoblocabil, cînd acesta funcționează, constă în determinarea următoarelor necunoscute :

$$\alpha,\ \omega,\ v,\ \omega_{2r},\ \omega_{2r}',\ \omega_{2r}'',\ X_2,\ X_2',\ X_2'',\ Z_1 \text{ și } Z_2.$$

Ecuațiile care descriu mișcarea automobilului în condițiile de mai sus sînt : (3) din [4], (7), (9), (11), (12), (15) și (16). La acestea se mai adaugă încă două ecuații care conțin pe Z_1 și Z_2 (o ecuație de forțe și o ecuație de momente). Deci numărul total al necunoscutelor este de 11, iar numărul ecuațiilor distincte este tot de 11, ceea ce face ca problema să fie rezolvabilă în principiu.

Însă, soluționarea efectivă a problemei este dificilă întrucît o parte din ecuații sînt neliniare, deși s-a presupus că pneurile lucrează pe porțiunea de liniaritate. Încercarea de a elimina diferite necunoscute duce la ecuații diferențiale neliniare de formă destul de complicată. În regim staționar problema este mai simplă, ea revenind la rezolvarea unui sistem algebric, care, de asemenea, este neliniar.

2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII PERTURBATE

Întrucît lucrarea are ca scop studiul stabilității, este necesar să se deducă ecuațiile în perturbații pentru mișcarea de bază rectilinie uniformă. Deoarece în cea de a doua ecuație (3) din [4] apare diferența $X'_2 - X''_2$, aceasta trebuie să se exprime în funcție de ceilalți parametri cinematici.

Prin scăderea relațiilor (5) și (6) se obține

$$X'_2 - X''_2 = \frac{r'_{20} - r''_{20}}{\lambda} + \frac{v}{\lambda} \cdot \frac{\omega'_{2r} - \omega''_{2r}}{\omega'_{2r}\omega''_{2r}} - \frac{B_2\omega \cdot \omega_{2r}}{\lambda\omega'_{2r}\omega''_{2r}}.$$

Dacă se are în vedere că mișcarea de bază este caracterizată prin $\omega'_{2r} = \omega''_{2r}$ și $\omega = 0$, din expresia precedentă se obține

$$\Delta(X'_2 - X''_2) = \frac{v}{\lambda\omega^2_{2r}} \Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}) - \frac{B_2}{\omega_{2r}\lambda} \cdot \Delta\omega. \tag{17}$$

În continuare se presupune că

$$r'_{20} = r''_{20} = r_{20}.$$

Cu simplificarea de mai sus, plecînd de la (16), se scriu următoarele relații în perturbații:

$$\Delta v = (r_{20} - 0{,}5\,\lambda X_2)\,\Delta\omega_{2r} - 0{,}5\,\lambda\omega_{2r}\Delta X_2, \tag{18}$$

$$\Delta\dot{v} = (r_{20} - 0{,}5\,\lambda X_2)\,\Delta\dot{\omega}_{2r} - 0{,}5\,\lambda\omega_{2r}\Delta\dot{X}_2. \tag{18'}$$

Ecuația în perturbații corespunzătoare ecuației (15) se scrie

$$I_0\Delta\dot{\omega}_{2r} = -fr_{d_2}\Delta Z_2 - r_{d_2}\Delta X_2 + \mu_0 i_t \Delta\omega_{2r}, \tag{19}$$

în care s-au făcut notațiile:

$$2I_2 + I_m i_t^2 \eta_t = I_0, \qquad \left.\frac{\partial M_m(\omega_m)}{\partial\omega_m}\right|_0 = \mu_0.$$

Din (11) se obține

$$2\Delta\omega_{2r} = \Delta\omega'_{2r} + \Delta\omega''_{2r}. \tag{11'}$$

Mai rămîne de stabilit ecuația în perturbații corespunzătoare funcționării diferențialului, adică plecînd de la ecuația (7). De data aceasta însă, nu se poate proceda prin diferențierea ecuației (7) și trecerea la creșteri finite, așa cum s-a procedat în celelalte situații, deoarece funcția $1 - 2D$ este discontinuă în origine (adică punctul ce definește mișcarea de bază) și deci nediferențiabilă.

Ecuația (7) constituie ecuația de mișcare a diferențialului în orice condiții. În cazul cînd diferențialul este blocat ecuația își păstrează valabilitatea, dar, întrucît $\omega'_{2r} = \omega''_{2r}$, funcția $1 - 2D$ poate lua orice valoare cuprinsă între $1-2K$ și $2K-1$. Este necesară deci încă o relație suplimentară care a fost dedusă în [4].

Deoarece în mișcarea de bază $\dot{\omega}'_{2r} = \dot{\omega}''_{2r} = \dot{\omega}_{2r} = 0$, rezultă că în ecuația (7) mărimile $\dot{\omega}'_{2r}$, $\dot{\omega}''_{2r}$, $\dot{\omega}_{2r}$ reprezintă chiar creșterile variabilelor respective. În schimb X_2 și M_{ru2}, la un moment dat după producerea perturbației inițiale, vor reprezenta atît mărimile din mișcarea de bază, cît și mărimile datorate perturbației. Adică

$$X_2 = X_{20} + \Delta X_2,$$
$$M_{ru2} = M_{ru20} + \Delta M_{ru2}. \tag{20}$$

Se va presupune pentru fixarea ideilor că $\omega'_{2r} > \omega''_{2r}$. Situația este asemănătoare și în cazul cînd $\omega'_{2r} < \omega''_{2r}$, numai că trebuie avută în vedere valoarea funcției $1 - 2D$. Dacă se mai ține seama că în regimul de bază $X'_2 = X''_2$, ecuația de funcționare a diferențialului în perturbații se scrie :

$$I_r\Delta(\dot{\omega}'_{2r} - \dot{\omega}''_{2r}) + r_{d_2}\Delta(X'_2 - X''_2) = 2I_r(1 - 2K)\,\Delta\dot{\omega}_{2r} + r_{d_2}(1 - 2K)\,\Delta X_2 + \\ + (1 - 2K)\,\Delta M_{ru2} + r_{d_2}(1 - 2K)\,X_{20} + (1 - 2K)\,M_{ru20}. \tag{21}$$

Plecînd de la ecuațiile (3) din [4] (scrise în perturbații), (19) și (21) și ținîndu-se seamă de relațiile (11), (17), (18′), (18″) și (20) se elimină ΔX_2, $\Delta\dot{X}_2$, $\Delta\omega_{2r}$, $\Delta\dot{\omega}_{2r}$, $\Delta(X'_2 - X''_2)$ și se obțin, în final, ecuațiile în perturbații ale automobilului cu diferențialul deblocat :

$$\Delta\dot{\alpha} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\Delta\alpha + \frac{a_{13}}{a_{11}}\Delta\omega = 0,$$

$$\Delta\dot{\omega} + \frac{a_{22}}{a_{21}}\Delta\alpha + \left(\frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{0{,}5\,B_2^2}{a_{21}\omega_{2r}}\right)\Delta\omega - \frac{0{,}50\,B_2 v}{\lambda a_{21}\omega_{2r}^2}\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}) = 0,$$

$$I_r\Delta(\dot{\omega}'_{2r} - \dot{\omega}''_{2r}) - I_r(1 - 2K)\frac{\lambda m\omega_{2r}}{r_2}\cdot\Delta\ddot{v} - \left[I_r(1 - 2K)\frac{2\lambda k_{x0}\omega_{2r}v}{r_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2I_r(1 - 2K)}{r_2} + r_{d_2}(1 - 2K)\,m\right]\Delta\dot{v} - I_r(1 - 2K)\frac{\lambda k_x\omega_{2r}}{r_2}\cdot v^2\Delta\dot{\alpha} +$$
$$+ \frac{r_{d_2}v}{\lambda\omega_{2r}^2}\cdot\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}) - \frac{r_{d_2}B_2}{\lambda\omega_{2r}}\cdot\Delta\omega - r_{d_2}(1 - 2K)\,k_x v^2\Delta\alpha -$$
$$- 2r_{d_2}(1 - 2K)\,k_{x0}v\Delta v = f(1 - 2K)\,r_{d_2}(\Delta Z_1 + \Delta Z_2) +$$
$$+ (1 - 2K)\,r_{d_2}(k_{x0}v^2 + fZ_1 + fZ_2), \tag{22}$$

$$\frac{0{,}5m\lambda I_0 v}{r_2^2}\cdot\Delta\ddot{v} + \left(\frac{\lambda I_0 k_{x0}v^2}{r_2^2} + mr_{d_2} + \frac{I_0}{r^2} - \frac{0{,}5\,m\lambda\mu_0 v}{r_2^2}\right)\Delta\dot{v} +$$
$$+ \left(2k_{x0}r_d v - \frac{\mu_0 i_t}{r_2} - \frac{\lambda k_{x0}\mu_0 v^2}{r_2^2}\right)\Delta v + \frac{0{,}5\,\lambda I_0 k_x v^3}{r_2^2}\Delta\dot{\alpha} -$$
$$- \left(\frac{0{,}5\,k_x\lambda\eta_0 v^3}{r_2^2} - r_{d_2}k_x v^2\right)\Delta\alpha = f(r_{d_1}\Delta Z_2 + r_{d_2}\Delta Z_1) - \frac{0{,}5\,f\lambda I_0 v\Delta\dot{Z}_1}{r_2^2},$$

în care s-au făcut următoarele notații :

$$a_{11} = mv\,; \quad a_{12} = k_y v^2 + m\dot{v} + c_1 + c_2\,; \quad a_{13} = mv + \frac{ac_1 - bc_2}{v},$$

$$a_{14} = -c_1\,; \quad a_{21} = I_z, \quad a_{22} = -(c_{m_1} + c_{m_2} + nc_1) + ac_1 + k_{mz}v^2 + \frac{c_1 B_1 \nu}{2}, \tag{22'}$$

$$a_{23} = \frac{a^2 c_1 + b^2 c_2}{v} + \frac{bc_{m_2} - a(c_{m_1} + nc_1)}{v} + \frac{c_1 a B_1 \nu}{2v},$$

$$a_{24} = c_{m_1} + n_{c_1} - a_{c_1} - \frac{2c_1 B_1 \nu}{2}, \quad r_2 = r_{20} - 0{,}5\,\lambda X_2.$$

În urma unei analize mai amănunțite [5] se constată că termenii care conțin pe ΔZ_1, ΔZ_2 și $\Delta \dot{Z}_1$ se pot scrie în funcție de $\Delta\ddot{v}$, $\Delta\dot{v}$, $\Delta\dot{\alpha}$ și $\Delta\alpha$. Coeficienții acestor variabile sînt foarte mici în comparație cu coeficienții acelorași variabile din primii membrii ai relațiilor (22). De aceea se vor neglija termenii ce conțin pe ΔZ_1, ΔZ_2 și $\Delta \dot{Z}_1$.

3. STUDIUL STABILITĂȚII MIȘCĂRII

Ținînd seamă de observația făcută, în cele patru ecuații (22) intră patru variabile : $\Delta\alpha$, $\Delta\omega$, $\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r})$ și Δv.

Examinînd ecuațiile (22) se constată că ecuația a doua conține pe $\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r})$, care, la rîndul ei, este dependentă de variațiile vitezei prin intermediul ecuației a treia. Astfel, în cazul general, cele patru ecuații nu pot fi separate una de cealaltă. Se observă, însă, că dacă k_x este nul, atunci ecuația ultimă din (22) nu conține decît o singură necunoscută Δv. Prin urmare, în această situație, variațiile de viteză sînt independente față de variațiile celorlalte mărimi și sistemul de mai sus poate fi redus la studiul unui sistem de trei ecuații și, separat, încă la o ecuație de ordinul al doilea. În felul acesta problema se simplifică într-o măsură însemnată.

Se ridică întrebarea dacă nu cumva influența lui k_x este mică, astfel încît, chiar cînd el nu se anulează, să se poată simplifica studiul sistemului (22) în modul arătat mai sus.

3.1. CAZUL ROȚILOR RIGIDE TANGENȚIAL

Pentru a studia influența lui k_x asupra stabilității se va trata cazul particular cînd pneurile au rigiditatea tangențială foarte mare, întrucît în aceste condiții sistemul (22) se simplifică, permițînd examinarea stabilității fără a fi necesare calcule prea complicate.

Ecuațiile de mișcare pentru acest caz nu pot fi însă deduse direct din (22) făcînd $\lambda = 0$, întrucît unii termeni conțin pe λ la numitor; ar rezulta valori infinite, ceea ce nu ar avea sens. Se observă că λ apare la numitor numai în ecuația a doua și în ecuația a treia prin intermediul termenilor

$$\frac{v}{\lambda\omega_{2r}^2} \cdot \Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}) - \frac{B_2}{\lambda\omega_{2r}} \cdot \Delta\omega.$$

Dacă se consideră cei doi termeni ca o variabilă, atunci ea se elimină între cele două ecuații care o conțin, lucru care nu prezintă dificultăți. În felul acesta, se poate particulariza punînd $\lambda = 0$. S-au obținut astfel trei ecuații, iar numărul necunoscutelor a rămas patru. Mai este necesară o relație pentru a elimina pe $\Delta(\dot{\omega}'_{2r} - \dot{\omega}''_{2r})$. Pentru aceasta se utilizează relația (9), în care se pune $\lambda = 0$ și se consideră, ca și pînă acum, că $r'_{20} = r''_{20}$ Relația astfel obținută se derivează în raport cu timpul și apoi se trece la scrierea ei sub forma de perturbații. Rezultă

$$\Delta(\dot{\omega}'_{2r} - \dot{\omega}''_{2r}) = \frac{B_2}{r_{20}} \Delta\dot{\omega}. \tag{23}$$

Eliminarea celei de a patra variabile rezultă imediat. Se mai observă că în ecuația care rezultă în urma eliminării figurează și $\Delta\dot{v}$. Pentru ca sistemul să aibă forma normală, se explicitează $\Delta\dot{v}$ din cea de a patra ecuație (22) (după ce s-a pus $\lambda = 0$) și se introduce în ecuația de mai înainte.

După efectuarea tuturor calculelor se obține următorul sistem de ecuații al perturbațiilor induse pentru cazul cînd rigiditatea tangențială a pneurilor este foarte mare (diferențialul deblocat)

$$\begin{aligned} &\Delta\dot{\alpha} + b_{11}\Delta\alpha + b_{12}\Delta\omega = 0, \\ &\Delta\dot{\omega} + b_{21}\Delta\alpha + b_{22}\Delta\omega + b_{23}\Delta v = b_{20}, \\ &\Delta\dot{v} + b_{31}\Delta\alpha + b_{32}\Delta v = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

în care coeficienții au următoarele expresii:

$$b_{11} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad b_{12} = \frac{a_{13}}{a_{11}},$$

$$b_{21} = \frac{1}{1 + \dfrac{0{,}5 I_r B_2^2}{a_{21} r_{20}^2}} \cdot \left[\frac{a_{22}}{a_{21}} - \rho v^2 (1 - 2K)\right], \quad b_{22} = \frac{a_{23}}{a_{21}\left(1 + \dfrac{0{,}5 I_r B_2^2}{a_{21} r_{20}^2}\right)},$$

$$b_{23} = \frac{(1-2K)\left(\dfrac{2 I_r B_2}{a_{21} r_{20}^2} + \dfrac{0{,}5\, B_2 m}{a_{21}}\right)}{1 + \dfrac{0{,}5\, I_r B_2^2}{a_{21} r_{20}^2}} \cdot \frac{2 r_{d_2} k_{x0} v - \dfrac{\mu_0 i_t}{r_{20}}}{\dfrac{I_0}{2 r_{20}} + m r_{20}},$$

$$b_{20} = \frac{0{,}5B_2(1-2K)(k_{x0}v^2 + fZ_1 + fZ_2)}{a_{21}\left(1 + \dfrac{0{,}5\,B_2^2 I_r}{a_{21}\,r_{20}^2}\right)},$$

$$b_{31} = \frac{r_{d_2}\,k_x v^2}{\dfrac{I_0}{r_{20}} + mr_{20}}; \quad b_{32} = \frac{2r_{d_2}\,k_{x0}\,v - \dfrac{\mu_0 i_t}{r_{20}}}{\dfrac{I_0}{r_{20}} + mr_{20}},$$

cu notațiile

$$\rho = -\frac{0{,}25\,B_2 k_x}{a_{21}} + \left(\frac{2I_r\,B_2}{a_{21}\,r_{20}^2} + \frac{0{,}5\,B_2\,m}{a_{21}}\right)\cdot\frac{r_{20}\,k_x}{\dfrac{I_0}{r_{20}} + mr_{20}}, \quad r_{20} = r_{d_2}.$$

După cum se constată, sistemul (24) este un sistem liniar cu coeficienți constanți, neomogen. Să examinăm întîi soluția paticulară a acestui sistem.

Se găsește ușor că soluția particulară a sistemului este

$$(\Delta\alpha)_p = 0, \quad (\Delta\omega)_p = \frac{b_{20}}{b_{22}}, \quad (\Delta v)_p = 0. \tag{25}$$

Din modul cum s-a definit coeficientul de blocare rezultă

$$K > 0{,}50, \quad 1 - 2K < 0.$$

Dacă se ține seamă că $a_{21} > 0$ și $a_{23} > 0$, rezultă că $b_{20} < 0$ și $b_{22} > 0$. Prin urmare

$$(\Delta\omega)_p < 0.$$

Avîndu-se în vedere că $\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}) = B_2\Delta\omega/r_{20}$, rezultă

$$(\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}))_p < 0. \tag{26}$$

Însă ecuațiile (24) sînt scrise în ipoteza că $\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}) > 0$. Așadar, din (26) se deduce că termenul b_{20} are efect de blocare a diferențialului întrucît contribuie la schimbarea semnului diferenței $\omega'_{2r} - \omega''_{2r}$. Este posibil fie ca diferențialul să rămînă blocat, fie ca să se deblocheze, astfel că $\omega'_{2r} - \omega''_{2r} < 0$. Bineînțeles, ultima situație poate fi tot așa de bine provocată chiar de către perturbațiile inițiale propriu-zise.

Este evident că, din motive de simetrie, cazurile $\omega'_{2r} - \omega''_{2r} > 0$ și $\omega'_{2r} - \omega''_{2r} < 0$ sînt echiprobabile, iar comportările la stabilitate în cele două situații sînt identice. De asemenea, și în cazul cînd $\omega'_{2r} - \omega''_{2r} < 0$, termenul liber din sistemul în perturbații prezintă același efect ca mai sus.

Din cele arătate rezultă că termenul b_{20} are un efect stabilizator (diferențialul blocat îmbunătățește stabilitatea), astfel că, pentru studiul stabilității, în continuare se va examina sistemul în perturbații fără termenul liber.

Valorile proprii ale matricei coeficienților sistemului (24) sînt date de ecuația

$$\begin{vmatrix} -b_{11}-\xi & -b_{12} & 0 \\ -b_{21} & -b_{21}-\xi & -b_{23} \\ -b_{31} & 0 & -b_{32}-\xi \end{vmatrix} = 0,$$

care se mai scrie

$$\xi^3 + (b_{11}+b_{21}+b_{32})\xi^2 + [b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{32}(b_{11}+b_{21})]\xi + \\ + b_{12}b_{31}b_{23} + b_{32}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0. \tag{27}$$

Condițiile de stabilitate rezultă din aplicarea criteriului Routh-Hurwitz, care conduce la

$$b_{11}+b_{22}+b_{32}>0,\ b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{32}(b_{11}+b_{22})>0,$$
$$b_{12}b_{31}b_{23} + b_{32}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})>0,$$
$$(b_{11}+b_{22}+b_{32})[b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{32}(b_{11}+b_{22})] > b_{12}b_{31}b_{23} + \\ + b_{32}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}). \tag{28}$$

Din analiza expresiilor coeficienților, se constată că $b_{12}>0$ pentru $v>\sqrt{-\frac{ac_1-bc_2}{m}}$. Prin calcule numerice se verifică direct că inegalitatea precedentă este satisfăcută pentru vitezele care prezintă interes studiul stabilității. De asemenea, mai rezultă

$$b_{11}>0,\ b_{22}>0,\ b_{23}<0,\ b_{32}>0.$$

Ultimele două inegalități sînt satisfăcute întotdeauna pentru vitezele automobilului cărora le corespund puncte de funcționare pe caracteristica motorului în dreapta momentului motor maxim, întrucît în acest domeniu $\mu_0<0$.

Din inegalitățile de mai sus rezultă

$$b_{12}b_{31}b_{23}<0. \tag{29}$$

Pentru că inegalitatea a treia din (28) să fie satisfăcută înseamnă că neapărat trebuie îndeplinită inegalitatea

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}>0. \tag{30}$$

Această inegalitate atrage după sine satisfacerea inegalității a doua (28), iar prima inegalitate se observă că este întotdeauna satisfăcută.

Desfăcînd parantezele în ultima inegalitate (28) și reducînd termenii, se ajunge la următoarea formă:

$$(b_{11}+b_{22})(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})+(b_{11}+b_{22})^2\,b_{32}+b_{32}^2(b_{11}+b_{22})>b_{12}b_{31}b_{23}.$$

Întrucît trebuie satisfăcută condiția (30) rezultă că membrul din stînga al inegalității precedente este pozitiv. Dacă se are în vedere (30), rezultă că inegalitatea de mai sus este întotdeauna satisfăcută.

Așadar, condițiile de stabilitate se reduc la cea de a treia inegalitate din (28).

Se va examina detaliat această condiție presupunînd că $k_y = k_{mz} = 0$. Ținîndu-se seama de expresiile coeficienților respectivi, după simplificări și transformări potrivite, inegalitatea amintită se scrie într-o primă formă astfel:

$$m\rho I_z(1-2K)v^4+[\rho I_z(ac_1-bc_2)(1-2K)-m(ac_1-bc_2-c_m)]\,v^2+L^2c_1c_2+$$

$$+L(c_1c_{m_2}-c_2c_{m_1})+(mv^2+ac_1-bc_2)\rho' v^2\left(2r_{d_2}k_{x0}v-\frac{\mu_0 i_t}{r_{20}}\right)(1-2K)>0,$$

în care

$$\rho'=\frac{r_{d_2}k_x}{\left(\dfrac{I_0}{r_{d_2}}+mr_{d_2}\right)^2}\cdot\frac{2I_r B_2}{r_{20}r_{d_2}}+0{,}5\,B_2m. \tag{31}$$

După desfacerea parantezelor și ordonarea în raport cu v, rezultă forma finală

$$\begin{aligned}&2m\rho' r_{d_2}k_x(1-2K)v^5+m\rho I_z(1-2K)v^4+\\&+\left[2\rho' r_{d_2}k_{x0}(ac_1-bc_2)-\frac{m\rho'\mu_0 i_t}{r_{20}}\right](1-2K)v^3+\\&+[\rho I_z(1-2K)(ac_1-bc_2)-m(ac_1-bc_2-c_m)]v^2-\\&-(ac_1-bc_2)\frac{\rho'\mu_0 i_t}{r_{20}}(1-2K)v+L^2c_1c_2+L(c_1c_{m_2}-c_2c_{m_1})>0.\end{aligned} \tag{32}$$

Se observă că dacă în inegalitatea precedentă se face $k_x = 0$ se ajunge la condiția de stabilitate din cazul cunoscut din literatură, adică al diferențialului obișnuit. Deci, diferențialul autoblocabil afectează stabilitatea prin intermediul lui k_x.

Din [1] se constată că pentru unghiuri de insuflare (care în cazul de față sînt chiar α) care nu depășesc 4°, la majoritatea automobilelor, $k_x = 0$ (sau foarte mici). Astfel, din cele 18 tipuri de automobile exami-

nate în lucrarea amintită, numai trei tipuri prezintă $k_x \neq 0$ în intervalul de unghiuri arătat. Pentru unghiuri mai mari decît 4^0 toate automobilele au $k_x \neq 0$. Totuși, pentru a aprecia influența sa asupra stabilității, în exemplul numeric care urmează se va lua pentru k_x valoarea maximă pe care o au autoturismele.

Pentru exemplificare se va considera un autoturism de clasă mijlocie, ale cărui caracteristici sînt :

$m = 163\ \text{kgf} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2$, $I_z = 250\ \text{kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$, $I_m = 0{,}025\ \text{kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$,

$I_r = 0{,}10\ \text{kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$, $c_1 = c_2 = 3\,500\ \text{kgf} \cdot \text{rad}^{-1}$, $L = 2{,}7\ \text{m}$,

$a = 0{,}55\ L$, $b = 0{,}45\ L$, $r_{20} = 0{,}294\ \text{m}$, $k_x = 0{,}042\ \text{kgf} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2 \text{rad}^{-1}$,

$i_l = 4{,}30 \times 1{,}65 = 7{,}1$. $\eta_l = 0{,}92$, $\mu_0 = -1{,}54 \cdot 10^{-2} \text{kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$,

$K = 0{,}70$.

Întrucît viteza critică în cazul cînd automobilul are diferențial normal este sub 100 km/h, s-a presupus că automobilul se află în treapta de viteză imediat inferioară prizei directe. Alegerea mărimilor caracteristice de mai sus s-a făcut prin asimilare cu diferite tipuri de autoturisme pentru care există indicații în literatură.

În privința alegerii lui μ_0 se dau amănunte în [5].

În urma efectuării tuturor calculelor numerice, inegalitatea (32) devine

$$1{,}02 \cdot 10^{-3} v^5 + 3{,}1 \cdot 10^{-2} v^4 + 0{,}42 \cdot 10^{-2} v^3 + \underline{12{,}46 \cdot 10^4 v^2} +$$

$$+1{,}432 \cdot 10^{-2}\, v - \underline{8{,}97 \cdot 10^7} > 0. \qquad (33)$$

Pentru a determina viteza critică trebuie rezolvată ecuația care rezultă din anularea primului membru al inegalității (33). Termenii subliniați din inegalitatea de mai sus constituie tocmai termenii ce alcătuiesc condiția de stabilitate în cazul diferențialului obișnuit. Dacă se aplică teorema lui Descartes ecuației care dă viteza critică, rezultă că ea nu are decît o singură rădăcină pozitivă. Și cum toți termenii care se adaugă celor subliniați sînt pozitivi, rezultă că viteza critică în cazul diferențialului autoblocabil este mai mică decît cea cu diferențial normal. Această afirmație are un caracter general, întrucît, dacă $\mu_0 < 0$, $ac_1 - bc_2 > 0$, ecuația aferentă inegalității (32) are aceleași proprietăți ca și ecuația aferentă inegalității (33), lucru care se verifică ușor.

Pentru automobilul cu diferențial normal rezultă viteza critică $v_{cro} = 26{,}70\ \text{m.s}^{-1}$. O verificare simplă arată că viteza critică în cazul diferențialului autoblocabil este mai mare decît $26{,}30\ \text{m.s}^{-1}$. Variația de viteză critică este sub 1,5 %, deci foarte mică.

Prin urmare se poate conchide că influența lui k_x asupra stabilității, în cazul roților rigide tangențial, este mică, chiar atunci cînd coeficientul de blocare al diferențialului este mare (așa cum s-a considerat în exemplul numeric). De asemenea, trebuie avut în vedere că pentru k_x a fost adoptată o valoare foarte mare.

3.2. CAZUL ROȚILOR ELASTICE TANGENȚIAL

Din cele de mai sus, avînd în vedere și faptul că pentru unghiurile α mici k_x este foarte mic sau, de cele mai multe ori, chiar nul, apare ca îndreptățită ipoteza că și în cazul roților elastice tangențial influența lui k_x asupra stabilității mișcării este de mică importanță. De aceea, în continuare nu se va ține seama de k_x. În ecuațiile (22) se va pune $k_x = 0$. În această situație, așa cum s-a mai arătat, ultima ecuație este independentă de primele trei. Sistemul format din primele trei ecuații se scrie :

$$\begin{aligned}
&\Delta\dot{\alpha} + C_{11}\Delta\alpha + C_{12}\Delta\omega = 0,\\
&\Delta\dot{\omega} + C_{21}\Delta\alpha + C_{22}\Delta\omega + C_{23}\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}) = 0,\\
&\Delta(\dot{\omega}'_{2r} - \dot{\omega}''_{2r}) + C_{31}\Delta\omega + C_{32}\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r}) =\\
&\qquad = \Phi(\Delta\ddot{v}, \Delta\dot{v}, \Delta v)(1 - 2K) + C_{30},
\end{aligned} \tag{34}$$

în care $\Phi(\Delta\ddot{v}, \Delta\dot{v}, \Delta v)$ este o funcție cunoscută de variabilele respective. Coeficienții sistemului (34) sînt determinați de următoarele expresii (se ține seamă că $v = r_2\omega_{2r}$) :

$$\begin{aligned}
&C_{11} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad C_{12} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad C_{21} = \frac{a_{22}}{a_{21}}, \quad C_{22} = \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{0{,}5\, B_2^2 r_2}{\lambda a_{21} v},\\
&C_{23} = -\frac{0{,}50\, B_2 r_2^2}{a_{21}\lambda v}, \quad C_{31} = -\frac{B_2 r_{d_2} r_2}{I_r \lambda v}, \quad C_{32} = \frac{r_{d_2} r_2^2}{I_r \lambda v},\\
&C_{30} = \frac{(1 - 2K) r_{d_2} r_2 (k_{x0} v^2 + fZ_1 + fZ_2)}{I_r \lambda v}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Ultima ecuație (34) este o ecuație diferențială de ordinul doi, cu coeficienți constanți ($k_x = 0$). Deci, cînd sînt date condițiile inițiale, Δv, $\Delta\dot{v}$ și $\Delta\ddot{v}$ sînt funcții de timp determinate. Din condiția de stabilitate pentru această ecuație rezultă că

$$\lim_{t\to\infty} \Delta\ddot{v} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \Delta\dot{v} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \Delta v = 0. \tag{36}$$

Dacă se examinează funcție $\Phi(\Delta\ddot{v}, \Delta\dot{v}, \Delta v)$ se constată că ea este o combinație liniară în variabilele $\Delta\ddot{v}$, $\Delta\dot{v}$ și Δv. Rezultă că

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(\Delta\ddot{v}, \Delta\dot{v}, \Delta v) = 0. \tag{37}$$

Componenta soluției particulare a sistemului (34) datorate numai lui C_{30}, în cazul variabilei $\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r})$ se scrie

$$\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r})_p = \frac{C_{30}C_{11}}{C_{32}(C_{11}C_{32} - C_{21}C_{12}) - C_{32}C_{31}C_{23}}.$$

În cazul cînd soluția sistemului omogen aferent sistemului (34) este stabilă se deduce, din analiza expresiei precedente, că $\Delta(\omega'_{2r} - \omega''_{2r})_p < 0$ (pentru justificare a se vedea inegalitatea a doua din (39) și inegalitatea $C_{11} > 0$). Deci, la fel ca la sistemul (24), termenul C_{30} are efect stabilizator și astfel se va studia stabilitatea sistemului (34) fără acest termen liber.

Apoi, în continuare se va recurge la sistemul care se obține prin neluarea în considerare a funcției $(1 - 2K)\Phi$. În acest caz însă, se va studia stabilitatea sistemului astfel obținut la perturbații permanente.

Din proprietățile funcției Φ arătate mai sus se deduce că sînt îndeplinite condițiile impuse de teorema lui I. G. Malkin [3]. Prin urmare, stabilitatea uniform asimptotică a sistemului simplificat implică stabilitatea uniform asimptotică a sistemului (34).

Valorile proprii ale matricei coeficienților variabilelor sistemului (34) sînd date de ecuația secular ă:

$$\begin{vmatrix} -C_{11}-\xi & -C_{12} & 0 \\ -C_{21} & -C_{22}-\xi & -C_{23} \\ 0 & -C_{31} & -C_{32}-\xi \end{vmatrix} = 0,$$

care se mai scrie

$$\xi^3+(C_{11}+C_{22}+C_{32})\xi^2+[C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}-C_{23}C_{31}+C_{32}(C_{11}+C_{22})]\xi+$$
$$+C_{32}(C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21})-C_{11}C_{23}C_{31}=0. \tag{38}$$

Condițiile de stabilitate Routh-Hurwitz se scriu:

$$\begin{gathered} C_{11}+C_{22}+C_{32}>0,\ C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}-C_{23}C_{31}+C_{32}(C_{11}+C_{22})>0. \\ C_{32}(C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21})-C_{11}C_{23}C_{31}>0, \\ (C_{11}+C_{22}+C_{32})[C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}-C_{23}C_{31}+C_{32}(C_{11}+C_{22})]> \\ >C_{32}(C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21})-C_{11}C_{23}C_{31}. \end{gathered} \tag{39}$$

Din analiza expresiilor coeficienților sistemului, rezultă că întotdeauna sînt satisfăcute inegalitățile:

$$C_{11} > 0,\ C_{23}C_{31} > 0,\ C_{22} > 0,\ C_{32} > 0. \tag{39'}$$

Din inegalitățile (39') rezultă că

$$C_{11}C_{23}C_{31} > 0.$$

Dacă se ține seamă de inegalitatea de mai sus rezultă că pentru a fi satisfăcută inegalitatea a treia (39) trebuie ca

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} > 0. \tag{40}$$

Ultimii doi termeni din inegalitatea a doua (39) se mai scriu

$$-C_{23}C_{31} + C_{32}(C_{11} + C_{22}) = C_{32}\left(C_{11} + \frac{a_{23}}{a_{21}}\right) + C_{32}\frac{0{,}5\,B_2^2 r_2}{a_{21}\lambda v} - C_{23}C_{31}.$$

Exprimînd coeficienții prin relațiile (35) rezultă

$$C_{23}C_{31} + C_{32}(C_{11} + C_{22}) = C_{32}\left(C_{11} + \frac{a_{23}}{a_{21}}\right).$$

Întrucît $a_{23} > 0$, ultima expresie este întotdeauna pozitivă. Așadar, cînd este satisfăcută condiția (40), inegalitatea a doua (39) este și ea îndeplinită. În ce privește prima inegalitate (39), este evident că ea va fi satisfăcută întotdeauna.

Ultima inegalitate din (39) se mai scrie

$$(C_{11} + C_{22})(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) + C_{22}[C_{32}(C_{11} + C_{22}) - C_{23}C_{31}] +$$

$$+ C_{11}C_{32}(C_{11} + C_{22}) + C_{32}[(C_{11} + C_{22}) - C_{23}C_{31}] > 0.$$

Dacă este îndeplinită condiția (40) inegalitatea precedentă este satisfăcută, întrucît toți ceilalți termeni sînt pozitivi (se are în vedere (39)).

Prin urmare, condițiile de stabilitate se reduc la una singură și anume la inegalitatea a treia din (39). Această condiție se mai scrie

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} > C_{11}\cdot\frac{C_{23}C_{31}}{C_{32}}$$

sau, încă, ținînd seamă de (35),

$$C_{11}\left(\frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{0{,}5\,B_2^2 r_2}{a_{21}\lambda v}\right) - C_{12}C_{21} > C_{11}\frac{0{,}5\,B_2^2 r_2}{a_{21}\lambda v}.$$

În final se obține

$$a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} > 0. \tag{41}$$

Se verifică ușor că inegalitatea (41) exprimă condiția de stabilitate a automobilului cu diferențial normal (verificarea se poate face considerînd primele două ecuații (3) din [4] în care se pune $X_2' = X_2''$).

Prin urmare, pentru viteze mai mici decît viteza critică corespunzătoare automobilului cu diferențial normal, mișcarea aceluiași automobil, dar cu diferențial autoblocabil care funcționează (sub efectul perturbațiilor), este sigur stabilă.

În cazul cînd se depășește această viteză, sistemul (34) este instabil, adică cel puțin una din rădăcinile ecuației sale caracteristice are partea reală pozitivă. În cazul de față, însă, în aceste condiții nu poate fi trasă concluzia că mișcarea propriu-zisă a automobilului ar fi sigur instabilă. Într-adevăr, ecuațiile precedente au fost deduse în ipoteza că $\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'') > 0$ (mai precis, ecuația (21). Dacă are loc condiția de instabilitate de mai sus înseamnă că $|\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'')|$ va crește în timp, chiar dacă pentru un interval finit de timp ar putea să scadă. Condiția de instabilitate, după cum este cunoscut, nu face nici un fel de precizare cu privire la semnul variabilei respective (în cazul de față este $\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'')$), chiar dacă perturbația inițială este pozitivă. Dacă $\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'')$ are numai valori pozitive, atunci, în condițiile de mai sus, mișcarea este sigur instabilă. Dacă, însă, pentru anumite intervale de timp $\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'')$ tinde să ia valori negative, atunci diferențialul se blochează și ecuațiile de mișcare sînt altele. În aceste condiții mișcarea este stabilă. În general, posibilitatea ca $\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'')$ să se anuleze există atît în cazul instabilității cu rădăcini reale pozitive (instabilitate divergentă), cît și în cazul cu rădăcini complex conjugate cu partea reală pozitivă (instabilitate oscilatorie).

Așadar, pentru a hotărî dacă mișcarea automobilului este instabilă în condițiile de mai sus ar trebui o examinare suplimentară a posibilității ca $\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'')$ să se anuleze.

Dacă se notează cu ξ_1, ξ_2 și ξ_3 rădăcinile ecuației caracteristice (38), se poate scrie

$$\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'') = C_1 e^{\xi_1 t} + C_2 e^{\xi_2 t} + C_3 e^{\xi_3 t} + \Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'') p$$

în care $C_i (i = 1, 2, 3)$ sînt funcții de coeficienții sistemului (34) (considerat fără funcția Φ) și de condițiile inițiale ale celor trei variabile. Expresiile care se obțin sînt destul de complicate, ceea ce îngreunează mult studiul în cazul general. În plus, valorile inițiale ale variabilelor sînt arbitrare și în general necunoscute; de asemenea, nu se cunoaște vreo relație între ele *). De aici rezultă că, practic, problema stabilirii semnului variabilei $\Delta(\omega_{2r}' - \omega_{2r}'')$ nu se poate rezolva sub forma generală.

---

*) Dacă se consideră ecuația $\dot{x} - px = -q$, unde p și q sînt niște constante pozitive și dacă x_0 este valoarea inițială a lui x, atunci soluția acestei ecuații se scrie $x = \left(x_0 - \frac{q}{p}\right) e^{pt} + \frac{q}{p}$. Presupunînd că $x_0 > 0$, x va trece prin zero numai dacă $x_0 < \frac{q}{p}$. Așadar sînt impuse anumite condiții perturbațiilor inițiale.

Prin urmare, pentru viteze mai mari decît viteza critică corespunzătoare automobilului cu diferențial normal, mișcarea aceluiași automobil, dar cu diferențial autoblocabil care funcționează (sub efectul perturbațiilor), ar putea deveni instabilă. În consecință, este necesar ca deblocarea diferențialului să fie evitată. Lucrul acesta este posibil prin alegerea corespunzătoare a coeficientului de blocare al diferențialului. Valoarea sa trebuie să fie suficient de mare încît sub efectul perturbațiilor să nu se deblocheze.

În continuare se va considera cazul particular al diferențialului normal ideal, pentru care $K = 0{,}5$. Particularizînd ecuațiile (22) și presupunînd că $k_{\varphi} \neq 0$, se obține tocmai sistemul (34) în care însă $\Phi \equiv 0$ și $C_{30} = 0$; ecuația a patra din sistemul (34) rămîne neschimbată, dar este independentă de restul ecuațiilor în sensul în care s-a mai discutat. Rezultă că pentru studiul stabilității se utilizează sistemul (34), fără funcția Φ și C_{30}. Evident, acest studiu este identic cu cel făcut anterior, întrucît ecuația caracteristică este chiar (38). Prin urmare condiția de stabilitate este dată de inegalitatea (41). Or, aceeași condiție este obținută și în cazul cînd se studiază stabilitatea automobilului cu diferențial normal fără a se lua în considerare și ecuația de mișcare a diferențialului, așa cum se procedează curent în literatură (de fapt automobilul este considerat fără cale și, o dată cu aceasta, diferențialul este exclus). Cu acest prilej, s-a demonstrat riguros că modul simplificat de a se studia stabilitatea, fără a ține seamă și de dinamica diferențialului, este justificat.

De asemenea, mai rezultă încă un fapt interesant, și anume că în cazul diferențialului normal ideal elasticitatea tangențială a pneurilor și momentele de inerție ale roților n-au nici o influență asupra stabilității automobilului. Cele de mai sus se referă propriu-zis la influența asupra vitezei critice. Însă asupra frecvenței proprii de oscilație a perturbațiilor precum și asupra amortizării lor mărimile de mai sus au influență, întrucît de ele depind rădăcinile ecuației (38). Această influență poate fi pusă în evidență pentru fiecare caz în parte : un studiu general este dificil de realizat. În fine, mai trebuie subliniat faptul că practic nu există diferențiale cu $K = 0{,}5$, ci cu valori mai mari. Dar, din punctul de vedere al stabilității, acest lucru constituie un avantaj.

4. CONCLUZII

Studiul efectuat în lucrarea de față a arătat că, pentru viteze mai mici decît viteza critică corespunzătoare automobilul cu diferențial normal, mișcarea rectilinie a aceluiași automobil, dar cu diferențial autoblocabil care funcționează (sub efectul perturbațiilor), este stabilă. În schimb, pentru viteze mai mari decît viteza critică menționată, mișcarea automobilului al cărui diferențial autoblocabil funcționează ar putea deveni instabilă. Pentru a preveni apariția instabilității trebuie ca valoarea coeficientului de blocare al diferențialului să fie suficient de mare.

De asemenea, s-a mai dovedit că în cazul automobilului cu diferențial normal funcționarea acestuia nu are nici o influență asupra vitezei critice a automobilului, aceasta nefiind afectată nici de elasticitatea tangențială a pneurilor, nici de momentele de inerție ale roților automobilului.

Notațiile principale folosite în lucrare

Indicele 1 se referă la puntea din față, iar indicele 2 la puntea din spate.

a — distanța de la centrul de greutate pînă la planul normal pe cale ce trece prin axa punții din față, m;

b — distanța de la centrul de greutate pînă la planul normal pe cale ce trece prin axa punții din spate, m;

L — ampatamentul, m;

B_i, $i = 1,2$ — calea roților, m;

n — distanța de la punctul de intersecție al pivotului cu calea pînă la dreapta ce trece prin centrul petei de contact a pneului și este perpendiculară pe planul longitudinal de simetrie al automobilului (roata se consideră nevirată), m;

R — raza de virare a automobilului, m;

$\bar{v}$ — viteza centrului de greutate al automobilului, $m.s^{-1}$;

α — unghiul de deviere dintre viteza $\bar{v}$ și axa longitudinală a automobilului, rad;

În continuare semnul „prim" se referă la roțile de pe partea dreaptă privind în sensul de mers al automobilului, iar semnul „secund" la roțile de pe partea stîngă.

r'_{20}, r''_{20} — razele libere de rulare ale roților din spate, m;

r'_2, r''_2 — razele de rulare ale roților din spate, m;

r'_{d_2}, r''_{d_2} — razele dinamice ale roților din spate, m;

v'_2, v''_2 — vitezele centrelor roților din spate, $m.s^{-1}$;

ν — unghiul de convergență al roților directoare, rad;

ω — viteza unghiulară a axei longitudinale a automobilului, $rad.s^{-1}$;

ω_{2r} — viteza unghiulară a casetei diferențialului, $rad.s^{-1}$;

ω'_{2r}, ω''_{2r} — vitezele unghiulare ale roților din spate, $rad.s^{-1}$;

ω_m — viteza unghiulară a arborelui cotit al motorului, $rad.s^{-1}$;

m — masa automobilului, $kgf.m^{-1}.s^2$;

I_r — momentul de inerție al unei roți motoare în raport cu axa ei de rotație, $kgf.m.s^2$ ·

I_m — momentul de inerție al pieselor cu mișcare de rotație ale motorului redus la axa de rotație a arborelui cotit, $kgf.m.s^2$;

I_z — momentul de inerție al automobilului în raport cu axa ce trece prin centrul de greutate și este normală pe cale, $kgf.m.s^2$;

X'_2, X''_2 — reacțiunea tangențială la roțile din spate, kgf;

X_2 — reacțiunea tangențială la puntea din spate, kgf;

Z_i, $i = 1, 2$ — reacțiunea la punte, normală pe cale, kgf;

Z'_2, Z''_2 — reacțiunile normale la roțile din spate, kgf;

M'_2, M''_2 — momentele aplicate la semiarborii planetari, kgf.m;

M'_{ru2}, M''_{ru2} — momentele de rezistență la rulare la roțile din spate, kgf.m;

M_{ru2} — momentul total de rezistență la rulare la puntea din spate, kgf.m;

M_m — momentul motor la arborele cotit, kgf.m;

c_i, $i = 1, 2$ — coeficientul de rezistență la deviere al punții, $kgf.rad^{-1}$;

c_{mi}, $i = 1, 2$ — coeficientul momentului stabilizator total, $kgf.m.rad^{-1}$;

k_{x0} — factorul aerodinamic pe direcția axei paralele cu calea ce trece prin centrul de greutate și este conținută în planul longitudinal de simetrie al automobilului, $kgf.m^{-2}.s^2$;

k_x, k_y — factorul de creștere a forței aerodinamice respectiv pe direcția axei precedente și pe direcția axei normale la aceasta, într-un plan paralel cu calea, $kgf.m^{-2}.s^2.rad^{-1}$;

k_{mz} — factorul de creștere a momentului aerodinamic în jurul axei ce trece prin centrul de greutate și este perpendiculară pe planul căii, $kgf.m^{-1}.s^2.rad^{-1}$;

λ — coeficientul elasticității tangențiale a pneului, $m.kgf^{-1}$;

f — coeficientul de rezistență la rulare;

i_t — raportul de transmitere al transmisiei automobilului;

η_t — randamentul transmisiei automobilului;

K — coeficientul de blocare al diferențialului;

Δ — creșterea unei anumite mărimi.

Punctul de deasupra unei litere desemnează derivata mărimii respective în raport cu timpul.

Primită la redacție la 15 decembrie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. R. Barth, *Luftkräfte an Kraftfahrzeug*, Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkehrstechnick, Heft 184, 1966.
2. B. S. Falkevici, *Teoriia avtomobilea*, Mașghiz, Moskva, 1963.
3. I. G. Malkin, *Teoriia usloicivosti dvijeniia*, Iz-vo Nauka, Moskva, 1966.
4. A. P. Stoicescu, *Contribuții la studiul stabilității automobilului cu diferențial autoblocabil*, St. cerc. mec. apl., (33, 1 (1974)).
5. — *Contribuții la studiul influenței reacțiunilor tangențiale la roți asupra stabilității și maniabilității automobilului*, Teză de doctorat, Institutul politehnic din București, 1971.

ASUPRA TERMOELASTODINAMICII SOLIDULUI CU MASĂ VARIABILĂ

de MIHAI BUCULEI
Universitatea din Craiova

În lucrare se indică modul de soluționare a problemelor de bază ale termoelastodinamicii solidului elastic cu masă variabilă, variația masei făcîndu-se prin captarea sau disipația particulelor pe suprafața limitrofă. Se stabilește o ecuație pentru variația temperaturii datorită variației masei. Ținînd cont de legea Fourier pentru conductibilitatea termică, se determină ecuația de propagare a căldurii în solid luînd în considerație și influența variației masei. În final se prezintă o aplicație de principiu pentru cazul unei bare cilindrice de lungime finită, pe a cărei suprafață laterală are loc o disipație sau captare de masă.

1. STABILIREA ECUAȚIILOR DE BAZĂ

Fie un solid elastic omogen și izotrop, care ocupă domeniul tridimensional D, fiind situat în cîmpul termic nestaționar exterior $T(p, t)$, dat în punctele $p \in \Sigma$, unde Σ este frontiera lui D. Se presupune că variația masei se face prin captarea sau prin disipația de particule materiale în mulțimi de puncte situate pe suprafața Σ. Variația masei se traduce atît prin modificarea cîmpului de temperaturi în punctele domeniului D, cît și prin existența unor forțe superficiale corespunzătoare. Rezultanta acestor forțe superficiale suplimentare se determină cu relația

$$\bar{T} = \sum_{(i)} \left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|_{P_i} \cdot \bar{V}_{ri} + \sum_{(j)} \iint_{(\sigma_j)} \left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|_{P} \cdot \bar{V}_r \Big|_P \cdot \mathrm{d}S_p, \tag{1}$$

în care primul termen se referă la captarea sau disipația de particule în puncte izolate ale lui Σ, iar cel de-al doilea termen se referă la același proces, însă în punctele porțiunilor continui disjuncte σ_j situate pe Σ. Menționăm că $\bar{V}_r$ este viteza relativă a particulelor în momentul disipării sau captării lor.

Ne vom ocupa în continuare de modificarea cîmpului de temperaturi datorită variației masei în felul arătat mai sus.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 317–324

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR

PROPOZIȚIA 1. Cîmpul de temperaturi T' datorit variației masei, în condițiile enunțate mai sus, satisface în punctele de disipare sau de captare ecuația liniară

$$\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \cdot T' + [i(T'_0) - s(T'_0) - k] \cdot \frac{1}{\left.\frac{\partial i}{\partial T'}\right|_{T'_0}} \cdot \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = 0, \tag{2}$$

unde

i reprezintă entalpia specifică,

s — entropia specifică,

k — raportul dintre potențialul chimic și masa molară,

t — timpul,

$T'_0 = T'(t_0)$ — temperatura inițială.

În ecuația (2) T', i, s, k, m sînt localizate în punctul $P \in \Sigma$ în care se face teoretic captarea sau disipația de particule.

Demonstrație. Fie $V_P \in V(P)$ o vecinătate suficient de mică a punctului $P \in \Sigma = FrD$ și $P' \in V_P \cap D$. Disipația sau captarea de particule, care se face teoretic în P, produce o modificare a cîmpului de temperaturi în $P' \in V_P \cap D$. Fie t_0 momentul în care este inițiat acest proces. Se face ipoteza că procesul este izobar, adică $\mathrm{d}p = 0$.

Principiul I al termodinamicii dă

$$\mathrm{d}I = T' \cdot \mathrm{d}S + k \cdot \mathrm{d}m, \tag{3}$$

unde

I este entalpia,

S — entropia.

Se poate scrie

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}i \cdot m + i \cdot \mathrm{d}m,$$

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}s \cdot m + s \cdot \mathrm{d}m.$$

Se presupune că $i(T')$ și $s(T')$ sînt funcții analitice în jurul lui T'_0. Dezvoltînd în serie Taylor în jurul lui T'_0 și păstrînd numai primii doi termeni se obține, înlocuind în (3), o ecuație neliniară în T'. Dacă se pune condiția ca starea inițială (t_0, T'_0) să fie o stare de echilibru termodinamic, cu $\left.\frac{\partial s}{\partial T'}\right|_{T'_0} = 0$, ecuația se liniarizează obținîndu-se (2) q.e.d.

Soluția ecuației (2) este

$$T'(P, t) = C \cdot \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{m}(u)}{m(u)} \cdot \mathrm{d}u\right] + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{s(T'_0)}{\left.\frac{\partial i}{\partial T'}\right|_{T'_0}} - \frac{i(T'_0)}{\left.\frac{\partial i}{\partial T'}\right|_{T'_0}} - \right.$$

$$\left. - \frac{k}{\left.\frac{\partial i}{\partial T'}\right|_{T'_0}}\right] \cdot \frac{\dot{m}(u)}{m(u)} \cdot \exp\left[-\int_{u}^{v} \frac{\dot{m}(v)}{m(v)} \cdot \mathrm{d}v\right] \cdot \mathrm{d}u, \tag{4}$$

unde C se determină din condiția inițială.

Cu condiţiile la limită oferite de propoziţia 1 se poate stabili cîmpul temperaturilor datorită variaţiei masei în orice punct din interiorul domeniului D, adică $T'(P, t)$ pentru orice $P \in \mathring{D}$.

În cele ce urmează se stabileşte ecuaţia propagării căldurii, ţinînd cont atît de cîmpul termic exterior, cît şi de cîmpul termic indus datorită variaţiei masei.

PROPOZIŢIA 2. Ecuaţia propagării căldurii pentru un solid cu masa variabilă în condiţiile de mai sus este dată de

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{M}{\lambda_0} \pm \nabla^2 T', \tag{5}$$

unde

$\varkappa$ reprezintă difuzivitatea de temperatură,

λ_0 — coeficientul de conductibilitate termică,

M — debitul punctual al izvoarelor interioare de căldură,

$T(P, t)$ — cîmpul temperaturilor.

Demonstraţie. Fie P un punct arbitrar din D şi V o vecinătate arbitrară a sa, adică geometric un volum arbitrar, astfel ca $P \in V \subset D$. Echilibrul debitelor de căldură scris pentru volumul V ia forma

$$\int_{(V)} c\rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \mathrm{d}V = \lambda_0 \cdot \iint_{(\Sigma_1)} \nabla T \cdot \mathrm{d}\bar{S} \pm \lambda_0 \iint_{(\Sigma_1)} \nabla T' \mathrm{d}\bar{S} + \int_{(V)} M \cdot \mathrm{d}V,$$

unde

c este căldura specifică,

ρ — densitatea,

Σ_1 — suprafaţa care delimitează volumul V.

Semnul $(+)$ se ia dacă fluxul de căldură datorit variaţiei de masă pătrunde în volumul V, iar semnul $(-)$ dacă fluxul iese.

Cu formula Ostrogradski-Gauss, ţinînd cont de arbitrarietatea lui V şi de continuitatea integrantului se obţine relaţia (5) q.e.d.

Se observă că în cazul absenţei surselor interioare, punînd $\square_3^2 = \nabla^2 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$, ecuaţia (5) se poate scrie şi sub forma

$$\square_3^2 T = \pm \nabla^2 T'. \tag{6}$$

Cîmpul temperaturilor fiind determinat prin rezolvarea ecuaţiei (5) cu condiţiile la limită corespunzătoare, se poate trece la rezolvarea problemei termoelastice. În cele ce urmează ne vom limita la problema necuplată. Soluţia problemei se obţine prin rezolvarea sistemului de ecuaţii

$$\mu \cdot \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{u}) - \gamma \cdot \nabla T = \rho \ddot{\bar{u}}, \tag{7}$$

$$\square_3^2 T = \pm \nabla^2 T',$$

unde

λ, μ reprezintă parametrii lui Lamé,

$\gamma = (2\lambda + 3\mu) \cdot \alpha_t$,

α_t — coeficientul de dilatare liniară,

$\bar{u}$ — deplasarea elastică.

Evident, ne-am limitat la cazul absenței surselor interioare de căldură

2. APLICAȚIE

Se consideră problema termoelastică necuplată pentru o bară cilindrică de lungime l și de rază a. Variația masei are loc pe suprafața laterală. Bara este supusă și unui cîmp termic exterior dat în punctele suprafeței laterale a barei, adică o condiție la limită de speța I. Se presupune că cele două baze ale barei cilindrice se mențin la o anumită temperatură dată.

Să determinăm cîmpul temperaturilor datorită variației masei, adică $T' = T'(r, z, t)$. Menționăm că $r \in [0\,;\, a]$, iar $z \in [0\,;\, l]$. Pentru aceasta se pornește de la ecuația corespunzătoare a propagării căldurii

$$\nabla^2 T' - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial T'}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Considerînd problema cu simetrie axială și aplicînd ecuației (8) transformata Laplace, se obține

$$\frac{\partial^2 \bar{T}'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{T}'}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{T}'}{\partial z^2} - \frac{1}{\varkappa} [p \cdot \bar{T}' - f(r, z)] = 0, \tag{8'}$$

unde

$$f(r, z) = T'(r, z, 0).$$

Aplicînd ecuației (8') transformata finită Hankel se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2 \bar{T}^{1*}}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2 \right) \cdot \bar{T}'^* = -a \cdot \alpha_n \cdot \bar{T}'(a, p, z) \cdot J_0'(a \cdot \alpha_n) + \frac{f^*(\alpha_n, z)}{\varkappa}, \tag{8''}$$

unde α_n sînt rădăcinile ecuației $J_0(a\alpha_n) = 0$, J_0 fiind funcția Bessel de prima speță și de ordinul zero.

Soluția ecuației (8'') este

$$\bar{T}'^*(\alpha_n, p, z) = C_1(p, \alpha_n) \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + C_2(p, \alpha_n) \times$$

$$\times \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + \Phi, \tag{9}$$

unde Φ este o soluție particulară a ecuației (8'') care depinde de forma funcțiilor $\bar{T}'(a, p, z)$ și $f(r, z)$.

Inversînd transformata Hankel se obține

$$\bar{T}' = \frac{2}{a^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_1(p, \alpha_n) \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + C_2(p, \alpha_n) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + \Phi \right] \cdot \frac{J_0(r\alpha_n)}{[J_0'(a\alpha_n)]^2}. \tag{10}$$

Remarcăm că $T'(a, p, z)$ se poate determina prin transformarea Laplace a soluției (4) pentru un caz concret de variație a masei, cu condiții inițiale precizate.

Să determinăm cîmpul temperaturilor $T(r, z, t)$. Prin aplicarea succesivă a transformatei Laplace, a transformatei finite Hankel și ținînd cont de (8), ecuația (5) se transformă în ecuația ordinară

$$\frac{\mathrm{d}^2 \bar{T}^*}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2 \right) \cdot \bar{T}^* = - \frac{p}{\varkappa} \cdot \bar{T}'^* + \frac{f_1^*(r, z)}{\varkappa} -$$

$$- a\alpha_n \bar{T}(a, p, z) - \frac{T^*(r, z, 0)}{\varkappa}, \tag{11}$$

unde $f_1(r, z) = T(r, z, 0)$. S-a presupus evident că nu există izvoare interioare de căldură.

Soluția ecuației (11) este

$$\bar{T}^* = C_3(p, \alpha_n) \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + C_4(p, \alpha_n) \times$$

$$\times \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + \Phi_1, \tag{12}$$

unde Φ_1 este o soluție particulară a ecuației (11), ea determinîndu-se în funcție de $f_1(r, z)$ și $T(r, z, 0)$.

Inversînd transformata Hankel se obține

$$\bar{T} = \frac{2}{a^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_3(p, \alpha_n) \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + C_4(p, \alpha_n) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(- \sqrt{\frac{p}{\varkappa} + \alpha_n^2} \right) z + \Phi_1 \right] \cdot \frac{J_0(r\alpha_n)}{[J_0'(a\alpha_n)]^2}. \tag{13}$$

Pentru soluționarea problemei termoelastice dinamice se pleacă de la ecuațiile în deplasări (7), punînd însă

$$\bar{u} = \nabla\Phi + \mathrm{rot}\bar{\Psi}. \tag{14}$$

Se obține următorul sistem

$$\Box_1^2\Phi = mT, \tag{15'}$$

$$\Box_2^2\bar{\Psi} = 0, \tag{15''}$$

unde

$$m = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu}, \quad \Box_1^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\Box_2^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Cu notația $\nabla^2 T' = R$, ecuațiile (6), (15') și (15'') dau, prin eliminarea temperaturii

$$\Box_1^2\Box_3^2\Phi = \pm Rm, \tag{16'}$$

$$\Box_2^2\bar{\Psi} = 0. \tag{16''}$$

Scriind formal ecuația (16') sub forma

$$(\Box_1^2 - \Box_3^2)\,\Phi = \pm m\left(\frac{1}{\Box_3^2} - \frac{1}{\Box_1^2}\right)R, \tag{17'}$$

și considerînd ecuația

$$\Box_1^2 S = \pm R, \tag{18}$$

cu aceleași condiții inițiale și la limită ca și ecuația (6), se poate scrie

$$\left(\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = m(T - S). \tag{19}$$

Să punem acum

$$\Phi = \Phi_0 + \varphi, \tag{20}$$

unde Φ_0 satisface ecuația

$$\left(\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi_0 = m(T - S), \tag{21}$$

cu una dintre condițiile pe contur îndeplinite.

Considerînd că bara cilindrică este liberă de tensiuni pentru orice $t \leqslant 0$, se obţine prin aplicarea transformatei Laplace ecuaţiei (21)

$$\bar{\Phi}_0 = \frac{m}{p\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{p}{c_1^2}\right)} \cdot (\bar{T} - \bar{S}). \tag{22}$$

Cunoscînd transformata Laplace (13) a cîmpului temperaturilor, se găseşte uşor funcţia $\bar{S}$ prin înlocuirea în (22) a lui $\frac{p}{\varkappa}$ prin $\frac{p^2}{c_1^2}$. Se obţine în acest fel

$$\bar{S} = \frac{2}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{C}_3(p, \alpha_n) \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{p^2}{c_1^2} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + \tilde{C}_4(p, \alpha_n) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(- \sqrt{\frac{p^2}{c_1^2} + \alpha_n^2} \right) \cdot z + \tilde{\Phi}_1 \right] \cdot \frac{J_0(r\alpha_n)}{[J_0'(a\alpha_n)]^2} \cdot \tag{23}$$

Φ_0 se determină prin inversarea transformatei Laplace

$$\Phi_0 = m\varkappa \int_0^t [1 - e^{\frac{c_1^2}{\varkappa}(t-\tau)}] \cdot [T(\tau, r, z) - S(\tau, r, z)] \, d\tau, \tag{24}$$

$T(t, r, z)$ şi $S(t, r, z)$ se obţin prin inversarea transformatelor Laplace în (13) şi (23), pentru un caz concret cu condiţii iniţiale şi la limită precizate.

Componenta φ se obţine prin rezolvarea ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{25}$$

ţinînd cont de condiţiile concrete la limită.

Componenta $\overline{\Psi}$ se obţine în mod analog prin rezolvarea ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial t^2} = 0, \tag{26}$$

cu condiţiile la limită precizate.

Componentei Φ_0 îi corespund tensiunile [3]

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\Phi_{0;i,j} - \delta_{ij} \nabla^2 \Phi_0) - \rho \delta_{ij} \ddot{\bar{\Phi}}_0. \tag{27}$$

Componentelor φ şi $\overline{\Psi}$ le corespunde componenta deplasării

$$\tilde{\bar{u}} = \nabla \varphi + \operatorname{rot} \overline{\Psi}$$

și tensiunile [3]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\tilde{\varepsilon}_{ij} + \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \tilde{e}. \tag{28}$$

În (28) $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ sînt componentele tensorului deformațiilor corespunzător lui $\tilde{\tilde{u}}$, iar $\tilde{e} = \tilde{\varepsilon}_{ii} = T_r(\tilde{\varepsilon}_{ij})$.

Să observăm că, pentru ecuațiile (25) și (26), condițiile la limită vor conține atît componentele obișnuite din elasticitate, determinabile ușor pentru un cîmp de forțe exterioare dat, cît și componente specifice datorită variației masei, determinabile cu relații de tipul (1).

Pentru un cîmp termic exterior precizat prin condiții la limită și prin condiții inițiale, ca și pentru un anumit caz particular de disipație sau captare a masei, determinarea tensiunilor se face prin particularizarea relațiilor de mai sus, adică revine la o problemă de calcul.

3. ÎNCHEIERE

Metoda expusă anterior permite luarea în considerație, în limitele aproximațiilor anunțate, a variației masei în calculul tensiunilor pentru problema termoelastică dinamică necuplată.

Folosirea consecventă a transformărilor integrale duce la un calcul în general ușor de condus.

Rezolvarea efectivă pentru o serie de condiții la limită concrete, care se pot ivi în practică poate face obiectul unui studiu separat.

Primită la redacție la 31 decembrie 1971.

BIBLIOGRAFIE

1. Z. GÁBOS, *Termodinamica fenomenologică*, București, Edit. Academiei R.P.R., 1959.
2. I. GRINDEI, *Termoelasticitate*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1967.
3. W. NOWACKI, *Dinamica sistemelor elastice*, București, Edit. tehnică, 1969.
4. W. NOWACKI, *On the completeness of stress Function in thermoelasticity*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences (Série de Sciences techniques), *9* (1967).
5. I. H. SNEDDON, *Fourier transforms*, New-York, Toronto, 1951.

ANALIZA CINEMATICĂ ŞI CINETOSTATICĂ A UNEI UNITĂŢI DE POMPAJ DIN INDUSTRIA PETROLIERĂ CU AJUTORUL CALCULATORULUI ELECTRONIC

de R. C. BOGDAN şi N. MANAFI

Universitatea din Braşov

Centrul de mecanică a solidelor

Se prezintă o metodă analitică pentru determinarea la unităţile de pompaj atît a parametrilor cinematici (traiectorii, viteze, acceleraţii), cît şi a reacţiunilor în lagărele acestora. Algoritmele prezentate tabelar şi programabile pe calculatorul electronic sînt obţinute în baza unor metode originale introduse de autori în analiza cinematică şi cinetostatică a mecanismelor plane, respectiv metoda analizei armonice complexe şi metoda vectorilor complecşi. Metoda este exemplificată pentru unitatea de pompaj de fabricaţie românească UP-7, 7—1625—1845, prezentîndu-se rezultatele obţinute la calculatorul electronic.

1. GENERALITĂŢI

Problema calculului cinematic şi dinamic la unităţile de pompaj din industria petrolieră a constituit obiectul a numeroase cercetări în ţară şi în străinătate. Aceste cercetări au avut ca scop, printre altele, găsirea unor metode de calcul analitice exacte [1], [2], [3].

În cadrul lucrării de faţă se valorifică o serie de cercetări anterioare, aplicînd în cazul unităţilor de pompaj metodele originale de calcul cinematic şi cinetostatic introduse de autori în studiul complex al mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare. Întrucît aceste metode au fost expuse detaliat în lucrările [4] — [7], se vor reda succint algoritmele de calcul cinematic şi cinetostatic, insistîndu-se asupra particularităţilor legate de utilizarea acestora în cazul unităţilor de pompaj. Se preconizează ca aceste algoritme, programabile pe calculatorul electronic, să constitue un instrument eficient de calcul, la îndemîna proiectanţilor şi cercetătorilor din domeniul utilajului petrolier.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 325—349

6—c.3628

2. CONSIDERENTE DE CALCUL

Pentru generalitate se ia în considerare tipul clasic de unitate de pompaj cu contrabalansare combinată (fig. 1); din algoritmul realizat pentru acest tip se pot obține prin particularizarea unor parametri și algoritmele pentru celelalte două tipuri, respectiv cu contrabalansare rotativă și cu contrabalansare oscilantă. Se poate trata de asemenea și tipul de unitate de pompaj avînd grupul de acționare plasat între gura sondei și capra balansierului.

Schema cinematică a tipului clasic de unitate de pompaj este dată în figura 2. Notațiile utilizate sînt în concordanță cu cele introduse de

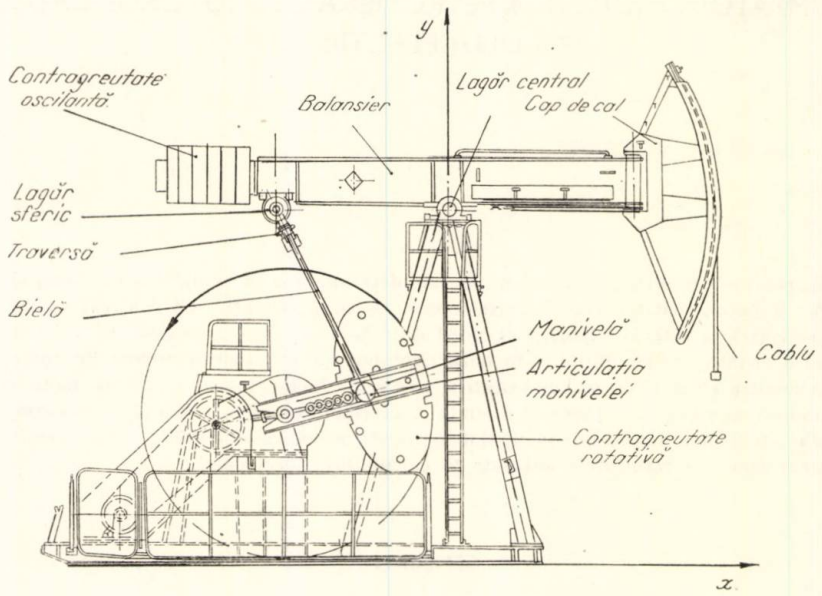


Fig. 1

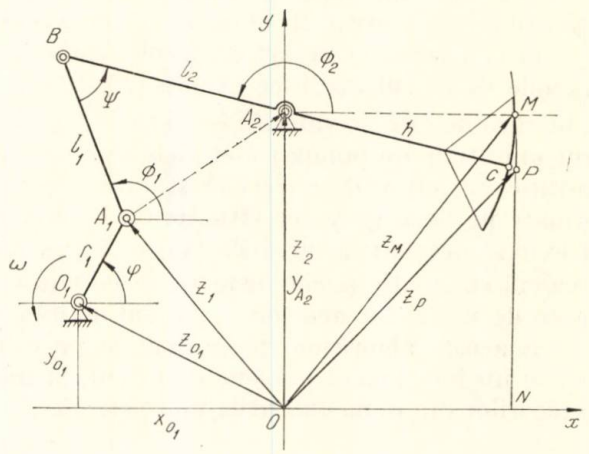


Fig. 2

autori în studiul general al grupelor structurale binare (diade) şi al mecanismelor plane monoconture. Mecanismul din figura 2 se raportează la planul complex yOx, în care axa reală Ox corespunde bazei ramei unităţii de pompaj, iar axa imaginară Oy trece prin lagărul de articulare dintre balansier şi capră.

Calculul cinematic al unităţii de pompaj presupune determinarea poziţiilor succesive ale elementelor mecanismului patrulater, determinarea vitezelor şi acceleraţiilor unghiulare ale elementelor precum şi vitezele şi acceleraţiile absolute ale unor puncte aparţinînd acestor elemente. Toţi aceşti parametri urmează a fi exprimaţi în funcţie de unghiul de poziţie φ al manivelei conducătoare. Se determină, de asemenea, cursa, viteza şi acceleraţia garniturii de prăjini suspendată la capul de cal al mecanismului propriu-zis.

În capitolul 3 se prezintă calculul cinematic al unităţilor de pompaj prin metoda vectorilor complecşi şi, în baza acesteia, prin metoda analizei armonice complexe. Metoda analizei armonice complexe, aparent mai complicată, prezintă o serie de avantaje în ceea ce priveşte operaţiile de derivare precum şi faptul că coeficienţii complecşi constanţi ai seriilor armonice ale diferiţilor parametri nu depind de regimul cinematic ci numai de dimensiunile şi configuraţia mecanismului. Valorile efective ale acestor parametri se obţin printr-o simplă operaţie de însumare a seriilor respective în funcţie de parametrul φ.

Utilizarea separată a metodei vectorilor complecşi este comodă în cazul determinării parametrilor poziţionali şi al calculării reacţiunilor în cuplele cinematice. Pentru calculul parametrilor cinematici este necesară însă utilizarea unor metode de derivare specifice analizei numerice, ca, de exemplu metoda diferenţelor finite.

Ambele metode se pretează programării pe calculatorul electronic. Algoritmele de calcul cinematic prin cele două metode se prezintă în paralel.

În capitolul 4 se prezintă algoritmele pentru determinarea reacţiunilor în cuplele cinematice ale unităţii de pompaj, ele corelîndu-se cu algoritmele de calcul cinematic din capitolul 3.

3. CALCULUL CINEMATIC AL UNITĂŢII DE POMPAJ

3.1. DETERMINAREA PARAMETRILOR POZIŢIONALI

Pentru mecanismul patrulater $O_1A_1BA_2$ (fig. 2) format prin legarea diadei de aspect 1 A_1BA_2 la manivela O_1A_1 şi la batiu, sînt cunoscute poziţiile articulaţiilor fixe $O_1(x_{O_1}, y_{O_1})$ şi $A_2(x_{A_2} = 0, y_{A_2})$ precum şi lungimile r_1, l_1 şi l_2 ale elementelor componente.

O primă etapă în calculul cinematic o constitue determinarea parametrilor poziţionali Φ_1 şi Φ_2 în funcţie de unghiul φ al manivelei conducătoare. Aceşti parametri sînt exprimaţi sub forma exponenţială complexă

$$e^{i\Phi_1} = \cos \Phi_1 + i \sin \Phi_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} e^{ik\varphi}, \qquad (1)$$

$$e^{i\Phi_2} = \cos \Phi_2 + i \sin \Phi_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k^{(2)} e^{ik\varphi}, \qquad (2)$$

conform relaţiilor lui Euler. În relaţiile (1) şi (2) sînt date şi dezvoltările în serie armonică complexă ale acestor parametri pentru care urmează a fi determinaţi coeficienţii complecşi constanţi $A_k^{(1)}$ şi $A_k^{(2)}$.

Algoritmul de calcul pentru patrulater provine din algoritmul general al diadei de aspect 1, în care vectorii z_1 şi z_2 ai cuplelor exterioare ale diadei iau valorile particulare specifice patrulaterului. Operaţiile de calcul sînt date în tabela 1, în succesiunea lor logică. Pentru fiecare parametru intermediar ca şi pentru parametrii poziţionali $e^{i\Phi_1}$ şi $e^{i\Phi_2}$ sînt date relaţiile de calcul cu vectori complecşi, dezvoltările în serie armonică complexă precum şi relaţiile pentru calculul coeficienţilor complecşi constanţi. Cîteva explicaţii sumare sînt date în ultima coloană din tabela 1. Referitor la operaţia nr. 7 din tabela 1, relaţiile pentru calculul coeficienţilor D_k sînt

$$D_0 = 1 - \left[\frac{1}{2} \Delta_0^{(2)} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \Delta_0^{(4)} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} \Delta_0^{(2n)} \right], \quad (3)$$

$$D_k = - \left[\frac{1}{2} \Delta_k^{(2)} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \Delta_k^{(4)} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} \Delta_k^{(2n)} \right]. \quad (4)$$

Aceste relaţii provin din dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\sqrt{1 - \cos^2 \Psi}$. În relaţiile (3) şi (4) $\Delta_k^{(2n)}$ sînt coeficienţii dezvoltărilor în serie armonică complexă a puterilor pare ale funcţiei $\cos\Psi$ şi se calculează cu relaţiile

$$\Delta_m^{(2)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta_{k+m} \cdot \Delta_{-k}, \quad (5)$$

$$\Delta_m^{(2n)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta_{k+2}^{(2n-2)} \cdot \Delta_{-k}^{(2)}. \quad (6)$$

Detalii asupra operaţiilor cu serii armonice complexe sînt date pe larg în lucrările [4], [5].

Coeficienţii $A_k^{(1)}$ (poz. 10 din tab. 1) se determină ca necunoscute ale unui sistem de ecuaţii liniare complexe, printr-una din metodele analizei numerice (ca de exemplu metoda substituţiilor succesive, metoda eliminării gaussiene etc.). În ceea ce priveşte numărul de termeni (şi deci de coeficienţi) ai seriilor armonice complexe, experienţa de pînă acum a confirmat că este suficient a se lua pentru fiecare serie maximum 15 termeni (de la rangul $k = -7$ la $k = +7$), datorită rapidei convergenţe a seriei către valoarea determinată.

Cunoscînd parametrii $e^{i\Phi_1}$ şi $e^{i\Phi_2}$ se poate determina vectorul de poziţie al oricărui punct aparţinînd unuia sau altuia din elementele mecanismului. De exemplu, pentru punctul B (fig. 2) vectorul de poziţie în sistemul yOx va fi

$$z_B = z_1 + l_1 \cdot e^{i\Phi_1} = z_2 + l_2 \cdot e^{i\Phi_2}, \quad (7)$$

Tabela 1

Algoritmul pentru determinarea parametrilor poziționali ai mecanismului patrulater.

Nr. crt.	Simbol	Relația de calcul	Dezvoltarea în serie	Relații pentru calculul coeficienților	Observații
1	z_{0_1}	$z_{0_1} = x_{0_1} + i \cdot y_{0_1}$	—	—	vector constant
2	z_1	$z_1 = y_{0_1} + r_1 e^{i\varphi}$	$z_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}$	$\alpha_{k\neq 0,1}^{(1)} = 0,\ \alpha_0^{(1)} = z_{01},\ \alpha_1^{(1)} = r_1$	
3	z_2	$z_2 = i \cdot y_{A_2}$	$y_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(2)} e^{ik\varphi}$	$\alpha_{k\neq 0}^{(2)} = 0,\ \alpha_0^{(2)} = i \cdot y_{A_2}$	vector constant
4	A_1A_2	$A_1A_2 = z_2 - Z_1$	$A_1A_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{ik\varphi}$	$\beta_k = \alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)}$	$A_1A_2 = l_1 e^{i\Phi_1} - l_2 e^{i\Phi_2}$
5	$\lvert A_1A_2\rvert^2$	$\lvert A_1A_2\rvert^2 = A_1A_2 \cdot \overline{A_1A_2}$	$\lvert A_1A_2\rvert^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{ik\varphi}$	$\gamma_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_{m+k} \cdot \overline{\beta}_m$	
6	$\cos\Psi$	$\cos\Psi = \frac{l_1^2 + l_2^2 - \lvert A_1A_2\rvert^2}{2l_1l_2}$	$\cos\Psi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta_k e^{ik\varphi}$	$\Delta_{k\neq 0} = -\frac{\gamma_k}{2l_1l_2}$; $\Delta_0 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - \gamma_0}{2l_1 l_2}$	din $\Delta\, A_1BA_2$
7	$\sin\Psi$	$\sin\Psi = \sqrt{1 - \cos^2\Psi}$	$\sin\Psi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{ik\varphi}$	conform rel. (3) și (4)	
8	$e^{i\Psi}$	$e^{i\Psi} = \cos\Psi + i \cdot \sin\Psi$	$e^{i\Psi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k e^{ik\varphi}$	$B_k = \Delta_k + i \cdot D_k$	
9	V_1	$V_1 = l_1 - l_2 \cdot e^{i\Psi}$	$V_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k^{(1)} \cdot e^{ik\varphi}$	$C_{k\neq 0}^{(1)} = -l_2 \cdot B_k$; $C_0^{(1)} = l_1 - l_2 \cdot B_0$	prin definiție $V_1 = A_1A_2e^{-i\Phi_1}$
10	$e^{i\Phi_1}$	$e^{i\Phi_1} = \overline{V}_1 / \overline{A_1A_2}$	$e^{i\Phi_1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k^{(1)} e^{ik\varphi}$	$\sum_{k=-\infty}^{+8} \overline{\beta}_{m+k} A_k^{(1)} = \overline{C}_m^{(1)}$	sistem de ecuații liniare complexe
11	$e^{i\Phi_2}$	$e^{i\Phi_2} = e^{i\Phi_1} \cdot e^{i\Psi}$	$e^{i\Phi_2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k^{(2)} e^{ik\varphi}$	$A_k^{(2)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{k+m}^{(1)} \cdot B_{-k}$.	din relația $\Phi_2 = \Phi_1 + \Psi$

iar pentru punctul C

$$z_C = z_2 + h \cdot e^{i(\Phi_2 - \pi)} = z_2 - h \cdot e^{i\Phi_2}. \tag{8}$$

Dacă pentru acești vectori de poziție se consideră valabile dezvoltările

$$z_B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(B)} e^{ik\varphi}, \quad z_C = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(C)} e^{ik\varphi}, \tag{9}$$

atunci coeficienții acestora se pot calcula cu relațiile

$$\alpha_\kappa^{(B)} = \alpha_k^{(1)} + l_1 A_k^{(1)}, \quad \alpha_k^{(C)} = \alpha_k^{(2)} - h A_k^{(2)}. \tag{10}$$

În calculul cinematic al unității de pompaj interesează și mișcarea garniturii de prăjini suspendată la capul de cal al balansierului. Pentru aceasta se determină vectorul de poziție z_P definit prin relația

$$z_P = z_2 + h + il_{MP}, \tag{11}$$

în care

$$l_{MP} = \widehat{MC} = h(\Phi_2 - \pi) \tag{12}$$

și deci

$$z_P = h + i[y_{A_2} + h(\Phi_2 - \pi)], \tag{13}$$

în care unghiul Φ_2 este dat în radiani. Prin algoritmul din tabela 1 s-a determinat mărimea complexă $e^{i\Phi_2}$, astfel că, ținînd cont de (2),

$$\Phi_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{Imag}(e^{i\Phi_2})}{\operatorname{Real}(e^{i\Phi_2})}\right]. \tag{14}$$

Această operație se efectuează ușor pe calculator și deci determinarea vectorului z_P nu prezintă dificultăți. Considerarea parametrului Φ_2 ca mărime dezvoltabilă în serie armonică complexă și determinarea coeficienților acesteia este posibilă însă algoritmul de calcul aferent este complicat și necesită un volum mare de operații, neconvenabile chiar și în condițiile calculului electronic. Din acest motiv este recomandabilă evaluarea parametrului $e^{i\Phi_2}$ prin însumarea seriei respective în funcție de φ și evaluarea unghiului Φ_2, vectorul z_P calculîndu-se cu relația (13).

Cursa totală a garniturii de prăjini rezultă ca diferență a valorilor maximă și minimă a părții imaginare a vectorului z_P, partea reală fiind constantă.

3.2. DETERMINAREA VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR UNGHIULARE

Se presupun cunoscute viteza și accelerația unghiulară a manivelei conducătoare, în funcție de unghiul de poziție φ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{15}$$

Se determină vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 precum și accelerațiile unghiulare ε_1 și ε_2 ale bielei și balansierului mecanismului patrulater. Se expune metoda de obținere a relațiilor de calcul numai pentru ω_1 și ε_1, algoritmul de calcul fiind identic și pentru balansier.

Trebuie făcută observația că viteza și accelerația unghiulară a unui element sînt vectori perpendiculari pe planul mișcării acestuia, mărimile ω_1 și ε_1 fiind de fapt modulele acestor vectori și deci cantități reale. Se observă că

$$\omega_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_1}{d\varphi} \cdot \omega = \delta_1 \omega, \tag{16}$$

în care δ_1 reprezintă raportul de transmitere între elementul considerat și elementul conducător. Acest raport se determină prin derivarea în raport cu φ a mărimii $e^{i\Phi_1}$, calculată conform algoritmului prezentat în tabela 1. Se obține

$$\delta_1 = \frac{d\Phi_1}{d\varphi} = -ie^{-i\Phi_1} \cdot \frac{d}{d\varphi}(e^{i\Phi_1}) \cdot \tag{17}$$

Accelerația unghiulară se obține derivînd în raport cu timpul relația (16), respectiv

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\delta_1}{d\varphi} \omega^2 + \delta_1 \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sigma_1 \omega^2 + \delta_1 \varepsilon. \tag{18}$$

Mărimea σ_1 este un parametru intermediar fără semnificație fizică, util însă în raționalizarea algoritmului de calcul; ea se obține prin derivarea în raport cu φ a relației (17). Efectuînd calculul, se obține în final

$$\sigma_1 = \frac{d\delta_1}{d\varphi} = -i\delta_1^2 - ie^{-i\Phi_1} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2}(e^{i\Phi_1}). \tag{19}$$

Se observă că în ultimă instanță problema calculării parametrilor ω_1 și ε_1 revine la determinarea primei și celei de a doua derivate în raport cu φ a mărimii $e^{i\Phi_1}$. În cazul utilizării metodei vectorilor complecși, aceste derivete se pot calcula prin metoda diferențelor finite, conform relațiilor generale cunoscute din analiza numerică [8]

$$f'(\varphi) = \frac{1}{12t}\,[-f(\varphi + 2t) + 8f(\varphi + t) - 8f(\varphi - t) + f(\varphi - 2t)], \tag{20}$$

$$f''(\varphi) = \frac{1}{12t^2}\,[-f(\varphi+2t)+16f(\varphi+t)-30f(\varphi)+16f(\varphi-t) - f(\varphi-2t)], \tag{21}$$

în care t este creșterea finită dată parametrului în raport cu care se face derivarea, respectiv φ. Eroarea de calcul în cazul utilizării acestor relații

este de ordinul t^4; pentru $t = 0{,}001$ rad. această eroare este practic neglijabilă. Dezavantajul acestei metode constă în necesitatea calculării repetate a funcției $f(\varphi) = e^{i\Phi_1}$ pentru valorile succesive date variabilei φ în jurul poziției pentru care se face calculul. În cazul utilizării calculatorului electronic acest inconvenient dispare, ținînd cont și de faptul că relațiile de calcul respective din tabela 1 sînt simple; singura condiție indispensabilă este utilizarea preciziei duble.

Prin utilizarea metodei analizei armonice complexe operațiile de derivare se efectuează mai ușor. Prin derivarea în raport cu φ a mărimii $e^{i\Phi_1}$, a cărei dezvoltare în serie armonică complexă este cunoscută prin coeficienții complecși constanți $A_k^{(1)}$ (tab. 1), se obține

$$\frac{d}{d\varphi}(e^{i\Phi_1}) = i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kA_k^{(1)} e^{ik\varphi}. \tag{22}$$

Pentru parametrii δ_1 și σ_1 se consideră valabile dezvoltările

$$\delta_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_m^{(1)} e^{im\varphi}, \quad \sigma_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sigma_m^{(1)} e^{im\varphi}. \tag{23}$$

Ținînd cont de relația (17) precum și de faptul că $\sigma_1 = d\delta_1/d\varphi$, se obțin relațiile între coeficienți

$$\delta_m^{(1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kA_k^{(1)} \bar{A}_{k-m}^{(1)}, \quad \sigma_m^{(1)} = im \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kA_k^{(1)} \bar{A}_{k-m}^{(1)}. \tag{24}$$

Atît viteza unghiulară ω_1, cît și accelerația unghiulară ε_1 sînt funcții de poziția mecanismului patrulater și deci se pot dezvolta în serie armonică complexă sub formele

$$\omega_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \omega_m^{(1)} e^{im\varphi}, \quad \varepsilon_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_m^{(1)} e^{im\varphi}. \tag{25}$$

În ipoteza că $\omega = \text{const.}$ și deci $\varepsilon = 0$, relațiile (16) și (18) se transpun la nivelul coeficienților prin

$$\omega_m^{(1)} = \omega \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kA_k^{(1)} \bar{A}_{k-m}^{(1)}, \quad \varepsilon_m^{(1)} = i\omega^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kmA_k^{(1)} \bar{A}_{k-m}^{(1)}. \tag{26}$$

Determinîndu-se acești coeficienți, parametrii ω_1 și ε_1 se pot evalua prin efectuarea însumărilor (25) în funcție de valoarea dată unghiului φ.

Dacă se cunoaște mișcarea reală a manivelei conducătoare, respectiv $\omega(\varphi)$ și $\varepsilon(\varphi)$, se evaluează mai întîi $\delta_1(\varphi)$ și $\sigma_1(\varphi)$ cu relațiile (23) și se determină apoi ω_1 și ε_1 cu relațiile (16) și (18).

Algoritmul pentru calculul vitezelor și accelerațiilor unghiulare ale elementelor mecanismului unității de pompaj este prezentat sintetic în tabela 2.

Tabela 2

Algoritm pentru calculul vitezelor și accelerațiilor unghiulare

Nr. crt.	Parametru	Relația de calcul	Dezvoltarea în serie	Relații pentru calculul coeficienților	Observații
1	$\frac{d}{d\varphi}(e^{i\Phi_1})$ $\frac{d}{d\varphi}(e^{i\Phi_1})$	Conf. rel (20)	—	—	
2	$\frac{d^2}{d\varphi^2}(e^{i\Phi_2})$ $\frac{d^2}{d\varphi^2}(e^{i\Phi_2})$	Conf. rel. (21)	—	—	
3	δ_1	$\delta_1 = -ie^{-i\Phi_1}\cdot\frac{d}{d\varphi}(e^{i\Phi_1})$	$\delta_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta_m^{(1)}e^{im\varphi}$	$\delta_k^{(1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kA_k^{(1)}\overline{A}_{k-m}^{(1)}$	
4	δ_2	$\delta_2 = -ie^{-i\Phi_2}\cdot\frac{d}{d\varphi}(e^{i\Phi_2})$	$\delta_2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta_m^{(2)}e^{im\varphi}$	$\delta_m^{(1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kA_k^{(2)}\cdot\overline{A}_{k-m}^{(2)}$	
5	σ_1	$\sigma_1 = -i\left[\delta_1^2 + e^{i\Phi_1}\cdot\frac{d^2}{d\varphi^2}(e^{i\Phi_1})\right]$	$\sigma_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sigma_m^{(1)}e^{im\varphi}$	$\sigma_m^{(1)} = i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kmA_k^{(1)}\overline{A}_{k-m}^{(1)}$	
6	σ_2	$\sigma_2 = -i\left[\delta_2^2 + e^{-i\Phi_2}\frac{d^2}{d\varphi^2}(e^{i\Phi_2})\right]$	$\sigma_2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sigma_m^{(2)}e^{im\varphi}$	$\sigma_m^{(2)} = i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kmA_k^{(2)}\overline{A}_{k-m}^{(2)}$	
7	ω_1	$\omega_1 = \delta_1\omega$	$\omega_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\omega_m^{(1)}e^{im\varphi}$	$\omega_m^{(1)} = \omega\delta_m^{(1)} = \omega\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kA_k^{(1)}\overline{A}_{k-m}^{(1)}$	ptr. ω = const. și $\varepsilon = 0$
8	ω_2	$\omega_2 = \delta_2\omega$	$\omega_2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\omega_m^{(2)}e^{im\varphi}$	$\omega_m^{(2)} = \omega\delta_m^{(2)} = \omega\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kA_k^{(2)}\overline{A}_{k-m}^{(2)}$	
9	ε_1	$\varepsilon_1 = \sigma_1\omega^2 + \delta_1\varepsilon$	$\varepsilon_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\varepsilon_m^{(1)}e^{im\varphi}$	$\varepsilon_m^{(1)} = \omega^2\sigma_m^{(1)} = i\omega\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kmA_k^{(1)}\overline{A}_{k-m}^{(1)}$	
10	ε_2	$\varepsilon_2 = \sigma_2\omega^2 + \delta_2\varepsilon$	$\varepsilon_2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\varepsilon_m^{(2)}e^{im\varphi}$	$\varepsilon_m^{(2)} = \omega^2\sigma_m^{(2)} = i\omega^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kmA_k^{(2)}\overline{A}_{k-m}^{(2)}$	

3.3. CALCULUL VITEZELOR ŞI ACCELERAŢIILOR

Viteza şi acceleraţia absolută a unui punct se obţine prin derivarea succesivă în raport cu timpul a vectorului său de poziţie. La unitatea de pompaj, vitezele şi acceleraţiile absolute ale punctelor B şi C se determină în modul următor :

$$v_B = \frac{\mathrm{d}z_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_1 e^{i\varphi} + l_1 e^{i\Phi_1} + z_{0_1}) = i(\omega r_1 e^{i\varphi} + \omega_1 l_1 e^{i\Phi_1}), \tag{27}$$

$$a_B = \frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = ir_1 e^{i\varphi} \cdot (\varepsilon + i\omega^2) + il_1 e^{i\Phi_1}(\varepsilon_1 + i\omega_1^2), \tag{28}$$

$$v_C = \frac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z_2 - h e^{i\Phi_2}) = -i\omega_2 h e^{i\Phi_2}, \tag{29}$$

$$a_C = \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = -ih e^{i\Phi_2}(\varepsilon_2 + i\omega_2^2). \tag{30}$$

Pentru punctul P aparţinînd garniturii de prăjini, se derivează în raport cu timpul relaţia (13), obţinîndu-se

$$v_P = \frac{\mathrm{d}z_P}{\mathrm{d}t} = ih\omega_2, \quad a_P = \frac{\mathrm{d}v_P}{\mathrm{d}t} = ih\varepsilon_2. \tag{31}$$

Pentru parametrii v_B, a_B, v_C şi a_C sînt valabile dezvoltările în serie armonică complexă

$$v_B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^{(B)} e^{ik\varphi}; \quad a_B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(B)} e^{ik\varphi}, \tag{32}$$

$$v_C = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^{(C)} e^{ik\varphi}, \quad a_C = \sum_{k=-\infty}^{=\infty} a_k^{(C)} e^{ik\varphi}. \tag{33}$$

Cunoscînd coeficienţii vectorilor z_B şi z_C din relaţiile (10), prin derivarea succesivă a relaţiilor (9), se ajunge la următoarele relaţii între coeficienţi :

$$v_k^{(B)} = ik\omega \alpha_k^{(B)}; \quad a_k^{(B)} = -k^2\omega^2\alpha_k^{(B)}, \tag{34}$$

$$v_k^{(C)} = ik\omega\alpha_k^{(C)}, \quad a_k^{(C)} = -k^2\omega^2\alpha_k^{(C)}. \tag{35}$$

Aceste relaţii sînt valabile pentru cazul în care $\omega = \text{const.}$ şi $\varepsilon = 0$. În aceleaşi condiţii, considerînd pentru viteza şi acceleraţia punctului P dezvoltările

$$v_P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^{(P)} e^{ik\varphi}, \quad a_P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(P)} e^{ik\varphi} \tag{36}$$

şi ţinînd cont de (31), se ajunge la relaţiile între coeficienţi

$$v_k^{(P)} = ih\omega_k^{(2)}; \quad a_k^{(P)} = ih\varepsilon_k^{(2)}, \tag{37}$$

în care $\omega_k^{(2)}$ şi $\varepsilon_k^{(2)}$ au fost determinaţi în tabela 2.

Rezumînd cele arătate mai sus, algoritmul pentru calculul vectorilor de poziţie, al vitezelor şi acceleraţiilor absolute ale punctelor A_1, B, C şi P se prezintă sintetic în tabela 3.

Tabela 3

Algoritm pentru calculul parametrilor cinematici ai unității de pompaj.

Nr. crt.	Parametru	Relația de calcul	Dezvoltarea în serie	Relații pentru calculul coeficienților	Observații
1	z_1	conf. tab. 1	$z_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(1)} e^{ik\varphi}$	conf. tab. 1	
2	v_1	$v_1 = i\omega \cdot r_1 e^{i\varphi}$	$v_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^{(1)} e^{ik\varphi}$	$v_k^{(1)} = ik\omega \cdot \alpha_k^{(1)}$	$\omega = \text{const.}$
3	a_1	$a_1 = (\varepsilon + i\omega^2) \cdot ir_1 e^{i\varphi}$	$a_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(1)} e^{ik\varphi}$	$a_k^{(1)} = -k^2\omega^2 . \alpha_k^{(1)}$	$\omega = \text{const.}$ $\varepsilon = 0$
4	z_B	$z_B = z_1 + l_1 e^{i\Phi_1}$	$z_B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(B)} e^{ik\varphi}$	$\alpha_k^{(B)} = \alpha_k^{(1)} + l_1 \cdot A_k^{(1)}$	
5	v_B	$v_B = v_1 + i\omega_1 l_1 e^{i\Phi_1}$	$v_B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^{(B)} e^{ik\varphi}$	$v_k^{(B)} = ik\omega \cdot \alpha_k^{(B)}$	$\omega = \text{const}$
6	a_B	$a_B = a_1 + il_1 e^{i\Phi_1} (\varepsilon_1 + i\omega_1^2)$	$a_B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(B)} e^{ik\varphi}$	$a_k^{(B)} = -k^2\omega^2 \cdot \alpha_k^{(B)}$	$\omega = \text{const}$ $\varepsilon = 0$
7	z_c	$z_c = z_2 - h e^{i\Phi_2}$	$z_C = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{(C)} e^{ik\varphi}$	$\alpha_k^{(C)} = \alpha_k^{(2)} - h \cdot A_k^{(2)}$	
8	v_c	$v_c = -i\omega_2 h e^{i\Phi_2}$	$v_C = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^{(C)} e^{ik\varphi}$	$v_k^{(C)} = ik\omega \cdot \alpha_k^{(C)}$	$\omega = \text{const}$
9	a_c	$a_c = -ih e^{i\Phi_2} (\varepsilon_2 + i\omega_2^2)$	$a_C = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(C)} e^{ik\varphi}$	$a_k^{(C)} = -k^2\omega^2 \cdot \alpha_k^{(C)}$	$\omega = \text{const}$ $\varepsilon = 0$
10	z_p	$z_p = z_2 + h + ih(\Phi_2 - \pi)$			Φ_2 conf. rel. (14)
11	v_p	$v_p = ih\omega_2$	$v_P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^{(P)} e^{ik\varphi}$	$v_k^{(P)} = ih \cdot \omega_k^{(2)}$	
12	a_p	$a_p = ih\varepsilon_2$	$a_P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(P)} e^{ik\varphi}$	$a_k^{(P)} = i\,h \cdot \varepsilon_k^{(2)}$	

4. CALCULUL CINETOSTATIC AL UNITĂȚII DE POMPAJ

4.1. FORȚELE CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA ELEMENTELOR MECANISMULUI

Schema de încărcare statică a elementelor mecanismului patrulater al unității de pompaj este dată în figura 3. Pentru fiecare element, forțele de greutate ale subansamblelor componente se consideră concentrate în centrele de greutate ale acestora.

a). *Balansierul* BA_2 (fig. 3*a*) este supus în primul rînd acțiunii următoarelor forțe de greutate:

G_{BS} — greutatea balansierului propriu-zis,
G_C — greutatea capului de cal,
G_L — greutatea lagărului sferic,
Q_B — contragreutatea de echilibrare oscilantă (în cazul contrabalansării rotative $Q_B = 0$).

La capul de cal al balansierului este aplicată forța tehnologică F. Evaluarea acestei forțe se face prin metodele cunoscute din literatura de specialitate [1], [3]. Se menționează că în această forță, în afara greutății garniturii de prăjini și a coloanei de lichid, sînt incluse atît forțele de frecare, cît și forțele de inerție. La evaluarea acestora servesc viteza v_P și

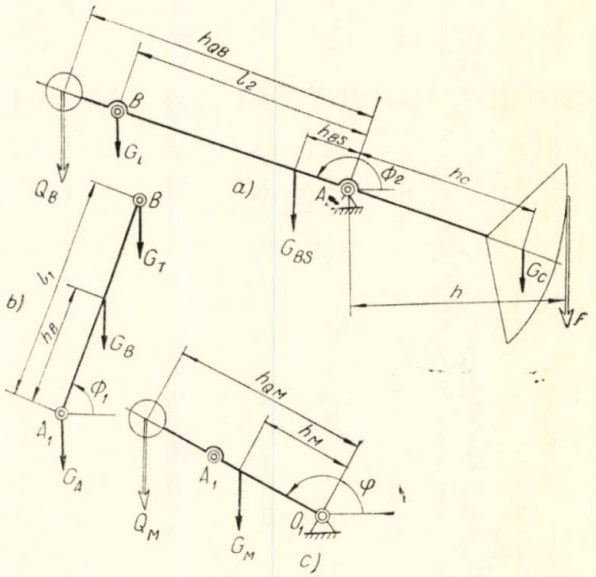


Fig. 3

accelerația a_P, determinate în capitolul precedent. Prin intermediul acestor parametri cinematici, forța F este dependentă de poziția mecanismului, respectiv de parametrul φ. Pentru problema în studiu această forță se consideră cunoscută.

b). *Biela* A_2B (fig. 3*b*), compusă din două biele paralele, este supusă acţiunii următoarelor forţe de greutate:

G_T — greutatea traversei,
G_B — greutatea celor două biele propriu-zise,
G_A — greutatea celor două articulaţii sferice de legătură cu manivelele.

c). *Manivela* O_1A_1 (fig. 3*c*) este compusă din două manivele paralele şi din două seturi de contragreutăţi rotative; asupra ei acţionează:

G_M — greutatea celor două manivele,
Q_M — cele două seturi de contragreutăţi rotative (în cazul contrabalansării oscilante $Q_M = 0$).

4.2. FORŢELE ŞI MOMENTELE REZULTANTE

Pentru simplificarea calculelor se recurge la o schemă de încărcare echivalentă, în care forţele şi momentele ce acţionează asupra unui element se reduc la o forţă rezultantă plasată în centrul de greutate al elementului şi la un moment rezultant în raport cu acelaşi punct. Pentru luarea în consideraţie şi a solicitărilor dinamice, în acestea se includ şi rezultantele forţelor şi momentelor de inerţie. În baza acestui procedeu, în figura 4 se reprezintă schema convenţională de încărcare a unui element oarecare, în care sînt reprezentate atît forţele şi momentele rezultante, cît şi reacţiunile din cuplele de rotaţie. Reacţiunile normale şi tangenţiale sînt reprezentate în sensurile lor considerate pozitive, respectiv după direcţiile pozitive ale sistemului de axe $y'Ax'$ ataşat elementului. Momentele se consideră pozitive atunci cînd acţionează în sens trigonometric pozitiv.

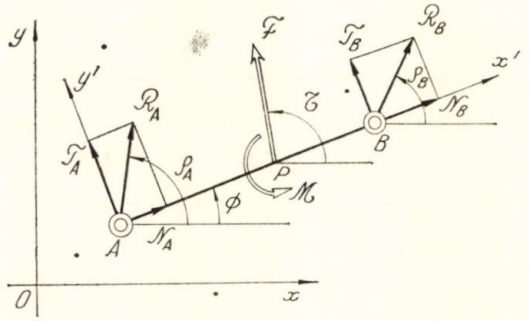


Fig. 4

Pornind de la schema din figura 4, în figura 5 au fost reprezentate schemele echivalente de încărcare pentru fiecare din elementele mecanismului unităţii de pompaj, ca şi reacţiunile aplicate bazei în articulaţiile O_1 şi A_2.

Tabela 4

Forțele și momentele rezultante pe elemente

Nr. crt.	Parametru	Relația de calcul	Observații
1	G_2	$G_2 = Q_B + G_L + G_{BS} + G_C$	
2	h_2	$h_2 = \frac{1}{G_2}(Q_B \cdot h_{QB} + G_L \cdot l_2 + G_{BS} \cdot h_{BS} - G_C \cdot h_C)$	
3	J_2	$J_2 = \frac{1}{g}(Q_B \cdot h_{QB}^2 + G_L \cdot l_2^2 + G_{BS} \cdot h_{BS}^2 + G_C \cdot h_C^2 - G_2 \cdot h_2^2)$	
4	a_{P_2}	$a_{P_2} = a_B \cdot h_2 / l_2$	
5	$\mathscr{F}_2$	$\mathscr{F}_2 = -\mathrm{i}(G_2 + F) - G_2 \cdot a_{P_2}/g = A_2 + \mathrm{i}B_2$	$A_2 = \mathrm{Re}(\mathscr{F}_2)$ $B_2 = \mathrm{Im}(\mathscr{F}_2)$
6	F_2	$F_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$	
7	$e^{i\tau_2}$	$e^{i\tau_2} = \mathscr{F}_2 / F_2$	
8	M_2	$M_2 = -F(h + h_2) - J_2 \cdot \varepsilon_2$	
9	G_1	$G_1 = G_T + G_B + G_A$	
10	h_1	$h_1 = (G_T l_1 + G_B \cdot h_B)/G_1$	
11	J_1	$J_1 = \frac{1}{g}(G_T l_1^2 + G_B \cdot h_B^2 - G_1 h_1^2)$	
12	a_{P_1}	$a_{P_1} = a_1 + h_1 \cdot (a_B - a_1)/l_1$	
13	$\mathscr{F}_1$	$\mathscr{F}_1 = -\mathrm{i}G_1 - G_1 a_{P_1}/g = A_1 + \mathrm{i}B_1$	$A_1 = \mathrm{Re}(\mathscr{F}_1)$ $B_1 = \mathrm{Im}(\mathscr{F}_1)$
14	F_1	$F_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$	
15	$e^{i\tau_1}$	$e^{i\tau_1} = \mathscr{F}_1 / F_1$	
16	M_1	$M_1 = -J_1 \cdot \varepsilon_1$	
17	G_0	$G_0 = Q_M + G_M$	
18	h_0	$h_0 = (Q_M \cdot h_{QM} + G_M \cdot h_M)/G_0$	
19	J_0	$J_0 = \frac{1}{g}(Q_M \cdot h_{QM}^2 + G_M \cdot h_M^2 - G_0 \cdot h_0^2)$	
20	a_{P_0}	$a_{P_0} = h_0 a_1 / r_1$	
21	$\mathscr{F}_0$	$\mathscr{F}_0 = -\mathrm{i}G_0 - G_0 \cdot a_{P_0}/g = A_0 + \mathrm{i}B_0$	$A_0 = \mathrm{Re}(\mathscr{F}_0)$ $B_0 = \mathrm{Im}(\mathscr{F}_0)$
22	F_0	$F_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}$	
23	$e^{i\tau_0}$	$e^{i\tau_0} = \mathscr{F}_0 / F_0$	
24	M_0	$M_0 = -J_0 \cdot \varepsilon$	

Algoritmul pentru calculul forţelor şi momentelor rezultante este dat în tabela 4, pentru fiecare din elementele mecanismului. Pentru calculul greutăţii rezultante şi a poziţiei centrului de greutate în raport cu articulaţia de referinţă, se utilizează relaţiile generale cunoscute, respectiv

$$G = \sum_j G_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$
$$h = \frac{1}{G} \sum_j G_j h_j$$

Momentele de inerţie în raport cu centrul de greutate se determină cu relaţia generală

$$J = \frac{1}{g}\left(\sum_j G_j h_j^2 - G h^2 \right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

de asemenea cunoscută din Mecanică. În aceste relaţii distanţele h şi h_j se raportează la articulaţiile de referinţă pentru fiecare element. Cunoscînd acceleraţiile a_1 şi a_B (tab. 3), se determină imediat acceleraţiile a_{P_j} ale centrelor de greutate şi în continuare rezultantele forţelor de inerţie, concentrate în acestea. Forţa rezultantă se obţine prin însumarea forţelor de greutate cu forţele de inerţie. La balansier se include în forţa rezultantă şi forţa tehnologică F. Momentul rezultant este egal cu momentul forţelor de inerţie în raport cu centrul de greutate; la balansier se adaugă acestuia şi momentul forţei F în raport cu acelaşi punct. Forţele rezultante sînt vectori în planul complex yOx, de forma

$$\mathscr{F}_j = F_j \, e^{i\tau_j} \qquad (j = 0, 1, 2), \tag{40}$$

putîndu-se determina distinct atît modulul F_j, cît şi argumentul τ_j sub forma exponenţială complexă

$$e^{i\tau_j} = \cos \tau_j + i \sin \tau_j. \tag{41}$$

4.3. CALCULUL REACŢIUNILOR ÎN CUPLELE CINEMATICE

Reacţiunile în cuplele cinematice ale unităţii de pompaj sînt reprezentate pentru fiecare element în parte în figura 5. Algoritmele generale pentru calculul cinetostatic al grupelor structurale binare şi al elementelor conducătoare au fost expuse pe larg de către autori în lucrarea [7]. În baza

acestor algoritme au fost alcătuite tabelele 5, 6 și 7 care prezintă concentrat succesiunea de operații pentru calculul reacțiunilor normale, tangențiale și totale, mai întîi pentru diada A_1BA_2 (tab. 5) și apoi pentru

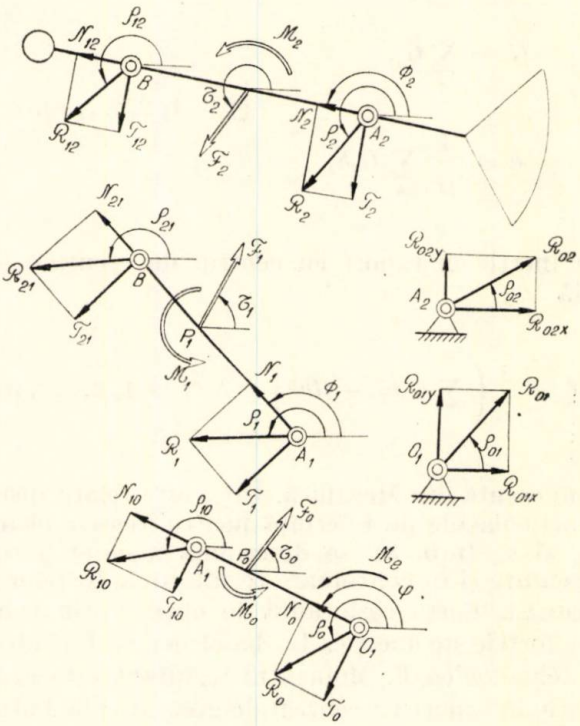


Fig. 5

manivela O_1A_1 (tab. 6). Elementele se consideră în echilibru static și, din acest motiv, la manivela O_1A_1 se introduce în articulația O_1 momentul de echilibrare M_e care reprezintă de fapt partea din momentul motor aplicat manivelei conducătoare, consumată pentru învingerea tuturor forțelor rezistente aplicate mecanismului. În tabela 7 se dau relațiile de calcul pentru reacțiunile aplicate reductorului în axul manivelei precum și suportului central în lagărul balansierului.

Este de remarcat că întreg setul de operații de calcul se referă la o anumită poziție a mecanismului caracterizată prin unghiul de poziție φ. O analiză cinetostatică completă presupune repetarea întregului set de operații pentru toată succesiunea de poziții a mecanismului în decursul unui ciclu de rotație al manivelei conducătoare. Se evaluează în prealabil parametrii poziționali și cinematici printr-una din cele două metode date în capitolul 3.

Atît algoritmele de calcul cinematic cît și cele pentru calculul cinetostatic sînt simple și ușor de programat pentru calculatorul electronic.

Tabela 5

Algoritm pentru calculul cinetostatic al diadei A_1BA_2

Nr. crt.	Vector	Definiție	Relația de calcul
1	$\mathscr{T}_1$	$\mathscr{T}_1 = \mathrm{i}T_1 e^{\mathrm{i}\Phi_1}$	$T_1 = \frac{1}{l_1}[M_1 - (l_1 - h_1)\cdot F_1 \sin(\tau_1 - \Phi_1)]$
2	$\mathscr{T}_2$	$\mathscr{T}_2 = \mathrm{i}T_2 e^{\mathrm{i}\Phi_2}$	$T_2 = \frac{1}{l_2}[M_2 - (l_2 - h_2)\cdot F_2 \sin(\tau_2 - \Phi_2)]$
3	$\mathscr{N}_1$	$\mathscr{N}_1 = N_1 e^{\mathrm{i}\Phi_1}$	$N_1 = [T_1 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) + F_1 \sin(\tau_1 - \Phi_2) + F_2 \sin(\tau_2 - \Phi_2) + T_2] \frac{1}{\sin(\Phi_2 - \Phi_1)}$
4	$\mathscr{N}_2$	$\mathscr{N}_2 = N_2 e^{\mathrm{i}\Phi_2}$	$N_2 = -N_1\cos(\Phi_2 - \Phi_1) - T_1\sin(\Phi_2 - \Phi_1) - F_1\cos(\tau_1 - \Phi_2) - F_2\cos(\tau_2 - \Phi_2)$
5	$\mathscr{N}_{21}$	$\mathscr{N}_{21} = N_{21} e^{\mathrm{i}\Phi_1}$	$N_{21} = -N_1 - F_1 \cos(\tau_1 - \Phi_1)$
6	$\mathscr{T}_{21}$	$\mathscr{T}_{21} = \mathrm{i}T_{21} e^{\mathrm{i}\Phi_1}$	$T_{21} = -T_1 - F_1\sin(\tau_1 - \Phi_1)$
7	$\mathscr{N}_{12}$	$\mathscr{N}_{12} = N_{12} e^{\mathrm{i}\Phi_2}$	$N_{12} = -N_2 - F_2 \cos(\tau_2 - \Phi_2)$
8	$\mathscr{T}_{12}$	$\mathscr{T}_{12} = \mathrm{i}T_{12} e^{\mathrm{i}\Phi_2}$	$T_{12} = -T_2 - F_2\sin(\tau_2 - \Phi_2)$
9	$\mathscr{R}_1$	$\mathscr{R}_1 = R_1 e^{\mathrm{i}\rho_1} = (N_1 + \mathrm{i}T_1)e^{\mathrm{i}\Phi_1}$	$R_1 = \sqrt{N_1^2 + T_1^2}$
10			$e^{\mathrm{i}\rho_1} = \frac{1}{R_1}(N_1 + \mathrm{i}T_1)\, e^{\mathrm{i}\Phi_1}$
11	$\mathscr{R}_2$	$\mathscr{R}_2 = R_2 e^{\mathrm{i}\rho_2} = (N_2 + \mathrm{i}T_2)e^{\mathrm{i}\Phi_2}$	$R_2 = \sqrt{N_2^2 + T_2^2}$
12			$e^{\mathrm{i}\rho_2} = \frac{1}{R_2}(N_2 + \mathrm{i}T_2)e^{\mathrm{i}\Phi_2}$
13	$\mathscr{R}_{21}$	$\mathscr{R}_{21} = R_{21} e^{\mathrm{i}\rho_{21}} = (N_{21} + \mathrm{i}T_{21})e^{\mathrm{i}\Phi_1}$	$R_{21} = \sqrt{N_{21}^2 + T_{21}^2}$
14			$e^{\mathrm{i}\rho_{21}} = \frac{1}{R_{21}}(N_{21} + \mathrm{i}T_{21})\cdot e^{\mathrm{i}\Phi_1}$
15	$\mathscr{R}_{12}$	$\mathscr{R}_{12} = R_{12} e^{\mathrm{i}\rho_{12}} = (N_{12} + \mathrm{i}T_{12})e^{\mathrm{i}\rho_{12}} = -R_{21}$	$R_{12} = R_{21}$
16			$e^{\mathrm{i}\rho_{12}} = -e^{\mathrm{i}\rho_{21}}$

Tabela 6

Algoritm pentru calculul cinetostatic al manivelei O_1A_1

Nr. crt.	Vector	Definiție	Relația de calcul
1	$\mathscr{N}_{10}$	$\mathscr{N}_{10} = N_{10}e^{i\varphi}$	$N_{10} = -N_1 \cos(\Phi_1 - \varphi) + T_1 \sin(\Phi_1 - \varphi)$
2	$\mathscr{T}_{10}$	$\mathscr{T}_{10} = iT_{10}e^{i\varphi}$	$T_{10} = -N_1 \sin(\Phi_1 - \varphi) - T_1 \cos(\Phi_1 - \varphi)$
3	$\mathscr{N}_0$	$\mathscr{N}_0 = N_0 e^{i\varphi}$	$N_0 = -N_{10} - F_0 \cos(\tau_0 - \varphi)$
4	$\mathscr{T}_0$	$\mathscr{T}_0 = iT_0 e^{i\varphi}$	$T_0 = -T_{10} - F_0 \sin(\tau_0 - \varphi)$
5	$\mathscr{R}_{10}$	$\mathscr{R}_{10} = R_{10}e^{i\rho_{10}} = (N_{10} + iT_{10})e^{i\varphi} = -R_1$	$R_{10} = R_1$
6			$e^{i\rho_{10}} = -e^{i\rho_1}$
7	$\mathscr{R}_0$	$\mathscr{R}_0 = R_0 e^{i\rho_0} = (N_0 + iT_0)e^{i\varphi}$	$R_0 = \sqrt{N_0^2 + T_0^2}$
8			$e^{i\rho_0} = \frac{1}{R_0}(N_0 + iT_0)e^{i\varphi}$
9	$\mathscr{M}_e$	$\lvert\mathscr{M}_e\rvert = M_e$	$M_e = -M_0 - T_{10}r_1 - F_0 h_0 \sin(\tau_0 - \varphi)$

Tabela 7

Algoritm pentru calculul reacțiunilor în lagărele O_1 și A_2

Nr. crt.	Vector	Definiție	Relația de calcul
1	$\mathscr{R}_{01x}$	$\mathscr{R}_{01x} = R_{01x}$	$R_{01x} = -N_0 \cos\varphi + T_0 \sin\varphi$
2	$\mathscr{R}_{01y}$	$\mathscr{R}_{01y} = iR_{01y}$	$R_{01y} = -N_0 \sin\varphi - T_0 \cos\varphi$
3	$\mathscr{R}_{01}$	$\mathscr{R}_{01} = R_{01}e^{i\rho_{01}} = R_{01x} + iR_{01y} = -R_0$	$R_{01} = R_0$
4			$e^{i\rho_{01}} = -e^{i\rho_0}$
5	$\mathscr{R}_{02x}$	$\mathscr{R}_{02x} = R_{02x}$	$R_{02x} = -N_2 \cos\Phi_2 + T_2 \sin\Phi_2$
6	$\mathscr{R}_{02y}$	$\mathscr{R}_{02y} = iR_{02y}$	$R_{02y} = -N_2 \sin\Phi_2 - T_2 \cos\Phi_2$
7	$\mathscr{R}_{02}$	$\mathscr{R}_{02} = R_{02}e^{i\rho_{02}} = R_{02x} + Ri_{02y} = -R_2$	$R_{02} = R_2$
8			$e^{i\rho_{02}} = -e^{i\rho_2}$

5. EXEMPLU DE CALCUL

În baza algoritmelor generale de calcul cinematic şi cinetostatic prezentate în capitolele precedente, a fost alcătuit un program de calculator în limbaj FORTRAN, cu ajutorul căruia pot fi efectuate calculele respective pentru orice unitate de pompaj.

În cele ce urmează se prezintă analiza cinematică şi cinetostatică a unităţii de pompaj UP-7,7—1625—1845 de fabricaţie românească. Pentru această unitate de pompaj datele de calcul sînt următoarele:

$r_1 = 0{,}7923$ m, $l_1 = 2{,}641$ m, $l_2 = 2{,}150$ m,
$h = 2{,}150$ m, $x_{O_1} = -2{,}150$ m, $y_{O_1} = 1{,}779$ m,
$y_{A_2} = 4{,}420$ m,
$\omega = 2{,}513$ rad/s (pentru 24 curbe duble pe minut),
$\varepsilon = 0{,}0$ rad/s^2,

$Q_B = 0{,}0$ kgf, $G_T = 132{,}770$ kgf, $Q_M = 2754{,}080$ kgf,
$G_L = 102{,}165$ kgf, $G_B = 75{,}370$ kgf, $G_M = 1834{,}648$ kgf,
$G_{BS} = 431{,}380$ kgf, $G_A = 76{,}984$ kgf,
$G_C = 199{,}750$ kgf,

$h_{QB} = 0{,}0$ m $h_{BS} = 0{,}340$ m, $h_C = 1{,}835$ m,
$h_B = 1{,}320$ m, $h_{QS} = 1{,}319$ m, $h_M = 0{,}798$ m.

Pentru forţa F în garnitura de prăjini se cunosc următoarele valori în funcţie de φ:

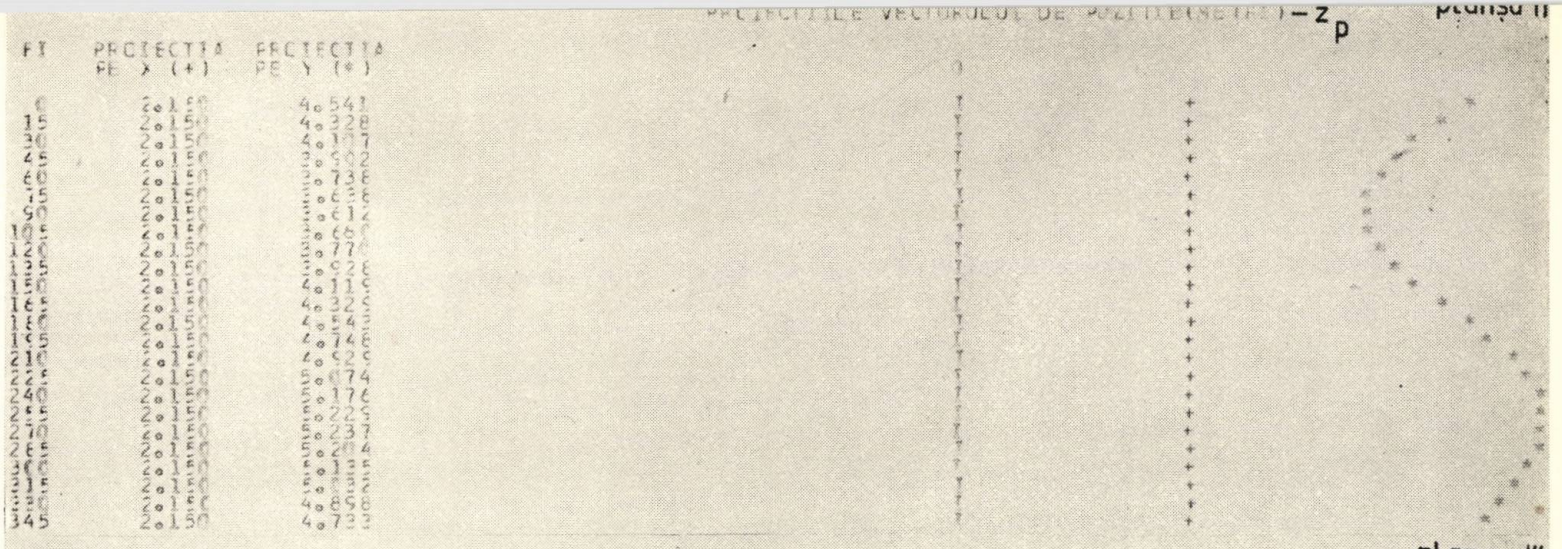
φ°	F(kgf)	φ°	F(kgf)	φ°	F(kgf)
0°	5105	120°	7487	240°	7175
15°	4918	135°	7530	255°	6991
30°	4731	150°	7573	270°	6907
45°	4829	165°	7615	285°	6039
60°	5348	180°	7658	300°	5852
75°	6192	195°	7623	315°	5665
90°	7402	210°	7542	330°	5478
1050	7445	225°	7358	345°	5291

Rezultatele calculului cinematic şi cinetostatic obţinute cu ajutorul unui calculator electronic IBM 360/30 sînt prezentate în planşele I—IX.

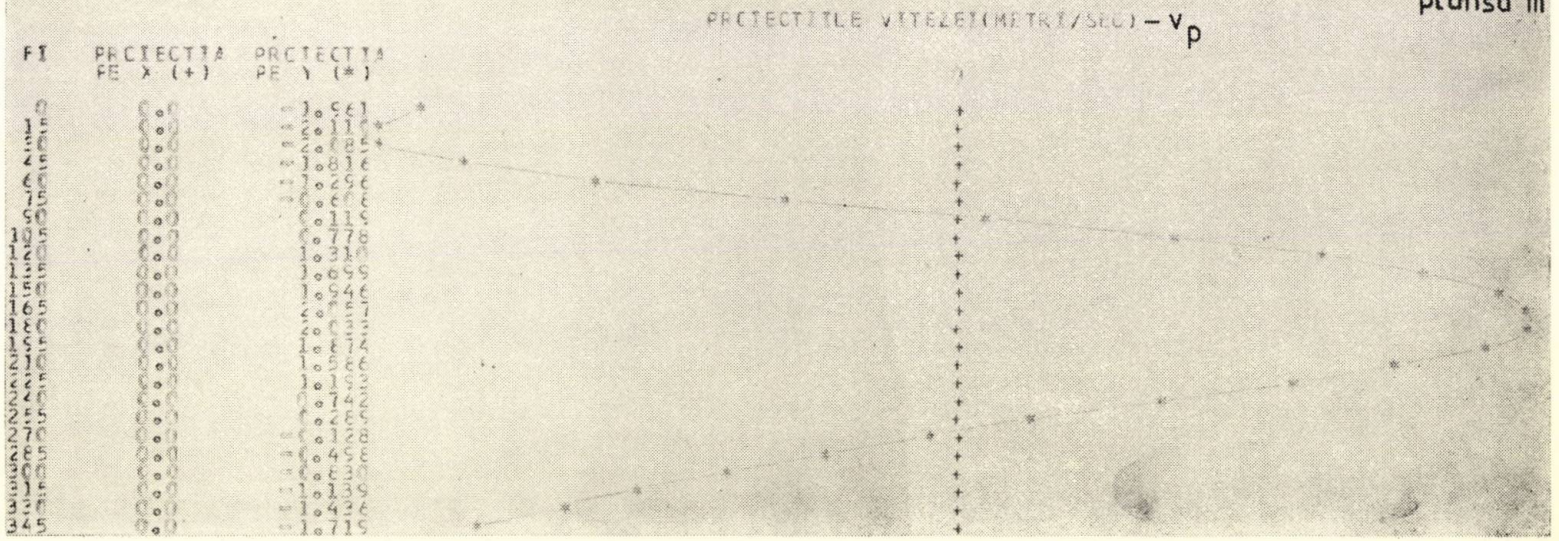
Primită la redacţie la 29 octombrie 1973.

PLANSA I – POZITIILE ELEMENTELOR SI REACTIUNILE IN LAGARE (KGF)

φ°	ϕ_1°	ϕ_2°	R_{01}	ρ_{01}°	R_{10}	ρ_{10}°	R_{12}	ρ_{12}°	R_{02}	ρ_{02}°
0	107/23/46	183/13/15	1833.115	2/ 6/ 2	4876.543	107/18/ 2	5192.617	286/33/22	10916.355	277/47/25
15	106/48/54	177/32/19	2003.380	28/ 7/ 1	4889.117	106/40/48	5164.531	285/59/52	10710.797	277/38/12
30	104/33/45	171/39/55	2438.693	48/23/55	4925.609	104/22/45	5151.227	283/57/28	10536.945	276/46/19
45	100/52/54	166/11/20	3183.975	64/54/37	5242.148	100/40/15	5417.313	280/39/40	10932.168	275/15/36
60	96/17/ 8	161/49/ 4	4262.160	76/15/22	5919.938	96/ 5/38	6055.738	276/25/18	12118.035	273/12/14
75	91/23/55	159/ 9/ 3	5414.559	82/34/36	6789.309	91/15/55	6904.555	271/42/21	13828.383	270/51/ 5
90	86/44/45	158/28/40	6578.723	86/ 1/55	7882.746	86/41/21	7997.063	267/ 2/46	16127.059	268/32/ 7
105	82/38/35	159/44/50	6191.648	88/47/19	7671.633	82/39/28	7801.480	262/53/29	15949.105	266/31/46
120	79/13/ 8	162/40/40	5627.262	92/32/21	7498.375	79/18/12	7656.066	259/22/37	15808.320	264/52/39
135	76/29/39	166/53/19	4984.578	96/56/51	7416.574	76/37/48	7619.438	256/34/23	15765.105	263/33/50
150	74/27/17	171/58/54	4321.883	101/33/22	7448.992	74/36/43	7683.586	254/29/55	15844.039	262/33/10
165	73/ 5/45	177/34/13	3668.787	105/29/22	7597.418	73/14/33	7873.715	253/ 9/38	16047.320	261/49/42
180	72/26/46	183/16/44	3042.069	107/48/ 3	7846.012	72/33/19	8161.680	252/34/53	16362.133	261/24/44
195	72/34/26	188/44/ 0	2382.298	108/41/18	8062.531	72/37/49	8412.324	252/48/44	16580.320	261/22/37
210	73/34/32	193/33/52	1717.995	107/45/ 0	8200.586	73/34/34	8576.926	253/55/13	16686.594	261/48/54
225	75/32/14	197/26/29	981.533	107/ 9/51	8105.930	75/29/18	8499.891	255/57/38	16466.852	262/48/23
240	78/28/11	200/ 8/ 0	266.275	103/ 8/32	7851.133	78/23/10	8254.016	258/54/39	16086.680	264/20/10
255	82/15/37	201/33/32	409.832	294/ 7/ 3	7454.613	82/ 9/33	7859.570	262/38/49	15551.754	266/17/29
270	86/40/14	201/46/18	980.066	295/ 2/56	6988.207	86/34/ 3	7390.793	266/56/33	14925.734	268/29/11
285	91/23/ 9	200/53/35	1983.723	291/11/40	5910.926	91/16/56	6308.375	271/30/37	13079.496	270/43/41
300	96/ 3/37	199/ 2/36	2201.258	298/56/18	5534.734	95/58/22	5924.809	275/58/48	12493.078	272/49/55
315	100/20/41	196/18/23	2233.483	308/21/24	5242.121	100/16/19	5622.125	280/ 2/29	11974.457	274/41/44
330	103/53/18	192/43/42	2114.795	320/47/12	5038.707	103/49/21	5404.621	283/21/41	11537.387	276/12/53
345	106/20/41	188/20/36	1929.194	338/14/ 6	4919.941	106/16/20	5265.512	285/37/22	11185.488	277/16/59

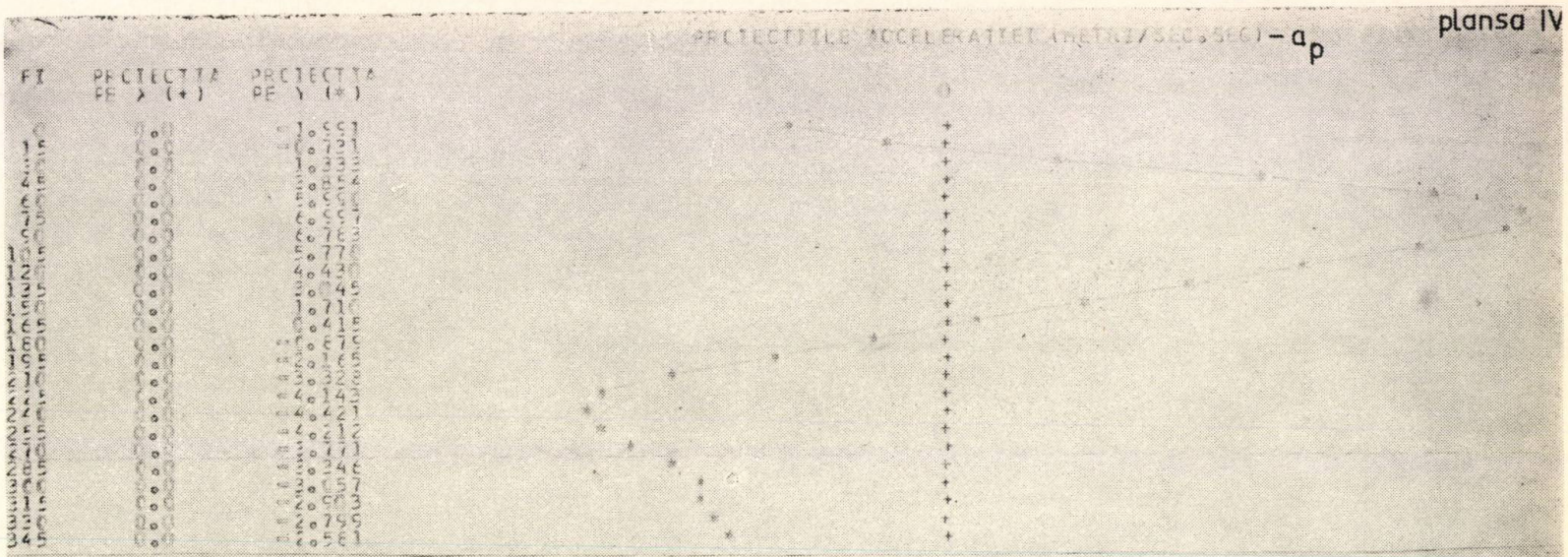


plansa II

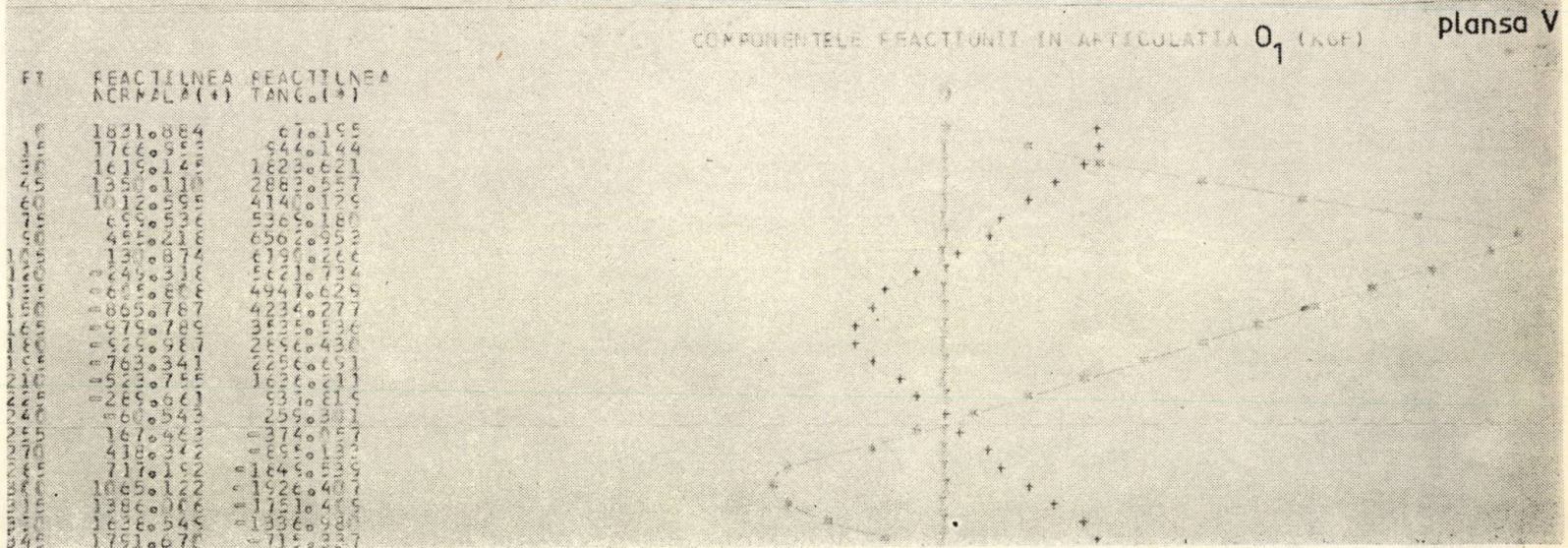


plansa III

plansa IV



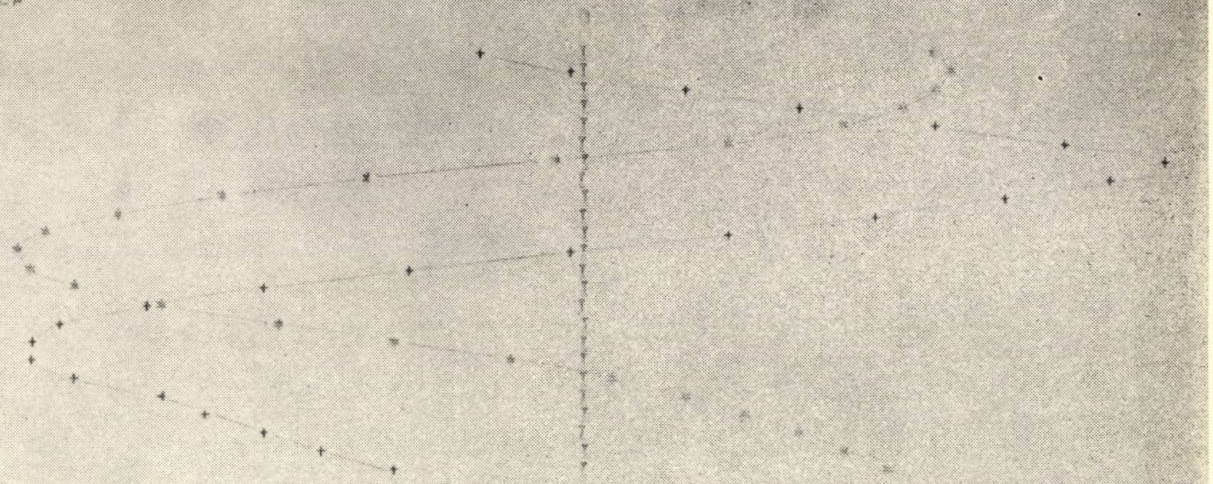
plansa V



plansa VI

COMPONENTELE REACTIUNII IN ARTICULATIA A_1 (KGF)

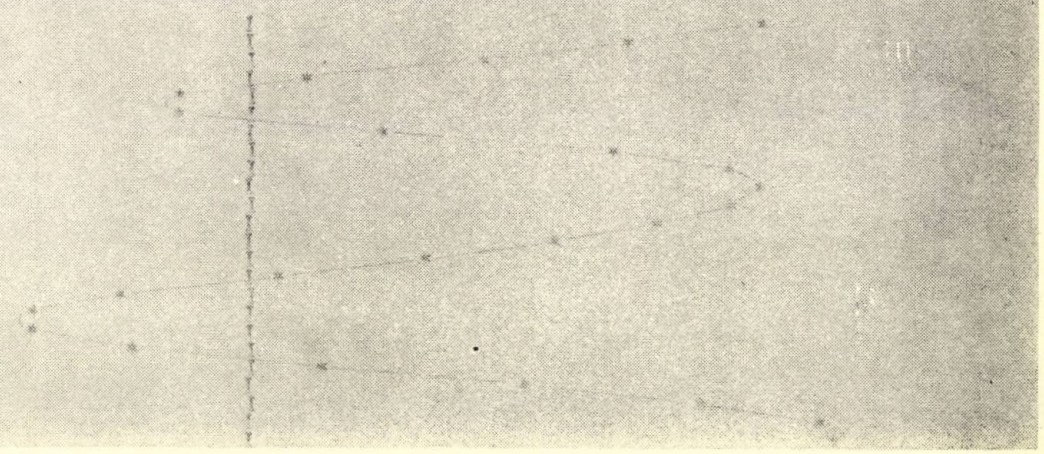
FI	REACTIUNEA NORMALA(+)	REACTIUNEA TANG.(*)
0	-1450.209	4655.918
15	-143.335	4887.020
30	1326.301	4743.684
45	2956.281	4329.031
60	4783.617	3487.497
75	6517.563	1901.598
90	7869.590	-455.215
105	7095.746	-2916.219
120	5685.094	-4889.313
135	3889.503	-6314.848
150	1879.207	-7208.051
165	-232.972	-7593.844
180	-2352.100	-7485.152
195	-4316.480	-6809.727
210	-5940.969	-5652.832
225	-6985.121	-4112.680
240	-7450.332	-2476.450
255	-7396.488	-929.085
270	-6975.676	418.339
285	-5742.320	1401.706
300	-5055.164	2253.579
315	-4308.324	2986.337
330	-3488.941	3635.366
345	-2553.982	4205.117



plansa VII

VARIATIA MOMENTULUI DE ECHILIBRARE (KGM)

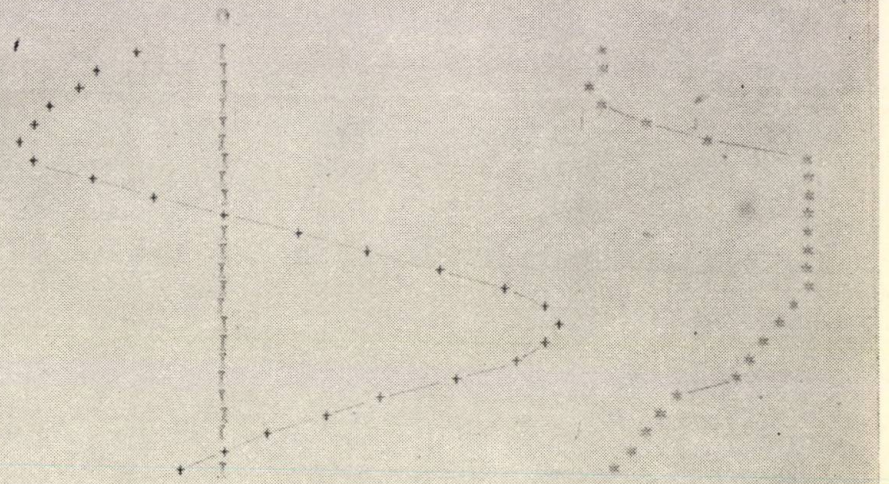
FI	MOMENT(*
0	1404.529
15	1047.598
30	652.107
45	170.972
60	-217.248
75	-188.850
90	360.987
105	993.448
120	1328.891
135	1403.781
150	1302.137
165	1098.910
180	839.051
195	477.105
210	68.848
225	-342.538
240	-584.517
255	-582.357
270	-331.748
285	207.559
300	761.243
315	1235.720
330	1530.995
345	1588.342



plansa VIII

COMPONENTELE REACTIUNII IN ARTICULATIA B (KGF)

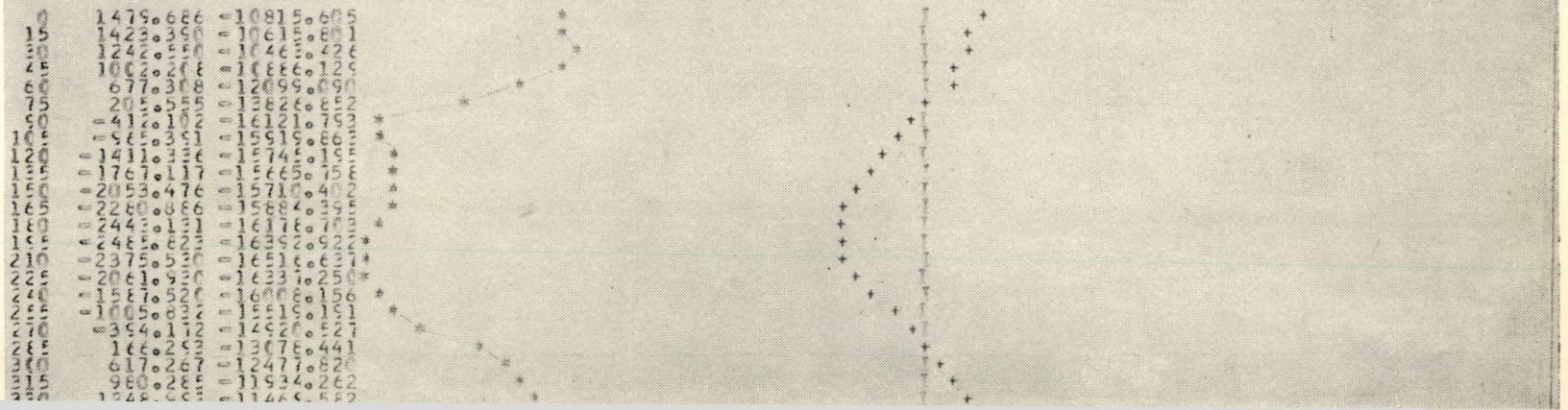
FI	REACTIUNEA NORMALA(+)	REACTIUNEA TANG.(*)
0	=1197.672	5052.617
15	=1635.238	4896.821
30	=1954.088	4766.219
45	=2244.123	4930.641
60	=2521.266	5505.926
75	=2648.385	6376.445
90	=2546.533	7580.781
105	=1774.100	7597.086
120	=693.140	7603.797
135	41.896	7610.324
150	1000.656	7618.152
165	1959.404	7626.023
180	2884.582	7634.938
195	3677.291	7566.031
210	4242.243	7464.240
225	4438.762	7248.855
240	4278.570	7058.512
255	3799.773	6880.016
270	3103.464	6701.637
285	2093.600	6556.840
300	1335.183	6371.480
315	613.515	6166.665
330	=55.728	6004.257
345	=667.197	6223.374



plansa IX

COMPONENTELE REACTIUNII IN ARTICULATIA A_2 (KGF)

FI	REACTIUNEA NORMALA(+)	REACTIUNEA TANG.(*)
0	1479.686	=10815.605
15	1423.350	=10615.801
30	1242.550	=10461.226
45	1002.208	=10366.125
60	677.308	=10299.090
75	205.555	=10226.852
90	=412.102	=10121.793
105	=968.351	=9919.867
120	=1411.336	=9746.195
135	=1767.117	=9665.758
150	=2053.476	=9710.402
165	=2280.886	=9884.398
180	=2443.151	=10116.703
195	=2485.823	=10359.922
210	=2375.530	=10516.633
225	=2061.930	=10533.250
240	=1587.520	=10400.156
255	=1005.882	=10151.191
270	=354.172	=9922.527
285	166.293	=9807.441
300	617.267	=9747.820
315	980.285	=9934.262
330	1248.955	=10445.852
345	1423.350	=10615.801



BIBLIOGRAFIE

1. N. D. Drăgotescu, *Pompajul sondelor de ţiţei*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1961.
2. Gr. Ioachim, *Exploatarea zăcămintelor de ţiţei*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1955.
3. K. S. Aliverdizade, ş.a. *Rascet i konstruirovanie, oborudovaniia dlia neftianih skvajin* Gostoptehizdat, Moskva, 1959.
4. R. C. Bogdan, D. Larionescu, *Analiza armonică complexă şi mecanoelectrică a mecanismelor plane*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1968.
5. R. C. Bogdan, N. Manafi, S. Cononovici, *Algoritme şi programe de calcul pentru determinarea parametrilor cinematici ai mecanismelor plane articulate*, Simpozionul de mecanisme şi transmisii mecanice, Reşiţa, 1972.
6, 7. R. C. Bogdan, N. Manafi, S. Cononovici, *Determinarea reacţiunilor în cuplele cinematice ale mecanismelor plane prin metoda analizei armonice complexe.* Partea I — *Definirea şi sistematizarea parametrilor de calcul*, Partea II — *Algoritmele de calcul*, în vol. Simpozionul internaţional de mecanisme şi metode de proiectare pe calculator, vol. A, Bucureşti, 1973.
8. P. C. Wang, *Metode numerice şi matriceale în mecanica construcţiilor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1970.

ANALIZA ŞI SINTEZA STRUCTURAL GEOMETRICĂ A MECANISMELOR 3C

de CHR. PELECUDI*, D. IONESCU** şi ADRIANA MARINESCU*

Se dezvoltă posibilităţile de realizare ale mecanismelor cu trei cuple cilindrice şi a derivatelor acestora, elicoidale, de rotaţie sau translaţie, pe baza analizei deplasărilor şi vitezelor. Se începe cu prezentarea unor proprietăţi ale ecuaţiilor mecanismelor spaţiale şi cercetînd valorile posibile ale parametrilor cinematici şi geometrici se deduc condiţiile de existenţă ale diverselor mecanisme de familii diferite.

Prin mecanisme $3C$ se vor înţelege mecanismele care cuprind cuple cinematice cu trei axe de mişcare, fie pentru rotaţie, fie pentru translaţie. S-a întrebuinţat notaţia cuplei cilindrice întrucît este cea mai generală cuplă cu o singură axă în care translaţia şi rotaţia sînt independente şi deci mobilitatea este $f = 2$. Prin particularizare se obţin cuplele H elicoidală, R rotaţie, $T(P)$ translaţie (prismatică) cu mobilitatea $f = 1$. Mecanismele care pot fi formate cu aceste cuple sînt : $3C$, $2CH$, C 2 H, 3 H, unde cupla H poate fi înlocuită prin R sau T (fig. 1).

Fiecare din cele patru forme are mobilitatea 1 numai dacă mecanismele respective fac parte din familiile 1, 2, 3 sau 4 [1], iar mobilitatea scade, devenind chiar negativă, dacă familiile mecanismelor date sînt inferioare (pentru mecanismele monoconture mobilitatea creşte cu o unitate dacă familia creşte cu o unitate). În general, mecanismele de construcţie tridimensională ale grupei $3C$ sînt supraconstrînse $M_\varphi \leqslant 0$. Într-adevăr, mecanismul spaţial 3 C are mobilitatea nulă (familia zero $\varphi = 0$). Sînt însă unele mecanisme de construcţie specială care au mobilităţi superioare. Cele mai multe dintre acestea au, în cazul grupei cu trei axe, forme banale.

Astfel, în cadrul familiei $\varphi = 5$, cu mobilitatea $M_5 = m = 2$, sînt cuprinse mecanismele :

1) Mecanismele formate cu cuple separate H, R, sau T ale căror axe sînt confundate într-o singură axă.

* Institutul politehnic Bucureşti.
** Academia Militară.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 351–364.

2) Mecanismele formate cu cuple de translaţie ale căror axe sînt paralele (T).

Toate aceste sisteme mecanice cuprind corpuri ale căror mişcări sînt simple, fie de rotaţie, fie de translaţie, într-o singură direcţie.

În familia $\varphi = 4$, cu mobilitatea $M_4 = 2m - c_5 = 1$ ($m = 2$, $c_5 = 3$) se găsesc următoarele :

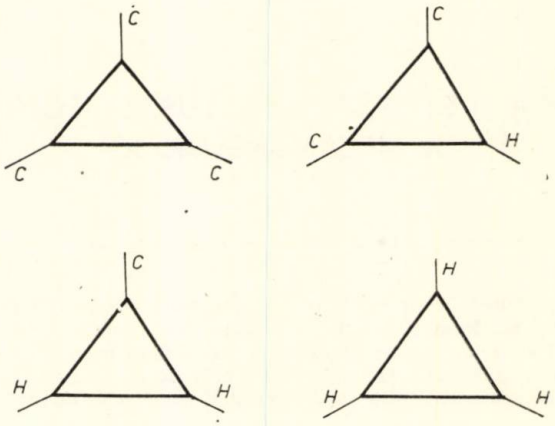


Fig. 1

1) Mecanisme formate din cuple C, H. R şi T cu axe confundate. Elementele cinematice ale acestor mecanisme au mişcări de rotaţie şi translaţie după o singură axă ($R + T$).

2) Mecanisme plane de translaţie care cuprind numai cuple de translaţie, iar elementele lor cinematice au mişcări de translaţie în direcţiile a două axe aşezate în planul mişcării (2 T).

3) Mecanismele plane sau sferice speciale în care numărul cuplelor de rotaţie este egal cu numărul elementelor $c_5 = m$, iar cuplele rosto-alunecătoare pot fi incluse între cuplele de rotaţie $c_5' = c_4 + c_5$, adică $M = 3m - 2c_5 - c_4 = 2m - c_5 - c_4 = 2m - c_5'$. Sînt mecanismele plane cu roţi cilindrice sau mecanismele sferice cu roţi conice de fricţiune fără alunecare. Prin frecare suficientă, alunecarea de translaţie sau de rotaţie este anulată şi cuplele rămîn pur rostogolitoare. Cele trei axe ale cuplelor de rotaţie sînt conţinute într-un singur plan şi sînt sau paralele, perpendiculare pe planul mişcării, sau concurente. Dacă însă frecarea nu este suficientă, pentru mecanismele de familia a doua, cupla rostoalunecătoare nu reprezintă nici o legătură, adică într-un astfel de mecanism cele două roţi se pot mişca independent $M = 2$.

Chiar din exemplificările celor două familii $\varphi = 5\,;\,4$ încadrarea mecanismelor spaţiale într-una sau alta din cele cinci familii, în raport cu criteriul mişcărilor simple oprite tuturor elementelor, este greoaie şi chiar uneori imposibilă. Criteriul respectiv are avantajul simplităţii şi pentru unele mecanisme este direct aplicabil [2]. Dar pentru mecanismele cu mai multe elemente şi cu diverse feluri de cuple H, R, T, C, lipsa unor mişcări ale elementelor nu poate fi uşor sesizată. O metodă sigură pentru clasificarea mobilităţii unui mecanism şi prin aceasta inclusiv a familiei,

este analizarea ecuațiilor de poziții sau de viteze. Pe această cale mai există posibilitatea de a se analiza existența mecanismelor cu anumite genuri de cuple sau de a se indica manivelele conducătoare, precum și alte proprietăți geometrice-cinematice ale mecanismelor.

Metoda deplasărilor. Întrebuințînd succesiunea $\bar{e}_i E_i$, $\bar{e}_{i+1}$[1], versorii axelor cuplelor și ai normalelor corpurilor sînt reprezentați în triedul bazei fixe TBF $(\bar{n}_0\ \bar{e}_0\ \bar{e}_1)$ prin:

$$\begin{aligned} \sin\alpha_0 \bar{e}_i &= \sin\alpha_0 A_i \bar{n}_0 + B_i \bar{e}_0 + C_i \bar{e}_1, \\ \sin\alpha_0 \bar{n}_i &= \sin\alpha_0 D_i \bar{n}_0 + E_i \bar{e}_0 + F_i \bar{e}_1, \end{aligned} \tag{1}$$

iar în triedrul bazei reciproce $(\bar{n}^0, \bar{e}^0, \bar{e}^1)$ [3] prin:

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= \mathscr{A}_i \bar{n}^0 + \mathscr{B}_i \bar{e}^0 + \mathscr{C}_i \bar{e}^1, \\ \bar{n}_i &= \mathscr{D}_i \bar{n}^0 + \mathscr{E}_i \bar{e}^0 + \mathscr{F}_i \bar{e}^1, \end{aligned} \tag{2}$$

în care $\bar{n}_0 = \bar{n}^0$; $\bar{e}_0 = \bar{e}^0 + \cos\alpha_0 \bar{e}^1$, $\bar{e}_1 = \cos\alpha_0 \bar{e}^0 + \bar{e}^1$, $A_i = \mathscr{A}_i$, $\sin\alpha_0 \mathscr{B}_i = B_i + \cos\alpha_0 C_i$, $\sin\alpha_0 \mathscr{C}_i = \cos\alpha_0 B_i + C_i$, $D_i = \mathscr{D}_i$, $\sin\alpha_0 \mathscr{E}_i = E_i + \cos\alpha_0 F_i$, $\sin\alpha_0 \mathscr{F}_i = \cos\alpha_0 E_i + F_i$ sînt funcțiuni de unghiurile de încrucișare α_i ale axelor și de unghiurile de rotație θ_i ale normalelor [1], [4].

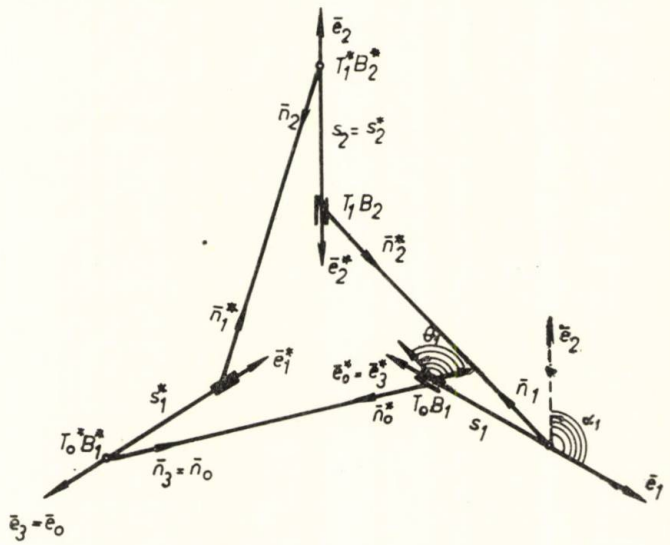


Fig. 2

Pentru obținerea ecuațiilor de poziții se descompune conturul unui mecanism în două multiplete, una simplă și alta stelată, cu același corp inițial și aceeași axă finală, astfel că din egalarea componentelor versorilor $\bar{e}_2 + \bar{e}_2^* = 0$ (fig. 2) pe axele TBF se găsesc ecuațiile de rotații:

$$\begin{aligned} A_2(\alpha_1 \theta_1) &= A_2^*(\alpha_1^* \theta_1^*), \\ B_2(\alpha_1 \theta_1) &= C_2^*(\alpha_0^* \alpha_1^* \theta_1^*), \\ C_2(\alpha_0 \alpha_1 \theta_1) &= B_2^*(\alpha_1^* \theta_1^*), \end{aligned} \tag{3}$$

iar prin egalarea componentelor vectorilor de poziție pe aceleași axe TBF se obțin ecuațiile de translații:

$$s_2 A_2(\alpha_1\theta_1) + a_0 + a_1 D_1(\theta_1) + a_1^* D_1^*(\theta_1^*) = 0,$$

$$\sin\alpha_0 s_0 + s_2 B_2(\alpha_1\theta_1) + a_1 E_1(\theta_1) + a_1^* F_1^*(\alpha_0\theta_1^*) = 0, \tag{4}$$

$$\sin\alpha_0 s_1 + s_2 C_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1) + a_1 F_1(\alpha_0\theta_1) + a_1^* E_1^*(\theta_1^*) = 0,$$

în care s-au notat cu a_i lungimile de încrucișare în direcția normalelor și prin s_i deplasările de translație de-a lungul axelor cuplelor.

Deoarece din setul ecuațiilor de rotații numai două sînt independente, pentru că $A_i^2\sin^2\alpha_0 + B_i^2 + 2B_iC_i\cos\alpha_0 + C_i^2 = \sin^2\alpha_0$, rămîn în total cinci ecuații cu cinci variabile s_0, s_1, s_2, θ_1, θ_1^*, ceea ce demonstrează că, în cazul ecuațiilor efective, sistemul mecanic $3C$ are gradul de mobilitate nul. Pentru aflarea unghiului $\theta_2 = \theta_2^*$ se adaugă ecuația:

$$\sin^2\alpha_0\cos\theta_2 = D_1D_1^*\sin^2\alpha_0 + E_1F_1^* + F_1E_1^* + \\ + (E_1E_1^* + F_1F_1^*)\cos\alpha_0. \tag{5}$$

Trebuie menționate următoarele proprietăți ale ecuațiilor de poziții:

— acceptînd stelarea ca pe o operație aplicabilă ecuațiilor și parametrilor de poziții cu proprietatea că dubla stelare anulează stelarea se observă că primele ecuații din cele două seturi rămîn aceleași, iar celelalte două ecuații din fiecare set se transformă una în alta. Dealtfel operația de stelare corespunde schimbării celor două multiplete, care formează mecanismul, între ele;

— dacă $\alpha_0 = 0$ avem $C = -B$, $F = -E$ și $\mathscr{C} = \mathscr{B}$, $\mathscr{F} = \mathscr{E}$, astfel că ultimele două ecuații din fiecare grupă devin identice. În realitate se pierde o singură ecuație din grupa de translație pentru că în grupa de rotații, în orice caz, sînt numai două ecuații independente. Pierderea este explicabilă prin faptul că triedrul bazei fixe degenerează, două din axele sale $\bar{e}_0$ și $\bar{e}_1$ fiind paralele;

— indicii parametrilor simpli geometrici și cinematici a, α, s, θ pot fi ridicați cu cîte o unitate, în timp ce indicii parametrilor stelați trebuie coborîți cu cîte o unitate, și invers. De fapt această operație corespunde mutării triedrului de referință (schimbarea bazei fixe). Aceeași operație de ridicare și reducere a indicilor se poate aplica funcțiunilor A, B, C din setul ecuațiilor de rotații, ceea ce corespunde secționării mecanismului în raport cu altă cuplă. Această transformare însoțită de păstrarea triedrului de referință face ca setul ecuațiilor de translații să rămînă același;

— ecuațiile de poziții se pot scrie pentru orice versori de axe și vectorii de poziție, dar se pare că separarea în două multiplete pe cît posibil simetrice conduce la ecuațiile cele mai simple. Sînt avantajoase pentru mecanismele cu număr impar de elemente;

— în multe cazuri întrebuinţarea triedrului de referinţă reciproc simplifică de asemenea ecuaţiile care se rescriu sub forma :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_2(\alpha_1\theta_1) &= \mathscr{A}_2^*(\alpha_1^*\theta_1^*), \\ \mathscr{B}_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1) &= \mathscr{C}_2^*(\alpha_1^*), \\ \mathscr{C}_2(\alpha_1) &= \mathscr{B}_2^*(\alpha_0^*\alpha_1^*\theta_1^*); \end{aligned} \tag{6}$$

$$s_2\mathscr{A}_2(\alpha_1\theta_1) + a_0 + a_1\mathscr{D}_1(\theta_1) + a_1^*\mathscr{D}_1^*(\theta_1^*) = 0,$$

$$(s_0 + \cos\alpha_0 s_1) + s_2\mathscr{B}_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1) + a_1\mathscr{E}_1(\alpha_0\theta_1) + a_1^*\mathscr{F}_1^*(0) = 0, \tag{7}$$

$$(\cos\alpha_0 s_0 + s_1) + s_2\mathscr{C}_2(\alpha_1) + a_1\mathscr{F}_1(0) + a_1^*\mathscr{E}_1^*(\alpha_0^*\theta_1^*) = 0;$$

$$\begin{aligned} \sin\alpha_0\cos\theta_2 &= \sin\alpha_0\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1^* + E_1\mathscr{F}_1^* + F_1\mathscr{E}_1^* = \\ &= \sin\alpha_0\cos\theta_2^* = \sin\alpha_0\mathscr{D}_1^*\mathscr{D}_1 + E_1^*\mathscr{F}_1 + F_1^*\mathscr{E}_1; \end{aligned} \tag{8}$$

— setul ecuaţiilor de translaţii reprezintă de fapt proiecţiile conturului vectorial al mecanismului ($\bar{W}_2 = \bar{W}_2^*$) pe axele triedrului TBF :

$$\begin{aligned} &s_0A_0(0) + s_1A_1(0) + s_2A_2(\alpha_1\theta_1) + a_0D_0(1) + a_1D_1(\theta_1) + a_2D_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) = 0, \\ &s_0B_0(\alpha_0) + s_1B_1(0) + s_2B_2(\alpha_1\theta_1) + a_0E_0(0) + a_1E_1(\theta_1) + a_2E_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) = 0, \\ &s_0C_0(0) + s_1C_1(\alpha_0) + s_2C_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1) + a_0F_0(0) + a_1F_1(\alpha_0\theta_1) + a_2F_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

care poate fi asociat şi cu un alt grup de ecuaţii de rotaţii obţinut din egalarea componentelor versorilor $\bar{n}_2 + \bar{n}_1^* = 0$ (fig. 2), adică

$$\begin{aligned} D_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) &= D_1^*(\theta_1^*), \\ E_2(\alpha_1\theta_1\theta_2) &= F_1^*(\alpha_0^*\theta_1^*), \\ F_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2) &= E_1^*(\theta_1^*), \end{aligned} \tag{10}$$

ceea ce demonstrează identitatea cu ecuaţiile (3,4). Se pot utiliza de asemenea componentele $\mathscr{E}_2(\alpha_0\alpha_1\theta_1\theta_2)$, $\mathscr{F}_2(\alpha_1\theta_2)$, $\mathscr{E}_1(\alpha_0\theta_1)$, $\mathscr{F}_1 = 0$;

— forma ultimelor ecuaţii poate fi redusă dacă se întrebuinţează triedrul axei motoare TAM ($\bar{e}_0\bar{n}_0\bar{n}_1$) ca triedru de referinţă (fig. 3), în care versorii axelor şi normalelor sînt reprezentaţi prin :

$$\begin{aligned} \sin\theta_0\bar{n}_i &= \sin\theta_0\, A_i\bar{e}_0 + B_i\bar{n}_0 + C_i\bar{n}_1, \\ \sin\theta_0\bar{e}_i &= \sin\theta_0\, D_i\bar{e}_0 + E_i\bar{n}_0 + F_i\bar{n}_1 \end{aligned} \tag{11}$$

sau în triedrul bazei reciproce $(\overline{e}^0\overline{n}^0\overline{n}^1)$ prin :

$$\begin{aligned}\overline{n}_i &= \mathscr{A}_i\overline{e}^0 + \mathscr{B}_i\overline{n}^0 + \mathscr{C}_i\overline{n}^1,\\ \overline{e}_i &= \mathscr{D}_i\overline{e}^0 + \mathscr{E}_i\overline{n}^0 + \mathscr{F}_i\overline{n}^1,\end{aligned} \tag{12}$$

cu $\overline{e}_0 = \overline{e}^0$, $\overline{n}_0 = \overline{n}^0 + \cos\theta_0\overline{n}^1$, $\overline{n}_1 = \cos\theta_0\overline{n}^0 + \overline{n}^1$,

$$\mathscr{A}_i = A_i,\ \sin\theta_0\mathscr{B}_i = B_i + \cos\theta_0 C_i,\ \sin\theta_0\mathscr{C}_i = \cos\theta_0 B_i + C_i,$$

$$\mathscr{D}_i = D_i,\ \sin\theta_0\mathscr{E}_i = E_i + \cos\theta_0 F_i,\ \sin\theta_0\mathscr{F}_i = \cos\theta_0 E_i + F_i.$$

Schimbînd succesiunea axelor cuplelor şi corpurilor $\overline{e}_{i-1}\,E_i\,\overline{e}_i[1]$, ecuaţiile anterioare (1, 2) se transformă prin echivalenţa $\overline{e}_i \leftrightarrow \overline{n}_i$, $\theta_i \leftrightarrow \alpha_i$, $s_i \leftrightarrow a_i$, adică devin :

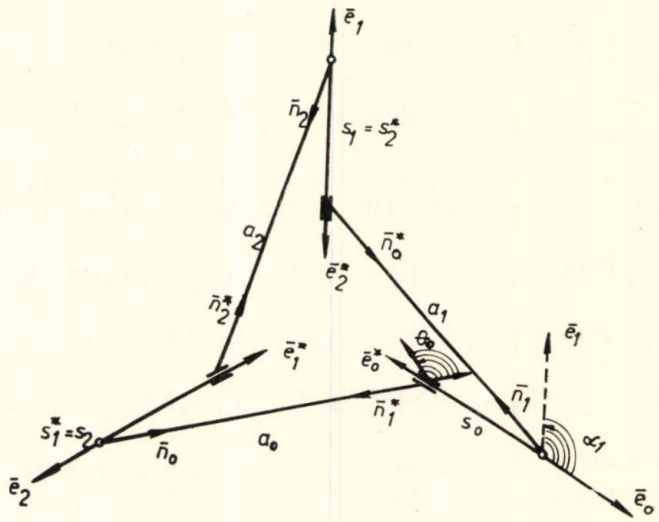


Fig. 3

$$\begin{aligned}&a_0A_0(0) + a_1A_1(0) + a_2A_2(\theta_1\alpha_1) + s_0D_0(1) + s_1D_1(1) +\\ &+ s_2D_2(\theta_1\alpha_1\alpha_2) = 0,\\ &a_0B_0(\theta_0) + a_1B_1(0) + a_2B_2(\theta_1\alpha_1) + s_0E_0(0) +\\ &+ s_1E_1(\alpha_1) + s_2E_2(\theta_1\alpha_1\alpha_2) = 0,\\ &a_0C_0(0) + a_1C_1(\theta_0) + a_2C_2(\theta_0\theta_1\alpha_1) + s_0F_0(0) +\\ &+ s_1F_1(\theta_0\alpha_1) + s_2F_2(\theta_0\theta_1\alpha_1\alpha_2) = 0\end{aligned} \tag{13}$$

şi

$$\begin{aligned}D_2(\theta_1\alpha_1\alpha_2) &= D_1^*(\alpha_1^*),\\ E_2(\theta_1\alpha_1\alpha_2) &= F_1^*(\theta_0^*\alpha_1^*),\\ F_2(\theta_0\theta_1\alpha_1\alpha_2) &= E_1^*(\alpha_1^*).\end{aligned} \tag{14}$$

Acest sistem prezintă avantajul că oricare parametru α_i, inclusiv α_0, poate fi nul, în schimb este necesar ca θ_0, variabil, să fie diferit de zero sau $k\pi$.

Explicitînd ecuaţiile (3, 4, 5) se obţine :

$$\bar{\alpha}_1\bar{\theta}_1 = \bar{\alpha}_1^*\bar{\theta}_1^*,$$

$$-\bar{\alpha}_1\bar{\bar{\theta}}_1 = \bar{\alpha}_0^*\bar{\alpha}_1^* + \bar{\bar{\alpha}}_0^*\bar{\alpha}_1^*\bar{\theta}_1^*, \tag{15}$$

$$\bar{\alpha}_0\bar{\bar{\alpha}}_1 + \bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\bar{\bar{\theta}}_1 = -\bar{\alpha}_1^*\bar{\theta}_1^*;$$

$$a_0 + s_2\bar{\alpha}_1\bar{\theta}_1 + a_1\bar{\theta}_1 + a_1^*\bar{\bar{\theta}}_1^* = 0,$$

$$\bar{\alpha}_0 s_0 - s_2\bar{\alpha}_1\bar{\bar{\theta}}_1 + a_1\bar{\theta}_1 - a_1^*\bar{\alpha}_0\bar{\theta}_1^* = 0, \tag{16}$$

$$\bar{\alpha}_0 s_1 - s_2\bar{\alpha}_1^*\bar{\bar{\theta}}_1^* - a_1\bar{\bar{\alpha}}_0\bar{\theta}_1 + a_1^*\bar{\theta}_1^* = 0;$$

$$\bar{\bar{\theta}}_2 = \Phi_2(\alpha_0\theta_1\theta_1^*) = \bar{\bar{\theta}}_1\bar{\theta}_1^* - \bar{\alpha}_0\bar{\theta}_1\bar{\theta}_1^* \tag{17}$$

sau, din ecuaţiile (6, 7, 8) avem :

$$\bar{\alpha}_1\bar{\theta}_1 = \bar{\alpha}_1^*\bar{\theta}_1^*,$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_0\bar{\bar{\alpha}}_1 - \bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\bar{\bar{\theta}}_1 = \bar{\bar{\alpha}}_1^*, \tag{18}$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_1 = \bar{\bar{\alpha}}_0\bar{\bar{\alpha}}_1^* - \bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1^*\bar{\bar{\theta}}_1^*;$$

$$a_0 + s_2\bar{\alpha}_1\bar{\theta}_1 + a_1\bar{\bar{\theta}}_1 + a_1^*\bar{\bar{\theta}}_1^* = 0,$$

$$(s_0 + \bar{\bar{\alpha}}_0 s_1) + s_2\bar{\bar{\alpha}}_1^* + a_1\bar{\alpha}_0\bar{\theta}_1 = 0, \tag{19}$$

$$(s_1 + \bar{\bar{\alpha}}_0 s_0) + s_2\bar{\bar{\alpha}}_1 + a_1^*\bar{\alpha}_0\bar{\theta}_1^* = 0;$$

$$\bar{\bar{\theta}}_2 = \bar{\bar{\theta}}_1\bar{\theta}_1^* - \bar{\bar{\alpha}}_0\bar{\theta}_1\bar{\theta}_1^* = \Phi_2(\alpha_0\theta_1\theta_1^*). \tag{20}$$

Dacă $\alpha_0 \neq k\pi$, $\alpha_1 \neq k\pi$, $\alpha_1^* \neq k\pi$, din (18) rezultă :

$$\bar{\bar{\theta}}_1 = \frac{\bar{\bar{\alpha}}_0\bar{\bar{\alpha}}_1 - \bar{\bar{\alpha}}_1^*}{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1} = \text{const.}, \qquad \theta_1 = \text{const.}, \tag{21}$$

$$\bar{\bar{\theta}}_1^* = \frac{\bar{\bar{\alpha}}_0\bar{\bar{\alpha}}_1^* - \bar{\bar{\alpha}}_1}{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1^*} = \text{const.}, \qquad \theta_1^* = \text{const.},$$

adică două ecuații sînt identic verificate, familia a doua, dar mecanismul $3C$ se reduce la TCT cu mobilitatea $M_2 = 4m - 3c_5 - 2c_4 = 0$, ceea ce se verifică și din ecuațiile (16) care livrează $s_2 = \text{const.}$, $s_0 = \text{const.}$ și $s_1 = \text{const.}$ Prin ciclarea indicilor în relațiile anterioare avem:

$$\bar{\bar{\theta}}_2 = \bar{\bar{\theta}}_2^* = \frac{\bar{\bar{\alpha}}_1\bar{\bar{\alpha}}_2 - \bar{\bar{\alpha}}_0}{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2} = \text{const.}, \quad \theta_2 = \text{const.}, \tag{22}$$

sau din ecuația (20) se constată de asemenea că $\theta_2 = \text{const.}$, și mecanismul ar putea fi de forma $3\ T$. În această situație, verificîndu-se identic trei ecuații, pentru valori spațiale α_i și a_i, mecanismul ar fi de familia a treia și mobilitatea continuă să fie $M_3 = 3m - 2c_5 = 0$. Pe de altă parte, pentru ca s_2 să fie variabil, prima ecuație din (16) cere ca $\theta_1 = k\pi$, mecanismul $3\ T$ devenind de familia a patra (patru identități) cu mobilitatea $M_4 = 2m - c_5 = 1$. Dar în acest caz mai trebuie ca $\theta_2 = k\pi$ și $\theta_1^* = k\pi$, adică mecanismul $3T$ este plan. Ultimele două ecuații (16) devin:

$$\bar{\alpha}_0 s_0 \pm \bar{\alpha}_1 s_2 = 0\,; \quad \bar{\alpha}_0 s_1 \pm \bar{\alpha}_1^* s_2 = 0, \tag{23}$$

care confirmă gradul de mobilitate egal cu unitatea.

Dacă $\alpha_0 \neq k\pi$, $\alpha_1 \neq k\pi$, dar $\alpha_1^* = k\pi$, reiese $\theta_1 = k\pi$, adică rămîne mecanismul $T\ 2\ C$ de familia întîia cu $M_1 = 5m - 4c_5 - 3c_4 = 0$. Luînd $\alpha_1 = k\pi \pm \alpha_0$ se verifică identic ecuațiile de rotații (15) și mecanismul $T2C$ devine de familia a doua, cu $M_2 = 4m - 3c_5 - 2c_4 = 1$. Apoi prima ecuație din setul de translații (16) devine $a_0 \pm a_1 + a_1^* \bar{\theta}_1^* = 0$, iar din ultima ecuație (20) se găsește că $\bar{\theta}_2 = \pm\, \bar{\theta}_1^*$, adică θ_1^* și θ_2^* sînt constante. Mecanismul se reduce la $3T$ de familia a patra, cu $M_4 = 2m - c_5 = 1$. Mai rămîn ecuațiile:

$$\bar{\alpha}_0 s_0 \pm \bar{\alpha}_0 s_2 - a_1^* \bar{\bar{\alpha}}_0 \bar{\theta}_1^* = 0,$$

$$\bar{\alpha}_0 s_1 + a_1^* \bar{\theta}_1^* = 0, \tag{24}$$

din care se constată că $s_1 = \text{const.}$, cupla T_1 devenind rigidă. Formația mecanică apare de familia a cincia cu două elemente și două cuple T paralele, adică $M_5 = m = 1$, ceea ce se confirmă prin prima ecuație din (24).

Dacă $\alpha_0 \neq k\pi$ dar $\alpha_1^* = k\pi$ și $\alpha_1 = k\pi$, se impune și $\alpha_0 = k\pi$ și rămîne $a_0 + a_1\bar{\theta}_1 + a_1^*\bar{\theta}_1^* = 0$, care prin ciclarea indicilor arată că θ_1, θ_1^* și $\theta_2^* = \theta_2$ sînt constante. Mecanismul este cu $3T$, de familia a cincia, adică cu mobilitatea $M_5 = m = 2$, confirmată de ecuația $s_0 \pm s_1 \pm \pm s_2 = 0$.

Metoda vitezelor. Se derivează ecuaţiile deplasărilor (fie cu litere drepte, fie cu litere ronde) şi se obţine în grup de relaţii liniare şi omogene :

$$-\bar{\theta}_2\dot{\theta}_2 = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta_1^*}\dot{\theta}_1^*, \tag{25}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 = \frac{\partial A_2^*}{\partial\theta_1^*}\dot{\theta}_1^*,$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 = \frac{\partial C_2^*}{\partial\theta_1^*}\dot{\theta}_1^*, \tag{26}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 = \frac{\partial B_2^*}{\partial\theta_1^*}\dot{\theta}_1^*,$$

$$\dot{s}_2 A_2 + s_2\frac{\partial A_2}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 + a_1\frac{\partial D_1}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 + a_1^*\frac{\partial D_1^*}{\partial\theta_1^*}\dot{\theta}_1^* = 0,$$

$$\dot{s}_1^*\bar{\alpha}_0 + \dot{s}_2 B_2 + s_2\frac{\partial B_2}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 + a_1\frac{\partial E_1}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 + a_1^*\frac{\partial F_1^*}{\partial\theta_1^*}\dot{\theta}_1^* = 0, \tag{27}$$

$$\dot{s}_1\bar{\alpha}_0 + \dot{s}_2 C_2 + s_2\frac{\partial C_2}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 + a_1\frac{\partial F_1}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1 + a_1^*\frac{\partial E_1^*}{\partial\theta_1^*}\dot{\theta}_1^* = 0,$$

faţă de variabilele vitezei liniare $\dot{s}$ sau unghiulare $\dot{\theta}$. La acestea se pot adăuga ecuaţiile care specifică natura cuplelor cinematice, respectiv arată legătura între vitezele liniară şi unghiulară relative :

$$\nu_i(r_i\dot{s}_i + t_i\dot{\theta}_i) = 0. \tag{28}$$

Pentru cupla elicoidală H, coeficienţii $\nu_i \neq 0$, $r_i \neq 0$, $t_i \neq 0$ sînt diferiţi de zero. Cupla de rotaţie R este caracterizată prin deplasarea s_i constantă, adică $t_i = 0$. Cupla de translaţie T are unghiul θ_i constant, adică $r_i = 0$. La cupla cilindrică C nu există nici o legătură între translaţie şi rotaţie, astfel că $\nu_i = 0$ (sau $t_i = r_i = 0$).

Sub formă matriceală ecuaţiile vitezelor se exprimă prin produsul matricei funcţionale cu matricea unicoloană a vitezelor relative care are drept rezultat matricea nulă (29).

Pentru a nu avea soluţii banale trebuie ca rangul matricei funcţionale să fie inferior numărului necunoscutelor vitezei, adică determinanţii bordaţi superiori rangului matricei trebuie să fie identici nuli în orice moment, indiferent de faptul că sînt formaţi cu cantităţi variabile. Fiecare din determinanţii bordaţi anulaţi constituie o condiţie din care rezultă, prin anularea coeficienţilor variabilelor, mai multe condiţii între para-

$\lambda_0^* = \lambda_0$	0	0	0	$\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_1}$	$\overline{\theta}_2 = \overline{\theta}_2^*$	$\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_1^*}$		
$-\lambda_1^* = \lambda_1$	0	0	0	$\dfrac{\partial A_2}{\partial \theta_1}$	0	$-\dfrac{\partial A_2^*}{\partial \theta_1^*}$	$\dot{s}_1^* = s_0$	
$-\lambda_3^* = \lambda_2$	0	0	0	$\dfrac{\partial B_2}{\partial \theta_1}$	0	$-\dfrac{\partial C_2^*}{\partial \theta_1^*}$	$\dot{s}_2^* = s_2$	
$-\lambda_2^* = \lambda_3$	0	0	0	$\dfrac{\partial C_2}{\partial \theta_1}$	0	$-\dfrac{\partial B_2^*}{\partial \theta_1^*}$	$\dot{s}_1$	
$\lambda_4^* = \lambda_4$	A_1^*	$A_2 = A_2^*$	A_1	$\dfrac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\dfrac{s_2 A_2}{2} + a_1 D_1\right)$	0	$\dfrac{\partial}{\partial \theta_1^*}\left(\dfrac{s_2^* A_2^*}{2} + a_1^* D_1^*\right)$	$\dot{\theta}_1$	$\equiv 0$
$\lambda_6^* = \lambda_5$	B_1^*	$B_2 = C_2^*$	B_1	$\dfrac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\dfrac{s_2 B_2}{2} + a_1 F_1\right)$	0	$\dfrac{\partial}{\partial \theta_1^*}\left(\dfrac{s_2^* C_2^*}{2} + a_1^* F_1^*\right)$	$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2^*$	
$\lambda_5^* = \lambda_6$	C_1^*	$C_2 = B_2^*$	C_1	$\dfrac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\dfrac{s_2 C_2}{2} + a_1 F_1\right)$	0	$\dfrac{\partial}{\partial \theta_1^*}\left(\dfrac{s_2^* B_2^*}{2} + a_1^* E_1^*\right)$	$\dot{\theta}_1^* = \theta_0$	
ν_1^*	r_1^*	0	0	0	0	t_1^*		
$\nu_2^* = \nu_2$	0	$r_2^* = r_2$	0	0	$t_2 = t_2^*$	0		
ν_1	0	0	r_1	t_1	0	0		

(29)

metrii geometrici a şi α ai mecanismului. Cum însă dezvoltarea determinanţilor este greoaie se poate utiliza condiţia ca o combinaţie liniară a liniilor sau coloanelor să se anuleze. Se găsesc astfel condiţiile, simple sau stelate, de formele :

$$\lambda_4 A_j + \lambda_5 B_j + \lambda_6 C_j + \nu_j r_j = 0, \tag{30}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_j} + \lambda_{14} \frac{\partial A_i}{\partial \theta_j} + \lambda_{25} \frac{\partial B_i}{\partial \theta_j} + \lambda_{36} \frac{\partial C_i}{\partial \theta_j} +$$

$$+ \lambda_4 \frac{\partial G_i}{\partial \theta_j} + \lambda_5 \frac{\partial H_i}{\partial \theta_j} + \lambda_6 \frac{\partial k_i}{\partial \theta_j} + \nu_j t_j = 0, \tag{31}$$

$$\lambda_0 \bar{\theta}_j + \nu_j t_j = 0, \tag{32}$$

cu

$$\lambda_0^* = \lambda_0 \quad ; \quad \lambda_1^* = -\lambda_1 \quad ; \quad \lambda_2^* = -\lambda_3 \quad ; \quad \lambda_3^* = -\lambda_2,$$

$$\lambda_4^* = \lambda_4 \quad ; \quad \lambda_5^* = \lambda_6 \quad ; \quad \lambda_6^* = \lambda_5,$$

$$\lambda_{14}^* = \lambda_1^* + \frac{\lambda_4^* s_2^*}{2} = -\lambda_1 + \frac{\lambda_4 s_2}{2}, \tag{33}$$

$$\lambda_{25}^* = \lambda_2^* + \frac{\lambda_5^* s_2^*}{2} = -\lambda_3 + \frac{\lambda_6 s_2}{2},$$

$$\lambda_{36}^* = \lambda_3^* + \frac{\lambda_6^* s_2^*}{2} = -\lambda_2 + \frac{\lambda_5 s_2}{2},$$

din care, prin eliminarea parametrului ν_j, se ajunge la relaţiile :

$$r_j \left[\lambda_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_j} + \lambda_{14} \frac{\partial A_i}{\partial \theta_j} + \lambda_{25} \frac{\partial B_i}{\partial \theta_j} + \lambda_{36} \frac{\partial C_i}{\partial \theta_j} + \right.$$

$$\left. + \lambda_4 \frac{\partial G_i}{\partial \theta_j} + \lambda_5 \frac{\partial H_i}{\partial \theta_j} + \lambda_6 \frac{\partial k_i}{\partial \theta_j} \right] = \tag{34}$$

$$= t_j (\lambda_4 A_j + \lambda_5 B_j + \lambda_3 C_j),$$

$$r_j \lambda_0 \bar{\theta}_j = t_j (\lambda_4 A_j + \lambda_5 B_j + \lambda_6 C_j). \tag{35}$$

Aceste relații se particularizează la mecanismul $3C$ astfel:

$$r_1\left[\lambda_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta_1}+\lambda_{14}\frac{\partial A_2}{\partial\theta_1}+\lambda_{25}\frac{\partial B_2}{\partial\theta_1}+\lambda_{36}\frac{\partial C_2}{\partial\theta_1}+\right.$$

$$\left.+\lambda_4\frac{\partial G_2}{\partial\theta_1}+\lambda_5\frac{\partial H_2}{\partial\theta_1}+\lambda_6\frac{\partial k_2}{\partial\theta_1}\right]= \tag{36}$$

$$=t_1[\lambda_4 A_1+\lambda_5 B_1+\lambda_6 C_1],$$

$$r_2\lambda_0\overline{\theta}_2=t_2[\lambda_4 A_2+\lambda_5 B_2+\lambda_6 C_2],$$

$$r_1^*\left[\lambda_0^*\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta_1^*}+\lambda_{14}^*\frac{\partial A_2^*}{\partial\theta_1^*}+\lambda_{25}^*\frac{\partial B_2^*}{\partial\theta_1^*}+\lambda_{36}^*\frac{\partial C_2^*}{\partial\theta_1^*}+\right.$$

$$\left.+\lambda_4^*\frac{\partial G_2^*}{\partial\theta_1^*}+\lambda_5^*\frac{\partial H_2^*}{\partial\theta_1^*}+\lambda_6^*\frac{\partial k_2^*}{\partial\theta_1^*}\right]=t_1^*[\lambda_4^* A_1^*+\lambda_5^* B_1^*+\lambda_6^* C_1^*],$$

respectiv

$$r_1[-\lambda_0(\overline{\theta}_1\overline{\overline{\theta}}_1^*+\overline{\overline{\alpha}}_0\overline{\overline{\theta}}_1\overline{\theta}_1^*)+\lambda_{14}\overline{\alpha}_1\overline{\theta}_1+\lambda_{25}\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1\overline{\theta}_1-$$

$$-\lambda_4 a_1\overline{\theta}_1+\lambda_5\overline{\alpha}_0 a_1\overline{\overline{\theta}}_1]=t_1[\lambda_5\overline{\overline{\alpha}}_0+\lambda_6],$$

$$r_2\lambda_0\overline{\theta}_2=t_2[\lambda_4\overline{\alpha}_1\overline{\theta}_1+\lambda_5(\overline{\overline{\alpha}}_0\overline{\overline{\alpha}}_1-\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1\overline{\overline{\theta}}_1)+\lambda_6\overline{\overline{\alpha}}_1], \tag{37}$$

$$r_1^*[-\lambda_0^*(\overline{\theta}_1^*\overline{\overline{\theta}}_1+\overline{\overline{\alpha}}_0\overline{\overline{\theta}}_1^*\overline{\theta}_1)+\lambda_{14}^*\overline{\alpha}_1^*\overline{\overline{\theta}}_1^*+$$

$$\lambda_{25}^*\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1^*\overline{\theta}_1^*-\lambda_4^* a_1^*\overline{\theta}_1^*+\lambda_5^*\overline{\alpha}_0 a_1^*\overline{\overline{\theta}}_1^*]=t_1^*[\lambda_5^*\overline{\overline{\alpha}}_0+\lambda_6^*].$$

La îndeplinirea identică a acestor condiții numărul de parametri λ, independenți, oarecare constituie familia mecanismului respectiv deoarece un număr corespunzător de ecuații nu sînt independente. Spre exemplu la mecanismul $3T$ rămîn condițiile ($r_i=0$):

$$\lambda_5\overline{\overline{\alpha}}_0+\lambda_6=0,$$

$$\lambda_4\overline{\alpha}_1\overline{\theta}_1+\lambda_5(\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1-\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1\overline{\overline{\theta}}_1)+\lambda_6\overline{\alpha}_1=0, \tag{38}$$

$$\lambda_5^*\overline{\overline{\alpha}}_0+\lambda_6^*=0$$

sau

$$\lambda_6 = -\overline{\overline{\alpha}}_0 \lambda_5,$$

$$\overline{\alpha}_1 (\lambda_4 \overline{\theta}_1 - \lambda_5 \overline{\alpha}_0 \overline{\theta}_1) = 0, \tag{39}$$

$$\overline{\alpha}_0^2 \lambda_5 = 0.$$

Aceste condiţii sînt îndeplinite pentru $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 0$ şi $\lambda_4 = 0$, deci mecanismul $3T$ general este de familia a treia, iar parametrii $(\lambda_0)\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ sînt oarecari. Dacă însă $\lambda_5 = 0$, $\lambda_3 = 0$, dar $\theta_1 = k\pi$, atunci mecanismul $3T$ este de familia a patra, parametrii $(\lambda_0)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ fiind independenţi. Apoi pentru $\overline{\alpha}_0 = 0$ şi $\overline{\alpha}_1 = 0$ (sau $\overline{\theta}_1 = 0$) rămîne numai condiţia $\lambda_6 = -\lambda_5$, adică parametrii $(\lambda_0)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5$ sînt oarecari şi mecanismul este de familia a cincea.

Sinteza structural-geometrică, adică determinarea parametrilor geometrici a şi α, eventual s şi θ, astfel ca un mecanism cu un anumit fel de cuple să existe într-una din familii, adică să aibă o mobilitate determinată, se poate realiza şi prin inspectarea directă a ecuaţiilor de viteze şi poziţii variabile. Astfel la mecanismul $3T$, ecuaţiile de rotaţii sînt identic verificate pentru că $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1^* = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2^* = 0$, confirmînd că mecanismul este de familia a treia. Rămîn numai ecuaţiile de translaţii sub formă redusă:

$$\begin{aligned} &\dot{s}_2 A_2 = 0, \\ &\dot{s}_1^* \overline{\alpha}_0 + \dot{s}_2 B_2 = 0, \\ &\dot{s}_1 \overline{\alpha}_0 + \dot{s}_2 C_2 = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Impunînd condiţia $A_2 \equiv 0$, deci cu $\overline{\theta}_1 = 0$ sau $\overline{\alpha}_1 = 0$, mecanismul devine de familia patru, cu un grad de mobilitate. Cu $\overline{\alpha}_1 = 0$, $\overline{\alpha}_0 = 0$, $\overline{\alpha}_1^* = 0$ relaţiile anterioare sînt identic nule şi mecanismul este de familia a cincea cu două grade de mobilitate. Trebuie subliniat că se pot analiza direct numai ecuaţiile de poziţii, dar este mai simplu a se face o inspectare a ecuaţiilor de viteze. Acestea conduc la unele determinări de parametri care pot fi completate apoi prin determinările impuse la ecuaţiile de poziţii-deplasări.

Mecanismul 2 TR nu poate exista deoarece dacă $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1^* = 0$, ecuaţiile de rotaţie cer şi $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2^* = 0$.

La mecanismul 3 R condiţiile de existenţă (36) se reduc la

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_1} + \lambda_{14} \overline{\alpha}_1 \overline{\overline{\theta}}_1 + \lambda_{25} \overline{\alpha}_0 \overline{\alpha}_1 \overline{\theta}_1 - a_1 \lambda_4 \overline{\theta}_1 + \overline{\alpha}_0 a_1 \lambda_5 \overline{\overline{\theta}}_1 = 0, \\ &\lambda_0^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta_1^*} + \lambda_{14}^* \overline{\alpha}_1^* \overline{\overline{\theta}}_1^* + \lambda_{25}^* \overline{\alpha}_0 \overline{\alpha}_1^* \overline{\theta}_1^* - a_1^* \lambda_4^* \overline{\theta}_1^* + \overline{\alpha}_0 a_1^* \lambda_5^* \overline{\overline{\theta}}_1^* = 0, \\ &\lambda_2 \overline{\theta}_2 = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

care cer

$$\lambda_0 = 0\,;\ \bar{\theta}_1(\lambda_{25}\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1 - a_1\lambda_4) + \bar{\bar{\theta}}_1(\lambda_{14}\bar{\alpha}_1 + \lambda_5\bar{\alpha}_0 a_1) = 0,$$
$$\bar{\theta}_1^*(\lambda_{25}^*\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1^* - a_1^*\lambda_4^*) + \bar{\bar{\theta}}_1^*(\lambda_{14}^*\bar{\alpha}_1^* + \lambda_5^*\bar{\alpha}_0 a_1^*) = 0, \tag{42}$$

adică

$$\begin{aligned}
&\lambda_{25}\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1 - a_1\lambda_4 = 0,\\
&\lambda_{14}\bar{\alpha}_1 + \lambda_5\bar{\alpha}_0 a_1 = 0,\\
&\lambda_{25}^*\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1^* - a_1^*\lambda_4^* = 0,\\
&\lambda_{14}^*\bar{\alpha}_1^* + \lambda_5^*\bar{\alpha}_0 a_1^* = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Ultimele reprezintă patru ecuații între $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, s_2$, șapte parametrii, dacă $\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_1^*\,a_1\,a_1^*$ sînt oarecari. Rămîn trei parametri independenți și mecanismul ar fi de familia a treia cu mobilitatea nulă. Dacă însă $\bar{\alpha}_1 = 0$, $\bar{\alpha}_1^* = 0$, $a_1 = 0$, $a_1^* = 0$, toți parametrii λ_i sînt independenți afară de $\lambda_0 = 0$ și deci mecanismul este de familia a cincea cu două grade de mobilitate.

În sfîrșit, la același mecanism ecuațiile de viteze sînt :

$$\begin{aligned}
&\bar{\alpha}_1\bar{\bar{\theta}}_1\dot{\theta}_1 = \bar{\alpha}_1^*\bar{\bar{\theta}}_1^*\dot{\theta}_1^*,\\
&\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\bar{\theta}_1\dot{\theta}_1 = 0,\\
&0 = \bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1^*\bar{\theta}_1^*\dot{\theta}_1^*,
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
&(s_2\bar{\alpha}_1\bar{\bar{\theta}}_1 - a_1\bar{\theta}_1)\dot{\theta}_1 - a_1^*\bar{\theta}_1^*\dot{\theta}_1^* = 0,\\
&\bar{\alpha}_0 a_1\bar{\bar{\theta}}_1\dot{\theta}_1 = 0,\\
&\bar{\alpha}_0 a_1^*\bar{\bar{\theta}}_1^*\dot{\theta}_1^* = 0,
\end{aligned} \tag{45}$$

care dau soluția banală $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1^* = 0$, adică mecanismul $3R$ nu poate exista. Pentru $a_1 = a_1^* = \alpha_1 = \alpha_1^* = 0$ se regăsește soluția anterioară.

Se conchide că în grupa $3C$ singurul mecanism nebanal este mecanismul $3\,T$ plan.

Primită la redacție la 5 septembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, *Teoria mecanismelor spațiale*, Edit. Academiei, 1967.
2. — *Bazele analizei mecanismelor*, Edit. Academiei, 1972.
3. CHR. PELECUDI, A. MARINESCU, *Some transformations of the position functions of three-dimensional multiplet*, Revue Roumaine des Sciences Techniques. Série de Mécanique Appliquée, **18**, *1* (1973).
4. CHR. PELECUDI, *Determinarea matriceală a deplasărilor în mecanismele spațiale*, St. cerc. mec. apl., **30**, *1* (1971).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL VIBRAȚIILOR MECANISMELOR PLANE DIN FAMILIA A TREIA

de M. BUCULEI, SEVASTULA MIȚIS și I. POPESCU
Universitatea din Craiova

Lucrarea are drept scop determinarea ecuațiilor vibrațiilor transversale pentru principalele tipuri de rezemare ale elementelor sub formă de bară care intervin în construcția mecanismelor plane din familia a treia. Se consideră cazul barelor sprijinite pe trei reazeme, dintre care unul sau două reazeme sînt mobile. Se indică o metodă de calcul a mecanismelor la vibrații folosind calculatorul electronic.

1. În timpul funcționării unui mecanism plan, format din bare supuse acțiunii unor forțe perturbatoare exterioare, se poate produce intrarea în rezonanță a unui element pentru o anumită poziție a mecanismului. Se pune deci în mod natural problema stabilirii pulsațiilor proprii pentru fiecare element (bară) al mecanismului. Pentru vibrațiile transversale ale barelor cu două sau trei articulații se pot folosi rezultatele din [2]. Un caz frecvent îl constituie, însă, barele care conțin unul sau două reazeme mobile realizate prin pietre de culisă. Un studiu referitor la barele articulate la unul din capete și avînd un al doilea reazem sub forma unei pietre de culisă se poate găsi în [3].

Lucrarea de față se limitează la mecanismele plane de familia a treia, decompozabile în bare ale căror condiții de rezemare se integrează în variantele ce vor fi studiate mai jos. Se pune deci în primul rînd problema determinării pulsațiilor proprii pentru principalele tipuri de rezemare ale elementelor sub formă de bară care intervin la astfel de mecanisme.

Rezemarea prin pietre de culisă se presupune a fi realizată prin reazeme elastice de lungime finită. O tratare a cazului unei bare sprijinită pe două reazeme elastice de lungime finită a fost făcută în [1].

2. Lucrarea își propune deci în primul rînd stabilirea ecuațiilor de calcul a pulsațiilor proprii pentru cazurile de rezemare care intervin mai frecvent la mecanismele din familia a treia, în special pentru barele sprijinite pe trei reazeme, dintre care unul sau două reazeme sînt mobile.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 365–378

În cele ce urmează vom nota prin R un reazem realizat printr-o articulație și cu T un reazem mobil elastic, realizat printr-o piatră de culisă. Se presupune îndeplinită, pentru reazemul elastic, ipoteza lui Winckler [2].

a) Bară RTR (fig. 1).

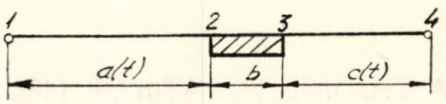


Fig. 1

Pentru porțiunea liberă a barei, ecuația vibrației este [2]:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

unde

$$C = \sqrt{\frac{EI}{\rho}},$$

E — modulul de elasticitate longitudinal,
I — momentul de inerție,
ρ — densitatea.

Punînd

$$w(x, t) = W(x) \cdot e^{i\omega t}, \tag{2}$$

unde ω este pulsația proprie, și înlocuind în (1) se obține ecuația ordinară

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \lambda^4 W = 0, \tag{3}$$

unde

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2}{c^2}}. \tag{4}$$

Pentru porțiunea situată pe reazemul elastic, ecuația vibrației devine după ce se face substituția (2):

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \varkappa^4 W = 0, \tag{5}$$

unde

$$\varkappa = \sqrt[4]{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k}{EI}},$$

k — modulul reazemului elastic.

Soluția ecuației (3) este

$$W(x) = C_1 \cdot S(\lambda x) + \frac{1}{\lambda} C_2 \cdot T(\lambda x) + \frac{1}{\lambda^2} C_3 \cdot U(\lambda x) + \frac{1}{\lambda^3} C_4 \cdot V(\lambda x), \qquad (6)$$

unde funcțiile S, T, U, V sînt date în [2].

Soluția ecuației (5) este

$$W(x) = C_5 S(\varkappa x) + \frac{1}{\varkappa} C_6 T(\varkappa x) + \frac{1}{\varkappa^2} C_7 U(\varkappa x) + \frac{1}{\varkappa^3} C_8 V(\varkappa x). \qquad (7)$$

Punînd condiții la limită adecvate, se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}
&W_{1-2}(0) = 0,\\
&W''_{1-2}(0) = 0,\\
&W_{1-2}(a) = W_{2-3}(0),\\
&W'_{1-2}(a) = W'_{2-3}(0),\\
&W''_{1-2}(a) = W''_{2-3}(0),\\
&W'''_{1-2}(a) = W'''_{2-3}(0),\\
&W_{2-3}(b) = W_{3-4}(0),\\
&W'_{2-3}(b) = W'_{3-4}(0),\\
&W''_{2-3}(b) = W''_{3-4}(0),\\
&W'''_{2-3}(b) = W'''_{3-4}(0),\\
&W_{3-4}(c) = 0,\\
&W''_{3-4}(c) = 0.
\end{aligned} \qquad (8)$$

Folosind ecuațiile (6) și (7) și explicitînd, sistemul (8) se transformă într-un sistem omogen în $C_1 - C_{12}$.

Punînd condiția de nebanalitate a soluției sistemului, se obține următoarea ecuație pentru pulsațiile proprii:

$$
\begin{vmatrix}
\frac{1}{\lambda}T(\lambda a) & \frac{1}{\lambda^3}V(\lambda a) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(\lambda a) & \frac{1}{\lambda^2}U(\lambda a) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda V(\lambda a) & \frac{1}{\lambda}T(\lambda a) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda^2 U(\lambda a) & S(\lambda a) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & S(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa}T(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa^2}U(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa^3}V(\varkappa b) & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \varkappa V(\varkappa b) & S(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa}T(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa^2}U(\varkappa b) & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \varkappa^2 U(\varkappa b) & \varkappa V(\varkappa b) & S(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa}T(\varkappa b) & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \varkappa^3 T(\varkappa b) & \varkappa^2 U(\varkappa b) & \varkappa V(\varkappa b) & S(\varkappa b) & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(\lambda c) & \frac{1}{\lambda}T(\lambda c) & \frac{1}{\lambda^2}U(\lambda c) & \frac{1}{\lambda^3}V(\lambda c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 U(\lambda c) & \lambda V(\lambda c) & S(\lambda c) & \frac{1}{\lambda}T(\lambda c)
\end{vmatrix} = 0. \qquad (9)
$$

Este evident că în ecuația de mai sus a și c sînt funcții de poziția mecanismului, căci reazemul din mijloc este mobil.

b) Bară $R\,R\,T$ (fig. 2).

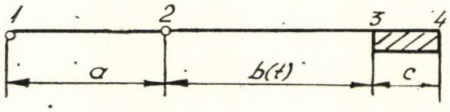


Fig. 2

Procedînd în mod analog ca și la punctul a se obține următorul sistem de condiții la limită:

$$
\begin{aligned}
&W_{1-2}(0) = 0,\\
&W''_{1-2}(0) = 0,\\
&W_{1-2}(a) = W_{2-3}(0),\\
&W_{1-2}(a) = 0,\\
&W'_{1-2}(a) = W'_{2-3}(0),\\
&W''_{1-2}(a) = W''_{2-3}(0),\\
&W_{2-3}(b) = W_{3-4}(0),\\
&W'_{2-3}(b) = W'_{3-4}(0),\\
&W''_{2-3}(b) = W''_{3-4}(0),\\
&W'''_{2-3}(b) = W'''_{3-4}(0),\\
&W''_{3-4}(c) = 0,\\
&W'''_{3-4}(c) = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Explicitînd sistemul (10) se obține un sistem omogen în $C_1 - C_{12}$. Punînd condiția de nebanalitate a soluțiilor se obține ecuația pulsațiilor proprii:

$$\begin{vmatrix}
\frac{1}{\lambda}T(\lambda a) & \frac{1}{\lambda^3}V(\lambda a) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(\lambda a) & \frac{1}{\lambda^2}U(\lambda a) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda V(\lambda a) & \frac{1}{\lambda}T(\lambda a) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\lambda}T(\lambda b) & \frac{1}{\lambda^2}U(\lambda b) & \frac{1}{\lambda^3}V(\lambda b) & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & S(\lambda b) & \frac{1}{\lambda}T(\lambda b) & \frac{1}{\lambda^2}U(\lambda b) & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda V(\lambda b) & S(\lambda b) & \frac{1}{\lambda}T(\lambda b) & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \lambda^2 U(\lambda b) & \lambda V(\lambda b) & S(\lambda b) & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varkappa^2 U(\varkappa c) & \varkappa V(\varkappa c) & S(\varkappa c) & \frac{1}{\varkappa}(T\varkappa c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varkappa^3 T(\varkappa c) & \varkappa^2 U(\varkappa c) & \varkappa V(\varkappa c) & S(\varkappa c)
\end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Dezvoltînd determinantul, ecuația devine :

$$\frac{1}{\lambda}(\cos\lambda a \cdot \operatorname{sh}\lambda a - \sin\lambda a \cdot \operatorname{ch}\lambda a) \cdot \left[\frac{\varkappa^4}{\lambda^3}(\cos\lambda b \cdot \operatorname{sh}\lambda b - \sin\lambda b \cdot \operatorname{ch}\lambda b) \times \right.$$

$$\times (1 - \cos \varkappa c \cdot \operatorname{ch} \varkappa c) + \frac{\varkappa^3}{\lambda^2} \sin\lambda b \cdot \operatorname{sh}\lambda b (\cos \varkappa c \cdot \operatorname{sh} \varkappa c + \sin \varkappa c \cdot \operatorname{ch} \varkappa c) +$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{\lambda}(\cos\lambda b \cdot \operatorname{sh}\lambda b + \sin\lambda b \cdot \operatorname{ch}\lambda b) \sin \varkappa c \cdot \operatorname{sh} \varkappa c - \varkappa \cos\lambda b \times$$

$$\times \operatorname{ch}\lambda b (\cos \varkappa c \cdot \operatorname{sh} \varkappa c - \sin \varkappa c \cdot \operatorname{ch} \varkappa c) - \lambda(\cos\lambda b \cdot \operatorname{sh}\lambda b - \sin\lambda b \cdot \operatorname{ch}\lambda b) \times$$

$$\left. \times (1 + \cos \varkappa c \cdot \operatorname{ch} \varkappa c) \right] + \sin\lambda a \cdot \operatorname{sh}\lambda a \left[\frac{\varkappa^4}{\lambda^4}(1 - \cos\lambda b \cdot \operatorname{ch}\lambda b) \times \right.$$

$$\times (1 - \cos \varkappa c \cdot \operatorname{ch} \varkappa c) + \frac{\varkappa^3}{\lambda^3}(\cos\lambda b \cdot \operatorname{sh}\lambda b - \sin\lambda b \cdot \operatorname{ch}\lambda b) \times$$

$$\times (\cos \varkappa c \cdot \operatorname{sh} \varkappa c + \sin \varkappa c \cdot \operatorname{ch} \varkappa c) - \frac{2\varkappa^2}{\lambda^2} \sin\lambda b \cdot \operatorname{sh}\lambda b \cdot \sin \varkappa c \cdot \operatorname{sh} \varkappa c +$$

$$+ \frac{\varkappa}{\lambda}(\cos\lambda b \cdot \operatorname{sh}\lambda b + \sin\lambda b \cdot \operatorname{ch}\lambda b)(\cos \varkappa c \cdot \operatorname{sh} \varkappa c - \sin \varkappa c \cdot \operatorname{ch} \varkappa c) +$$

$$\left. + (1 + \cos\lambda b \cdot \operatorname{ch}\lambda b)(1 + \cos \varkappa c \cdot \operatorname{ch} \varkappa c) \right] = 0. \tag{12}$$

c) Bara *R T T* (fig. 3).

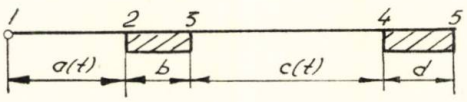


Fig. 3

Condițiile la limită sînt :

$$\begin{aligned}
&W'_{1-2}(0) = 0; && W''_{1-2}(0) = 0,\\
&W_{1-2}(a) = W_{2-3}(0); && W'_{1-2}(a) = W'_{2-3}(0),\\
&W''_{1-2}(a) = W''_{2-3}(0); && W'''_{1-2}(a) = W'''_{2-3}(0),\\
&W_{2-3}(b) = W_{3-4}(0); && W'_{2-3}(b) = W'_{3-4}(0),\\
&W''_{2-3}(b) = W''_{3-4}(0); && W'''_{2-3}(b) = W'''_{3-4}(0),\\
&W_{3-4}(c) = W_{4-5}(0); && W'_{3-4}(c) = W'_{4-5}(0),\\
&W''_{3-4}(c) = W''_{4-5}(0); && W'''_{3-4}(c) = W'''_{4-5}(0),\\
&W''_{4-5}(d) = 0; && W'''_{4-5}(d) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Ecuația pulsațiilor proprii este :

$$
\begin{vmatrix}
\frac{1}{\lambda}T(\lambda a) & \frac{1}{\lambda^3}V(\lambda a) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(\lambda a) & \frac{1}{\lambda^2}U(\lambda a) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda V(\lambda a) & \frac{1}{\lambda}T(\lambda a) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\lambda^2 U(\lambda a) & S(\lambda a) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & S(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa}T(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa^2}U(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa^3}V(\varkappa b) & -1 \\
0 & 0 & \varkappa V(\varkappa b) & S(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa}T(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa^2}U(\varkappa b) & 0 \\
0 & 0 & \varkappa^2 U(\varkappa b) & \varkappa V(\varkappa b) & S(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa}T(\varkappa b) & 0 \\
0 & 0 & \varkappa^3 T(\varkappa b) & \varkappa^2 U(\varkappa b) & \varkappa V(\varkappa b) & S(\varkappa b) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(\lambda c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda V(\lambda c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 U(\lambda c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3 T(\lambda c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

d) Bară $T\ R\ T$ (fig. 4).

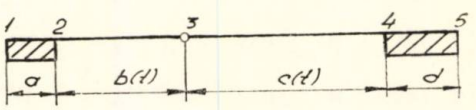


Fig. 4

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\lambda} T(\lambda c) & \frac{1}{\lambda^2} U(\lambda c) & \frac{1}{\lambda^3} V(\lambda c) & -1 & 0 & 0 & 0 \\
S(\lambda c) & \frac{1}{\lambda} T(\lambda c) & \frac{1}{\lambda^2} U(\lambda c) & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\lambda V(\lambda c) & S(\lambda c) & \frac{1}{\lambda} T(\lambda c) & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\lambda^2 U(\lambda c) & \lambda V(\lambda c) & S(\lambda c) & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \varkappa^2 U(\varkappa d) & \varkappa V(\varkappa d) & S(\nu d) & \frac{1}{\varkappa} T(\varkappa d) \\
0 & 0 & 0 & \nu^3 T(\varkappa d) & \nu^2 U(\varkappa d) & \nu V(\varkappa d) & S(\varkappa d)
\end{vmatrix} = 0. \tag{14}
$$

Condițiile la limită sînt:

$$
\begin{array}{lll}
W''_{1-2}(0) = 0; & W'''_{1-2}(0) = 0; & W_{1-2}(a) = W_{2-3}(0), \\
W'_{1-2}(a) = W'_{2-3}(0); & W''_{1-2}(a) = W''_{2-3}(0); & W'''_{1-2}(a) = W'''_{2-3}(0), \\
W_{2-3}(b) = W_{3-4}(0); & W'_{2-3}(b) = W'_{3-4}(0); & W''_{2-3}(b) = W''_{3-4}(0), \\
W_{3-4}(0) = 0; & W_{3-4}(c) = W_{4-5}(0); & W'_{3-4}(c) = W'_{4-5}(0), \\
W''_{3-4}(c) = W''_{4-5}(0); & W'''_{3-4}(c) = W'''_{4-5}(0); & W'_{4-5}(d) = 0; \\
 & W'''_{4-5}(d) = 0. &
\end{array} \tag{15}
$$

Ecuaţia pulsaţiilor proprii este :

$$
\begin{vmatrix}
S(\varkappa a) & \frac{1}{\varkappa} T(\varkappa a) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\varkappa V(\varkappa a) & S(\varkappa a) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\varkappa^2 U(\varkappa a) & \varkappa V(\varkappa a) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\varkappa^3 T(\varkappa a) & \varkappa^2 U(\varkappa a) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & S(\lambda b) & \frac{1}{\lambda} T(\lambda b) & \frac{1}{\lambda^2} U(\lambda b) & \frac{1}{\lambda^3} V(\lambda b) & 0 \\
0 & 0 & \lambda V(\lambda b) & S(\lambda b) & \frac{1}{\lambda} T(\lambda b) & \frac{1}{\lambda^2} U(\lambda b) & -1 \\
0 & 0 & \lambda^2 U(\lambda b) & \lambda V(\lambda b) & S(\lambda b) & \frac{1}{\lambda} T(\lambda b) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} T(\lambda c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(\lambda c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda V(\lambda c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 U(\lambda c) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

e) Bară $R\ T$ (fig. 5).

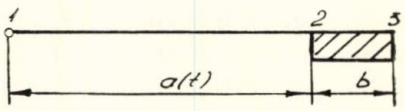


Fig. 5

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\lambda^2} U(\lambda c) & \frac{1}{\lambda^3} V(\lambda c) & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\lambda} T(\lambda c) & \frac{1}{\lambda^2} U(\lambda c) & 0 & -1 & 0 & 0 \\
S(\lambda c) & \frac{1}{\lambda} T(\lambda c) & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\lambda V(\lambda c) & S(\lambda c) & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & \varkappa^2 U(\varkappa d) & \varkappa V(\varkappa d) & S(\varkappa d) & \frac{1}{\varkappa} T(\varkappa d) \\
0 & 0 & \varkappa^3 T(\varkappa d) & \varkappa^2 U(\varkappa d) & \varkappa V(\varkappa d) & S(\varkappa d)
\end{vmatrix} = 0. \tag{16}
$$

Condițiile la limită sînt:

$$
\begin{aligned}
&W_{1-2}(0) = 0; && W''_{1-2}(0) = 0, \\
&W_{1-2}(a) = W_{2-3}(0); && W'_{1-2}(a) = W'_{2-3}(0), \\
&W''_{1-2}(a) = W''_{2-3}(0); && W'''_{1-2}(a) = W'''_{2-3}(0), \\
&W''_{2-3}(b) = 0; && W'''_{2-3}(b) = 0.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Ecuația pulsațiilor proprii este:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda}\cdot T(\lambda a) & \frac{1}{\lambda^3}\cdot V(\lambda a) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ S(\lambda a) & \frac{1}{\lambda^2}\cdot U(\lambda a) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda\cdot V(\lambda a) & \frac{1}{\lambda}\cdot T(\lambda a) & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2\cdot U(\lambda a) & S(\lambda a) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varkappa^2\cdot U(\varkappa b) & \varkappa\cdot V(\varkappa b) & S(\varkappa b) & \frac{1}{\varkappa}\cdot T(\varkappa b) \\ 0 & 0 & \varkappa^3\cdot T(\varkappa b) & \varkappa^2\cdot U(\varkappa b) & \varkappa\cdot V(\varkappa b) & S(\varkappa b) \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Cazurile de rezemare expuse mai sus acoperă principalele situații întîlnite în cazul mecanismelor plane din familia a treia. Lucrarea de față se limitează la mecanismele care au bare pe cel mult trei reazeme.

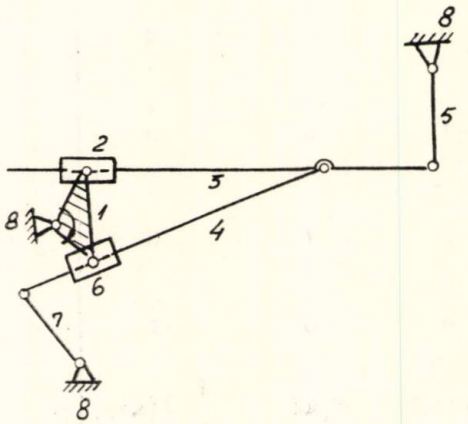


Fig. 6

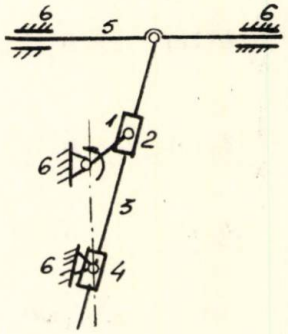


Fig. 7

Ca exemplu să considerăm mecanismele din figurile 6 și 7. Se vede că pentru determinarea pulsațiilor proprii se pot folosi cazurile precedente și anume:

— mecanismul din figura 6:
  — pentru bara 3 se folosește cazul b), deci formula (11);
  — pentru bara 4 se folosește cazul a), deci formula (9);
— mecanismul din figura 7:
  — pentru bara 3 se folosește cazul c), deci formula (14);
  — pentru bara 5 se folosește cazul d), deci formula (16);

În lucrarea de față s-au luat în considerație numai vibrațiile transversale ale barelor mecanismului. Vibrațiile parametrice ale acestora pot face subiectul unei alte lucrări.

3. Ecuațiile (9), (11), (14), (16), (18) sînt ecuații transcendente în pulsația proprie ω. Așa cum se constată, soluționarea lor duce la un volum mare de calcul. De aceea singura cale rațională pentru verificarea unui mecanism la vibrații este folosirea calculatoarelor electronice.

Pentru o anumită bară i și o anumită poziție φ a mecanismului corespunde un șir de pulsații proprii $\{\omega_i^k \mid k \in N\}$. Se remarcă că poziția este dată prin coordonata langrangeiană φ, care poate fi în particular unghiul de rotație sau deplasarea elementului conducător. Rezonanța se produce atunci cînd una dintre pulsațiile proprii ω_i^k coincide cu una dintre pulsațiile încărcării transversale perturbatoare, pentru o anumită poziție a mecanismului, numită poziție critică.

Încărcarea perturbatoare poate avea pulsații proprii constante sau variabile în funcție de poziția φ a mecanismului.

În continuare se dă schema logică pentru un calculator numeric (fig. 8). În cadrul acestei scheme s-a notat cu :

$\bar{\omega}_i^k$ — mulțimea pulsațiilor încărcării perturbatoare;

φ_{ik} — mulțimea pozițiilor critice ale mecanismului corespunzător barei i, care rezultă din ecuația $\omega = \bar{\omega}$.

Mulțimea pozițiilor critice ale mecanismului se poate determina cu :

$$A = \bigcup_{(i,k)} \{\varphi_{ik}\}.$$

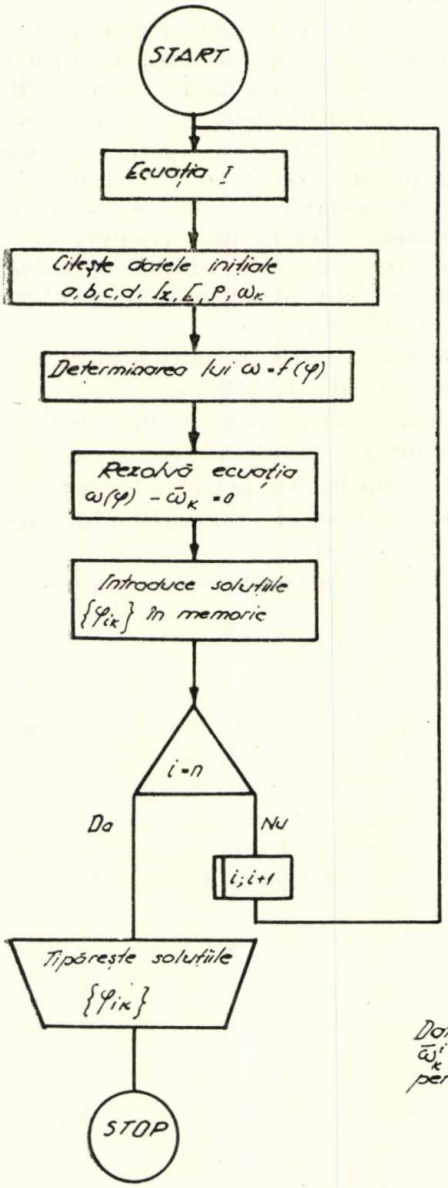
. Din cele arătate se vede că studiul vibrațiilor unui mecanism plan este o problemă care comportă, în general, un volum mare de calcule, fiind necesară folosirea calculatoarelor.

Desigur că verificările indicate mai sus trebuie să fie completate cu un studiu al vibrațiilor parametrice. Abandonarea, în anumite situații, a ipotezei lui Winckler duce la modificarea ecuațiilor, însă principial problema se rezolvă analog.

Primită la redacție la 5 februarie 1972.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Buzdugan, și colaboratorii, *Vibrații transversale libere ale grinzii pe reazeme elastice de lungime finită*, St. cerc. mec. apl., *4* (1967).
2. W. Nowacki, *Dinamica sistemelor elastice*, Edit. tehnică, București, 1969.
3. A. Raicu, *Aspecte calitative ale vibrațiilor barei cu distanța variabilă între reazeme*, Construcția de mașini, *1* (1971).



Datele inițiale și pulsațiile $\bar{\omega}_k^i$ se înscriu în memorie, pentru fiecare bară.

Fig. 8

STĂRI DE TENSIUNE ÎN TEORIA PLĂCILOR CURBE DE MICĂ CURBURĂ. II

de C. STĂNESCU, V. VISARION
Centrul de mecanică a solidelor

În partea a doua a lucrării sînt analizate stările de tensiune care au un indice de variație nenul. După cum s-a menționat anterior, ele sînt generate de anumite alterații în lungul unor curbe situate pe suprafața mediană, cum ar fi, de exemplu, porțiuni din frontiera plăcii curbe sau linii de discontinuitate ale sarcinilor aplicate pe placă. Pentru o expunere unitară numerotarea paragrafelor s-a făcut în continuarea numerotării acestora din prima parte a lucrării.

5. STAREA DE TENSIUNE $(p, 0)$

După cum s-a arătat, cu ajutorul stării de tensiune (0,0) pot fi îndeplinite numai o parte din condițiile la limită ale teoriei plăcilor curbe subțiri.

În continuare, pentru a satisface și restul de condiții la limită va trebui să utilizăm soluțiile corespunzătoare altor stări de tensiune. Evident, noile stări de tensiune au un caracter local, ele fiind construite în vecinătatea marginei plăcii curbe.

Pentru simplitate, admitem că această margine coincide cu curba coordonată $\alpha = \alpha_0$. Vom determina soluția sistemului omogen

$$L(c) - \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta w = 0\,; \quad L(w) + \frac{1}{2Eh}\Delta\Delta c = 0, \tag{5.1}$$

care corespunde stării de tensiune $(p, 0)$.

Ținînd seama de (1.2), (1.3), sistemul (5.1) poate fi scris și sub forma

$$\frac{1}{A^2R_2'}\cdot\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{ABR_{12}}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R_{12}}\right)\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{1}{B^2R_1'}\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} +$$

$$+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{BR_1'}\right)\frac{\partial c}{\partial\beta} - \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\cdot\frac{1}{A^4}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + \{\ldots\} = 0,$$

$$\frac{1}{A^2R_2'}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\frac{2}{ABR_{12}}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R_{12}}\right)\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{1}{B^2R_1'}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+$$

$$+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{BR_1'}\right)\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{1}{2Eh}\cdot\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+\{\ldots\}=0. \tag{5.2}$$

În ecuațiile (5.2), acoladele includ restul de termeni care provin din scrierea dezvoltată a celor doi operatori L și Δ, dar acești termeni nu prezintă interes în viitor și din această cauză nu s-au mai dat expresiile lor.

Efectuăm schimbarea de variabilă

$$\xi=h^{-p}(\alpha-\alpha_0), \tag{5.3}$$

iar funcțiile cunoscute din sistemul (5.2), care depind de coeficienții celor două forme fundamentale ale suprafeței mediane, le vom considera cu indici de variație nuli. Conform celor arătate anterior, înlocuim aceste funcții cu dezvoltările lor asimptotice de forma (2.6). În modul acesta, căutînd soluția sistemului (5.2) sub forma (2.1), rezultă

$$h^{q(c)-2p}\left[\left(\frac{1}{A^2R_2'}\right)_0+h^p\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{1}{A^2R_2'}\right)_0\xi+\ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(c^{(0)}+h^{a_1}c^{(1)}+\ldots)+$$

$$+h^{q(c)-p}\left[\left(\frac{2}{ABR_{12}}\right)_0+h^p\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{2}{ABR_{12}}\right)_0\xi+\ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\beta}(c^{(0)}+h^{a_1}c^{(1)}+$$

$$+\ldots)+h^{q(c)-p}\left[\left(\frac{1}{AB}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{1}{R_{12}}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial}{\partial\xi}(c^{(0)}+h^{a_1}c^{(1)}+\ldots)+$$

$$+h^{q(c)}\left[\left(\frac{1}{B^2R_1'}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(c^{(0)}+h^{a_1}c^{(1)}+\ldots)+$$

$$+h^{q(c)}\left[\left(\frac{1}{AB}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{A}{BR_1'}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial}{\partial\beta}(c^{(0)}+h^{a_1}c^{(1)}+\ldots)-$$

$$-\frac{2E}{3(1-\nu^2)}h^{q(w)+3-4p}\left[\left(\frac{1}{A^4}\right)_0+h^p\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{1}{A^4}\right)_0\xi+\ldots\right]\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}(w^{(0)}+$$

$$+h^{a_1}w^{(1)}+\ldots)+\{\ldots\}=0, \tag{5.4}$$

$$h^{q(w)-2p}\left[\left(\frac{1}{A^2R_2'}\right)_0+h^p\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{1}{A^2R_2'}\right)_0\xi+\ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(w^{(0)}+h^{a_1}w^{(1)}+\ldots)+$$

$$+h^{q(w)-p}\left[\left(\frac{2}{ABR_{12}}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\beta}(w^{(0)}+h^{a_1}w^{(1)}+\ldots)+$$

$$+ h^{q(w)-p}\left[\left(\frac{1}{AB}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{1}{R_{12}}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\,(w^{(0)}+h^{a_1}w^{(1)}+\ldots)+$$

$$+ h^{q(w)}\left[\left(\frac{1}{B^2R_1'}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\,(w^{(0)}+h^{a_1}w^{(1)}+\ldots)+$$

$$+ h^{q(w)}\left[\left(\frac{1}{AB}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{A}{BR_1'}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial}{\partial\beta}\,(w^{(0)}+h^{a_1}w^{(1)}+\ldots)+$$

$$+\frac{1}{2E}\,h^{q(c)-1-4p}\left[\left(\frac{1}{A^4}\right)_0+h^p\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{1}{A^4}\right)_0\xi+\ldots\right]\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\,(c^{(0)}+$$

$$+h^{a_1}c^{(1)}+\ldots)+\{\ldots\}+0. \tag{5.5}$$

În ecuațiile (5.4) și (5.5), precum și în relațiile care vor fi stabilite ulterior, funcțiile închise în paranteze și având pe zero ca indice inferior înseamnă că ele sînt calculate pentru $\alpha=\alpha_0$ și prin urmare *depind numai de variabila* β.

Din sistemul (5.4), (5.5) deducem indicii de ordine $a_k (k=1,2,3,\ldots)$ precum și sistemele recurente cu ajutorul cărora se determină funcțiile de ordine $c^{(k)}$, $w^{(k)}$ $(k=0,1,\ldots)$ din dezvoltările asimptotice de forma (2.1) ale lui c și w.

Restul funcțiilor necunoscute admit de asemenea dezvoltări asimptotice de forma (2.1), și pentru determinarea lor utilizăm formulele (1.4) — (1.10).

În continuare vom prezenta aceste formule, scriind explicit pentru fiecare din ele numai termenul care are indicele de intensitate cel mai mic, deoarece acesta intervine la identificarea primei aproximații.

Astfel, din relațiile (1.4) deducem

$$h^{q(N_\alpha)}(N_\alpha^{(0)}+\ldots)=h^{q(c)-p}\left[\left(\frac{1}{A^2B}\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\,(c^{(0)}+\ldots)+\ldots,$$

$$h^{q(N_\beta)}(N_\beta^{(0)}+\ldots)=h^{q(c)-2p}\left[\left(\frac{1}{A^2}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\,(c^{(0)}+\ldots)+\ldots,$$

$$h^{q(N_{\alpha\beta})}(N_{\alpha\beta}^{(0)}+\ldots)=-h^{q(c)-p}\left[\left(\frac{1}{AB}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\beta}\,(c^{(0)}+\ldots)+$$

$$+h^{q(c)-p}\left[\left(\frac{1}{A^2B}\,\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\,(c^{(0)}+\ldots)+\ldots.$$

În modul acesta rezultă

$$q(N_\alpha)=q(c)-p\ ;\ q(N_\beta)=q(c)-2p\ ;\ q(N_{\alpha\beta})=q(c)-p, \tag{5.6}$$

precum și relațiile corespunzătoare primei aproximații

$$N_\alpha^{(0)} = \left(\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)_0 \frac{\partial c^{(0)}}{\partial \xi} \quad ; \quad N_\beta^{(0)} = \left(\frac{1}{A^2}\right)_0 \frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial \xi^2},$$
$$N_{\alpha\beta}^{(0)} = -\left(\frac{1}{AB}\right)_0 \frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial \xi\, \partial \beta} + \left(\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 \frac{\partial c^{(0)}}{\partial \xi}. \tag{5.7}$$

Folosind relațiile constitutive (1.5) obținem

$$q(\varepsilon_1) = q(\varepsilon_2) = \min(q(N_\alpha) - 1,\ q(N_\beta) - 1) = q(c) - 2p - 1,$$
$$q(\omega) = q(N_{\alpha\beta}) + 1 = q(c) - p - 1, \tag{5.8}$$

precum și funcțiile de ordine,

$$\varepsilon_1^{(0)} = -\frac{\nu}{2E} N_\beta^{(0)} \quad ; \quad \varepsilon_2^{(0)} = \frac{1}{2E} N_\beta^{(0)} \quad ; \quad \omega^{(0)} = \frac{1+\nu}{E} N_{\alpha\beta}^{(0)}, \tag{5.9}$$

din dezvoltările asimptotice ale componentelor tangențiale ε_1, ε_2, ω ale deformației.

Formulele (1.7) determină unghiurile de rotire. Deducem

$$h^{q(\gamma_1)}(\gamma_1^{(0)} + \ldots) = -h^{q(w)-p}\left[\left(\frac{1}{A}\right)_0 + h^p\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\right)_0 \xi + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial \xi}(w^{(0)} + \ldots),$$

$$h^{q(\gamma_2)}(\gamma_2^{(0)} + \ldots) = -h^{q(w)}\left[\left(\frac{1}{B}\right)_0 + h^p\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{B}\right)_0 \xi + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial \beta}(w^{(0)} + \ldots),$$

și astfel rezultă indicii de intensitate

$$q(\gamma_1) = q(w) - p \quad ; \quad q(\gamma_2) = q(w), \tag{5.10}$$

respectiv funcțiile de ordin zero

$$\gamma_1^{(0)} = -\left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \quad ; \quad \gamma_2^{(0)} = -\left(\frac{1}{B}\right)_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \beta}. \tag{5.11}$$

Pentru calculul componentelor deformației de încovoiere avem la dispoziție formulele (1.8), care, scrise sub formă dezvoltată, se prezintă astfel :

$$h^{q(\varkappa_1)}(\varkappa_1^{(0)} + \ldots) = h^{q(w)-2p}\left[\left(\frac{1}{A^2}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(w^{(0)} + \ldots) + \ldots,$$

$$h^{q(\varkappa_2)}(\varkappa_2^{(0)} + \ldots) = h^{q(w)-p}\left[\left(\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial \xi}(w^{(0)} + \ldots) + \ldots,$$

$$h^{q(\tau)}(\tau^{(0)} + \ldots) = h^{q(w)-p}\left[\left(\frac{1}{AB}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \beta}(w^{(0)} + \ldots) -$$

$$- h^{q(w)-p}\left[\left(\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial \xi}(w^{(0)} + \ldots) + \ldots.$$

În modul acesta rezultă

$$q(\varkappa_1) = q(w) - 2p\,;\ q(\varkappa_2) = q(w) - p,\ q(\tau) = q(w) - p, \tag{5.12}$$

precum şi

$$\varkappa_1^{(0)} = \left(\frac{1}{A^2}\right)_0 \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \xi^2}\,;\ \varkappa_2^{(0)} = \left(\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi},$$

$$\tau^{(0)} = \left(\frac{1}{AB}\right)_0 \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \xi\, \partial \beta} - \left(\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi}. \tag{5.13}$$

Pentru momente, cu ajutorul relaţiilor constitutive (1.9), deducem

$$q(M_\alpha) = q(M_\beta) = q(w) - 2p + 3\,;\ q(M_{\alpha\beta}) = q(w) - p + 3, \tag{5.14}$$

iar funcţiile de ordin zero din dezvoltările lor asimptotice sînt date de

$$M_\alpha^{(0)} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\varkappa_1^{(0)}\,;\ M_\beta^{(0)} = -\frac{2E\nu}{3(1-\nu^2)}\varkappa_1^{(0)}\,;\ M_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{2E}{3(1+\nu)}\tau^{(0)}. \tag{5.15}$$

Scriind formulele (1.10) sub forma

$$h^{q(Q_\alpha)}(Q_\alpha^{(0)} + \ldots) = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)} \cdot h^{q(w)+3-3p} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{A^3}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial^3}{\partial \xi^3}(w^{(0)} + \ldots) + \ldots,$$

$$h^{q(Q_\beta)}(Q_\beta^{(0)} + \ldots) = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)} \cdot h^{q(w)+3-2p}\left[\left(\frac{1}{B}\right)_0 + \ldots\right] \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\left[\left(\frac{1}{A^2}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(w^{(0)} + \ldots)\right\} + \ldots,$$

obținem

$$q(Q_\alpha) = q(w) + 3 - 3p\ ;\ q(Q_\beta) = q(w) + 3 - 2p, \tag{5.16}$$

rpecum și

$$Q_\alpha^{(0)} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{A^3}\right)_0 \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3},$$

$$Q_\beta^{(0)} = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{B}\right)_0 \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\left(\frac{1}{A^2}\right)_0 \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \xi^2}\right]. \tag{5.17}$$

Componentele tangențiale u, v ale deplasării se deduc din sistemul 1.6). Ulterior, pentru cazurile care vor fi analizate, se vor da ecuațiile corespunzătoare primei aproximații cu ajutorul cărora se determină funcțiile de ordine $u^{(0)}$, $v^{(0)}$.

Pentru starea de tensiune $(p, 0)$ formulele de calcul stabilite se referă numai la prima funcție de ordine din dezvoltările asimptotice ale funcțiilor necunoscute. Analog, se pot deduce, prin identificarea coeficienților acelorași puteri ale lui h, și formulele care ne dau celelalte funcții de ordine. Așa cum am menționat anterior, indicii de ordine $a_j (j = 1, 2, 3, \ldots)$ sînt cunoscuți deoarece determinarea necunoscutelor $c^{(i)}$, $w^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ din ecuațiile (5.4) (5.5) se face printr-un proces terativ.

Folosind rezultatele obținute, în tabela II este redat spectrul indicilor de intensitate al stării de tensiune $(p, 0)$ în funcție de $q(c)$ și $q(w)$.

Tabela II

Element	w	ε_1 ; ε_2	ω	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$; τ	γ_1	γ_2
Indice intens.	$q(w)$	$q(c)-2p-1$	$q(c)-p-1$	$q(w)-2p$	$q(w)-p$	$q(w)-p$	$q(w)$

Element	N_α ; $N_{\alpha\beta}$	N_β	M_α ; M_β	$M_{\alpha\beta}$	Q_α	Q_β
Indice intens.	$q(c)-p$	$q(c)-2p$	$q(w)-2p+3$	$q(w)-p+3$	$q(w)-3p+3$	$q(w)-2p+3$

6. ANALIZA STĂRII DE TENSIUNE $(p, 0)$

Din (2.2) deducem relația

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial \alpha^m \partial \beta^n} \sim h^{-mp} F, \tag{6.1}$$

pe care trebuie s-o satisfacă derivatele parțiale ale unei funcții oarecare F (efort, moment, deplasare etc.), pentru ca să aparțină stării de tensiune $(p, 0)$.

În particular, din (6.1) rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \sim h^{-p} F; \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} \sim F. \tag{6.2}$$

Condițiile (6.2) vor fi denumite *condițiile de păstrare ai indicilor de variație*. În viitor aceste condiții vor servi drept criteriu pentru a stabili apartenența unei funcții la starea de tensiune $(p, 0)$.

Trecînd acum la analiza acestei stări vom distinge următoarele cazuri în funcție de modul cum este așezată marginea $\alpha = \alpha_0$ a plăcii curbe.

Cazul I.

$$\frac{1}{R_2'} \neq 0; \quad \frac{1}{R_1'} \neq 0. \tag{6.3}$$

Acest caz poate avea loc pentru orice placă curbă și condițiile (6.3) arată că marginea plăcii *nu trece de-a lungul unei linii asimptotice.*

Să considerăm ecuațiile (5.4) și (5.5). Indicii de intensitate cei mai mici, corespunzători necunoscutelor c și w în fiecare din ecuațiile sistemului sînt dați în tabela III.

Tabela III

Ecuația	Indicele de intensitate	
	c	w
(5.4)	$q(c)-2p$	$q(w)+3-4p$
(5.5)	$q(c)-1-4p$	$q(w)-2p$

Singurele combinații necontradictorii pentru indicii de intensitate $q(c)$ și $q(w)$ care satisfac condițiile de păstrare ai indicilor de variație, sînt :

$$q(c) - 2p = q(w) + 3 - 4p,$$

$$q(c) - 1 - 4p = q(w) - 2p,$$

de unde deducem

$$p = \frac{1}{2} \tag{6.4}$$

și

$$q(c) - q(w) = 3 - 2p = 2.$$

Ultima relație este îndeplinită dacă se ia

$$q(w) = q\,;\ q(c) = q + 2. \tag{6.5}$$

În consecință, conform tabelei II, indicii de intensitate ai elementelor necunoscute (eforturi, momente etc.) se exprimă în funcție de indicele q care urmează a fi determinat în procesul de satisfacere al condițiilor la limită.

Ținînd seama de (6.4), (6.5) din tabela II se deduce spectrul indicelor de intensitate al stării de tensiune (1/2, 0). El este dat în tabela IV.

Tabela IV

Element	w	$\varepsilon_1\,;\ \varepsilon_2$	ω	$\varkappa_1$	$\varkappa_2\,;\ \tau$	γ_1	γ_2
Indice intensit.	q	q	$q+\frac{1}{2}$	$q-1$	$q-\frac{1}{2}$	$q-\frac{1}{2}$	q

Element	$N_\alpha\,;\ N_{\alpha\beta}$	N_β	$M_\alpha\,;\ M_\beta$	$M_{\alpha\beta}$	Q_α	Q_β
Indice intensit.	$q+\frac{3}{2}$	$q+1$	$q+2$	$q+\frac{5}{2}$	$q+\frac{3}{2}$	$q+2$

Din ecuațiile (5.4) și (5.5) rezultă indicii de ordine

$$a_1 = p = \frac{1}{2}\ ;\ a_2 = 2p = 1\,;\ \ldots\ ;\ a_n = np = \frac{n}{2}\,;\ \ldots \tag{6.6}$$

precum și sistemul de ecuații corespunzător primei aproximații

$$\frac{1}{(A^2R_2')_0}\frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial\xi^2} - \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\cdot\frac{1}{(A^4)_0}\frac{\partial^4 w^{(0)}}{\partial\xi^4} = 0,$$

$$\frac{1}{(A^2R_2')_0}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\xi^2} + \frac{1}{2E}\cdot\frac{1}{(A^4)_0}\frac{\partial^4 c^{(0)}}{\partial\xi^4} = 0.$$

Dacă ținem seama de condițiile (6.2), ecuațiile acestui sistem pot fi scrise și sub forma

$$\frac{1}{R_{20}'}c^{(0)} - \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\cdot\frac{1}{A_0^2}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\xi^2} = 0,$$

$$\frac{1}{R_{20}'}w^{(0)} + \frac{1}{2E}\cdot\frac{1}{A_0^2}\frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial\xi^2} = 0. \tag{6.7}$$

Indicele zero arată că mărimile respective sînt calculate pentru $\alpha = \alpha_0$, deci ele sînt funcţiuni numai de β.

Din sistemul (6.7) deducem

$$c^{(0)} = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{R'_{20}}{A_0^2} \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \xi^2} \tag{6.8}$$

şi

$$\frac{\partial^4 w^{(0)}}{\partial \xi^4} + 3(1-\nu^2)\left(\frac{A_0^2}{R'_{20}}\right)^2 w^{(0)} = 0, \tag{6.9}$$

care este ecuaţia rezolventă a stării de tensiune (1/2, 0). Conform cu (5.3) transformarea utilizată în acest caz este

$$\xi = h^{-1/2}(\alpha - \alpha_0). \tag{6.10}$$

Rămîn de stabilit componentele tangenţiale u, v ale deplasării, care vor fi căutate sub forma

$$\begin{aligned} u &= h^{q(u)}(u^{(0)} + h^{1/2}u^{(1)} + \ldots), \\ v &= h^{q(u)}(v^{(0)} + h^{1/2}v^{(1)} + \ldots). \end{aligned} \tag{6.11}$$

În baza transformării (6.10), sistemul (1.6) devine

$$h^{q(u)-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{A}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial \xi}(u^{(0)} + \ldots) + h^{q(v)}\left[\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 + \ldots\right](v^{(0)} + \ldots) =$$

$$= h^q(\varepsilon_1^{(0)} + \ldots) + h^q\left[\left(\frac{1}{R'_1}\right)_0 + \ldots\right](w^{(0)} + \ldots), \tag{6.12}$$

$$h^{q(v)}\left[\left(\frac{1}{B}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial \beta}(v^{(0)} + \ldots) + h^{q(u)}\left[\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)_0 + \ldots\right](u^{(0)} + \ldots) =$$

$$= h^q(\varepsilon_2^{(0)} + \ldots) + h^q\left[\left(\frac{1}{R'_2}\right)_0 + \ldots\right](w^{(0)} + \ldots), \tag{6.13}$$

$$h^{q(u)}\left[\left(\frac{1}{B}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial \beta}(u^{(0)} + \ldots) - h^{q(u)}\left[\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 + \ldots\right](u^{(0)} + \ldots) +$$

$$+ h^{q(v)-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{A}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial \xi}(v^{(0)} + \ldots) - h^{q(v)}\left[\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)_0 + \ldots\right](v^{(0)} + \ldots) =$$

$$= h^{q+\frac{1}{2}}(\omega^{(0)} + \ldots) - 2h^q\left[\left(\frac{1}{R_{12}}\right)_0 + \ldots\right](w^{(0)} + \ldots) \tag{6.14}$$

dacă ţinem seama de datele cuprinse în tabela IV.

Indicii de intensitate ale grupelor de termeni, care conțin componentele u, v în ecuațiile sistemului (6.12) — (6.14), precum și indicii de intensitate ai termenilor cunoscuți din membrul drept al acestor ecuații sînt dați în tabela V.

Tabela V

Ecuația	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.12)	$q(u) - \frac{1}{2}$	$q(v)$	q
(6.13)	$q(u)$	$q(v)$	q
(6.14)	$q(u)$	$q(v) - \frac{1}{2}$	$\min\left(q + \frac{1}{2}, jq\right)$

Parametrul j ia valoarea

$$j = 0 \text{ dacă } \frac{1}{R_{12}} = 0, \qquad j = 1 \text{ dacă } \frac{1}{R_{12}} \neq 0 \tag{6.15}$$

după cum marginea $\alpha = \alpha_0$ coincide sau nu cu una din liniile de curbură ale suprafeței mediane.

În alegerea indicilor de intensitate $q(u)$ și $q(v)$ trebuie avute în vedere respectarea următoarelor două condiții.

C.1. Ecuațiile care se obțin pentru $\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}$ și $\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi}$ trebuie să fie *neomogene*, deoarece, în caz contrar, $u^{(0)}$ și $v^{(0)}$ s-ar determina ca soluții ale ecuațiilor

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi} = 0,$$

care, evident, nu satisfac condițiile de păstrare a indicilor de variație.

C.2. Ecuațiile oricărei aproximații a sistemului (6.12) — (6.14) *trebuie să fie compatibile.*

Această cerință derivă din faptul că sistemul (1.7) care determină pe u și v este compatibil, iar condiția de compatibilitate coincide cu ultima ecuație (1.1).

În funcție de valorile pe care le pot lua $q(u)$ și $q(v)$ distingem

a) $q(u) = q(v) + 1/2$,

b) $q(u) = q(v)$,

c) $q(u) = q(v) - 1/2$.

În varianta a) tabela V devine

Tabela Va

Ecuația	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.12)	$q(v)$	$q(v)$	q
(6.13)	$q(v) + 1/2$	$q(v)$	q
(6.14)	$q(v) + 1/2$	$q(v) - 1/2$	$\min\left(q + \frac{1}{2}, j\,q\right)$

Se observă că indicele de intensitate cel mai mic care apare este $q(v) - 1/2$, corespunzător componentei v din ecuația (6.14). Prin urmare, pentru a respecta condiția C.1. vom lua [1])

$$q(v) - \frac{1}{2} = q$$

și prin urmare în varianta a)

$$q(u) = q + 1\,; \quad q(v) = q + \frac{1}{2}\,, \tag{6.16}$$

astfel încît din tabela Va rezultă în definitiv

Tabela VIa

Ecuația	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.12)	$q + \frac{1}{2}$	$q + \frac{1}{2}$	q
(6.13)	$q + 1$	$q + \frac{1}{2}$	q
(6.14)	$q + 1$	q	q

[1]) Considerăm $j = 1$. Concluzii similare se obțin pentru $j = 0$.

Se observă că ecuațiile sistemului primei aproximații nu sînt compatibile. Într-adevăr, ținînd seama de datele din tabela VIa, aproximația de ordinul zero a ecuației (6.12) este

$$\varepsilon_1^{(0)} + \frac{1}{R'_{10}} w^{(0)} = 0,$$

și folosind (5.9) și (5.7) deducem că această ecuație contrazice ultima ecuație a sistemului (6.7).

Condiția C.2 nefiind respectată, rezultă că varianta a) nu poate avea loc.

În varianta b) : $q(u) = q(v)$, din tabela V se obține :

Tabela Vb

Ecuația	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.12)	$q(v) - \frac{1}{2}$	$q(v)$	q
(6.13)	$q(v)$	$q(v)$	q
(6.14)	$q(v)$	$q(v) - \frac{1}{2}$	$\min\left(q + \frac{1}{2}, jq\right)$

După cum ne arată ecuațiile (6.12) și (6.14) pentru a fi respectată condiția C.1. trebuie să alegem :

$$q(v) - \frac{1}{2} = q; \quad j = 1$$

și prin urmare

$$q(u) = q(v) = q + \frac{1}{2}, \tag{6.17}$$

astfel încît tabela Vb devine

Tabela VIb

Ecuația	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.12)	q	$q + \frac{1}{2}$	q
(6.13)	$q + \frac{1}{2}$	$q + \frac{1}{2}$	q
(6.14)	$q + \frac{1}{2}$	q	q

Scriind sistemul primei aproximații, din (6.12) și (6.14) rezultă

$$\left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = \varepsilon_1^{(0)} + \left(\frac{1}{R_1'}\right)_0 w^{(0)}; \quad \left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi} = -2\left(\frac{1}{R_{12}}\right)_0 w^{(0)}, \tag{6.18}$$

iar din (6.13) deducem

$$\varepsilon_2^{(0)} + \left(\frac{1}{R_2'}\right)_0 w^{(0)} = 0. \tag{6.19}$$

Din (6.18) deducem prin integrare funcțiile $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Folosind (5.9) și (5.7) din (6.19) deducem ultima ecuație (6.7), astfel încît (6.19) coincide cu ecuația de compatibilitate și condiția C.2 este respectată. Varianta b) este posibilă numai dacă $j = 1$, adică marginea plăcii curbe nu coincide cu una din liniile de curbură ale suprafeței mediane.

În sfîrșit, în varianta c) $q(u) = q(v) - 1/2$, conform tabelei $\bar{V}$ avem tabela Vc.

Tabela Vc

Ecuația	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.12)	$q(v) - 1$	$q(v)$	q
(6.13)	$q(v) - \frac{1}{2}$	$q(v)$	q
(6.14)	$q(v) - \frac{1}{2}$	$q(v) - \frac{1}{2}$	$\min\left(q + \frac{1}{2}, jq\right)$

Se observă că indicele de intensitate cel mai mic care apare este $q(v) - 1$ corespunzător componentei u a deplasării din ecuația (6.12). În consecință, pentru a fi respectată condiția C.1 vom lua $q(v) - 1 = q$. Rezultă deci

$$q(u) = q + \frac{1}{2}; \quad q(v) = q + 1, \tag{6.20}$$

precum și tabela VIc.

Tabela VIc

Ecuația	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.12)	q	$q + 1$	q
(6.13)	$q + \frac{1}{2}$	$q + 1$	q
(6.14)	$q + \frac{1}{2}$	$q + \frac{1}{2}$	$\min\left(q + \frac{1}{2}, jq\right)$

Comparînd indicii de intensitate ai lui u şi v cu cei ai termenilor liberi, deducem că în aproximaţia de ordinul zero ecuaţia (6.12) conţine numai pe $u^{(0)}$, iar din ecuaţia (6.13) obţinem (6.19) care, aşa cum am arătat, coincide cu ecuaţia de compatibilitate.

În sfîrşit, după cum rezultă tot din tabela VIc pentru ecuaţia (6.14) condiţia C.2 va fi respectată dacă $j = 0$ (deci $1/R_{12} = 0$) şi aproximaţia de ordinul zero a acestei ecuaţii va conţine şi pe $v^{(0)}$.

Sistemul care determină pe $u^{(0)}$ şi $v^{(0)}$ este aşadar

$$\left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = \varepsilon_1^{(0)} + \left(\frac{1}{R_1'}\right)_0 w^{(0)}, \tag{6.21}$$

$$\left(\frac{1}{B}\right)_0 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \beta} - \left(\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 u^{(0)} + \left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi} = \omega^{(0)}.$$

În modul acesta sînt deduse toate formulele de calcul.

În concluzie :

1) starea de tensiune (1/2, 0) apare în vecinătatea unei margini care nu coincide cu o linie asimptotică a suprafeţei mediane;

2) variabilele proprii ale acestei stări sînt ξ şi β unde ξ este dat de (6.10);

3) indicii de intensitate ai elementelor fizice sînt daţi în tabela IV;

4) pentru componentele tangenţiale u şi v ale deplasării indicii de intensitate sînt daţi de (6.17) sau (6.20) după cum marginea plăcii curbe nu coincide sau este o linie de curbură a suprafeţei mediane. Funcţiile de ordine $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ se determină din sistemul (6.18), respectiv (6.21).

În mod asemănător se pot studia şi celelalte iteraţii ale acestei stări.

Cazul 2. Avem

$$\frac{1}{R_2'} = 0; \quad \frac{1}{R_{12}} \neq 0, \tag{6.22}$$

adică marginea $\alpha = \alpha_0$ a plăcii curbe *coincide cu o linie asimptotică* a suprafeţei mediane. Prin urmare acest caz poate fi întîlnit numai la plăcile curbe cu curbura gaussiană negativă.

Ţinînd seama de (6.22), din (5.4) şi (5.5) se deduc pentru fiecare ecuaţie în parte indicii de intensitate cei mai mici corespunzători necunoscutelor c şi w. Ei sînt daţi în tabela VII.

Tabela VII

Ecuaţia	Indicele de intensitate	
	c	w
(5.4)	$q(c) - p$	$q(w) + 3 - 4p$
(5.5)	$q(c) - 1 - 4p$	$q(w) - p$

Folosind condiţiile de păstrare a indicilor de variaţie deducem

$$q(c) - p = q(w) + 3 - 4p; \quad q(c) - 1 - 4p = q(w) - p.$$

Rezultă astfel

$$p = \frac{1}{3} \tag{6.23}$$

și

$$q(c) - q(w) = 3 - 3p = 2.$$

Dacă luăm

$$q(w) = q; \quad q(c) = q + 2, \tag{6.24}$$

relația precedentă este îndeplinită.

Ținînd seama de (6.23) și (6.24) din tabela II se obține pentru starea de tensiune (1/3, 0) spectrul indicilor de intensitate al elementelor fizice. El este dat în tabela VIII.

Tabela VIII

Element	w	$\varepsilon_1; \varepsilon_2$	ω	$\varkappa_1$	$\varkappa_2; \tau$	γ_1	γ_2
Indice intensitate	q	$q + \frac{1}{3}$	$q + \frac{2}{3}$	$q - \frac{2}{3}$	$q - \frac{1}{3}$	$q - \frac{1}{3}$	q

Element	$N_\alpha; N_{\alpha\beta}$	N_β	$M_\alpha; M_\beta$	$M_{\alpha\beta}$	Q_α	Q_β
Indice intensitate	$q + \frac{5}{3}$	$q + \frac{4}{3}$	$q + \frac{7}{3}$	$q + \frac{8}{3}$	$q + 2$	$q + \frac{7}{3}$

Indicele necunoscut q urmează a fi determinat în procesul de satisfacere al condițiilor la limită.

Din ecuațiile (5.4), (5.5) rezultă

$$a_n = np = \frac{n}{3} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6.25}$$

precum și sistemele de ecuații care determină iterativ funcțiile de ordine $c^{(k)}$ și $w^{(k)}$ din dezvoltările asimptotice ale funcțiilor c și w.

Astfel, făcînd uz de condițiile de păstrare a indicilor de variație (6.2), se deduce sistemul primei aproximații

$$\left(\frac{2}{BR_{12}}\right)_0 \frac{\partial c^{(0)}}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{R_{12}}\right)_0 c^{(0)} - \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{1}{A^3}\right)_0 \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \xi^3} = 0,$$

$$\left(\frac{2}{BR_{12}}\right)_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{R_{12}}\right)_0 w^{(0)} + \frac{1}{2E}\left(\frac{1}{A^3}\right)_0 \frac{\partial^3 c^{(0)}}{\partial \xi^3} = 0. \tag{6.26}$$

Determinînd din (6.26) necunoscutele $c^{(0)}$, $w^{(0)}$, funcţiile de ordin zero din dezvoltările asimptotice ale elementelor fizice rezultă cu ajutorul formulelor (5.7) — (5.17).

Din (5.3) se deduce transformarea proprie acestei stări de tensiune

$$\xi = h^{-1/3}(\alpha - \alpha_0). \tag{6.27}$$

Pentru a stabili componentele tangenţiale u, v ale deplasării folosim sistemul (1.6). Ca urmare a condiţiilor (6.22) şi schimbării de variabilă (6.27) obţinem în baza indicilor de intensitate daţi în tabela VIII

$$h^{q(u)-\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{1}{A}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial\xi}(u^{(0)}+\ldots) + h^{q(v)}\left[\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)_0 + \ldots\right](v^{(0)}+\ldots) =$$

$$= h^{q+\frac{1}{3}}(\varepsilon_1^{(0)} + \ldots) + h^q\left[\left(\frac{1}{R_1'}\right)_0 + \ldots\right](w^{(0)} + \ldots), \tag{6.28}$$

$$h^{q(v)}\left[\left(\frac{1}{B}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial\beta}(v^{(0)} + \ldots) + h^{q(u)}\left[\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)_0 + \ldots\right](u^{(0)} + \ldots) =$$

$$= h^{q+\frac{1}{3}}(\varepsilon_2^{(0)} + \ldots), \tag{6.29}$$

$$h^{q(u)}\left[\left(\frac{1}{B}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial\beta}(u^{(0)} + \ldots) - h^{q(u)}\left[\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)_0 + \ldots\right](u^{(0)} + \ldots) +$$

$$+ h^{q(v)-\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{1}{A}\right)_0 + \ldots\right]\frac{\partial}{\partial\xi}(v^{(0)} + \ldots) - h^{q(v)}\left[\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)_0 + \ldots\right](v^{(0)} +$$

$$+ \ldots) = h^{q+\frac{2}{3}}(\omega^{(0)} + \ldots) - 2h^q\left[\left(\frac{1}{R_{12}}\right)_0 + \ldots\right](w^{(0)} + \ldots). \tag{6.30}$$

În tabela IX sînt daţi indicii de intensitate ale grupelor de termeni, care conţin componentele u şi v în ecuaţiile (6.28) — (6.30), precum şi indicii de intensitate ai funcţiilor cunoscute din membrul drept al acestor ecuaţii.

Tabela IX

Ecuaţia	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.28)	$q(u) - \frac{1}{3}$	$q(v)$	$\min\left(q + \frac{1}{3}, j\,q\right)$
(6.29)	$q(u)$	$q(v)$	$q + \frac{1}{3}$
(6.30)	$q(u)$	$q(v) - \frac{1}{3}$	q

În general $1/R_1' \neq 0$ și parametrul j are valoarea $j = 1$. Pentru plăcile curbe avînd suprafața mediană de arie minimă rezultă, ținînd seama de (6.22), că $1/R_1' = 0$ și deci $j = 0$.

În funcție de valorile pe care le pot lua $q(u)$ și $q(v)$ distingem următoarele variante posibile :

a) $q(u) = q(v) + \frac{1}{3}$,

b) $q(u) = q(v)$,

c) $q(u) = q(v) - \frac{1}{3}$.

Alegerea indicilor $q(u)$ și $q(v)$ se face astfel încît să fie respectate cele două condiții C.1 și C.2 formulate în primul caz.

O analiză similară celei din cazul anterior, pe care însă n-o mai dăm, ne arată că dacă $j = 1$, numai combinația corespunzătoare variantei b)

$$q(u) = q(v) = q + \frac{1}{3} \tag{6.31}$$

ne conduce la un proces iterativ necontradictoriu pentru determinarea funcțiilor de ordine $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ din dezvoltările asimptotice ale componentelor tangențiale u, v.

Din (6.28) — (6.30) se obține sistemul primei aproximații

$$\left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{1}{(R_1')_0} w^{(0)}; \left(\frac{1}{B}\right)_0 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)_0 u^{(0)} = \varepsilon_2^{(0)},$$

$$\left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi} = -\frac{2}{(R_{12})_0} w^{(0)}, \tag{6.32}$$

din care rezultă $u^{(0)}$ și $v^{(0)}$. Se poate demonstra că sistemul (6.32) este compatibil.

Într-adevăr, derivînd a doua ecuație a acestui sistem în raport cu ξ și ținînd seama că diverșii coeficienți care intervin în această ecuație sînt funcții numai de variabila β avem

$$\left(\frac{1}{B}\right)_0 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)_0 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \varepsilon_2^{(0)}}{\partial \xi}. \tag{6.33}$$

Dar conform cu (5.9) și (5.7) putem scrie

$$\frac{\partial \varepsilon_2^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2E(A^2)_0} \frac{\partial^3 c^{(0)}}{\partial \xi^3},$$

astfel încît folosind şi restul ecuaţiilor sistemului (6.32) din (6.33) obţinem pe baza unor transformări elementare :

$$\frac{2}{(BR_{12})_0}\cdot\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\beta}+\frac{1}{(AB)_0}\left[2\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_{12}}\right)-\frac{1}{R_1'}\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right]_0 w^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{2E}\left(\frac{1}{A^3}\right)_0\frac{\partial^3 c^{(0)}}{\partial\xi^3}=0. \tag{6.34}$$

Condiţia de compatibilitate astfel dedusă coincide cu ultima ecuaţie (6.26), observînd că în baza ecuaţiilor lui Codazzi avem

$$2\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_{12}}\right)-\frac{1}{R_1'}\,\frac{\partial B}{\partial\alpha}=A\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R_{12}}\right). \tag{6.35}$$

Dacă $j=0$, adică suprafaţa mediană a plăcii curbe este de arie minimă, se stabileşte

$$q(u)=q+\frac{2}{3};\quad q(v)=q+\frac{1}{3}, \tag{6.36}$$

adică numai varianta a) este posibilă în acest caz.

Din (6.28) — (6.30) se deduce sistemul corespunzător primei aproximaţii

$$\left(\frac{1}{A}\right)_0\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\xi}+\left(\frac{1}{AB}\,\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)_0 v^{(0)}=\varepsilon_1^{(0)},$$

$$\left(\frac{1}{B}\right)_0\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\beta}=\varepsilon_2^{(0)};\quad\left(\frac{1}{A}\right)_0\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\xi}=-\frac{2}{(R_{12})_0}\,w^{(0)}, \tag{6.37}$$

care determină pe $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Sistemul este compatibil, condiţia de compatibilitate,

$$\frac{2}{(BR_{12})_0}\,\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\beta}+\frac{1}{(AB)_0}\left(2\,\frac{\partial}{\partial\beta}\,\frac{A}{R_{12}}\right)_0 w^{(0)}+\left(\frac{1}{A}\right)_0\frac{\partial\varepsilon_2^{(0)}}{\partial\xi}=0,$$

coincizînd cu ultima ecuaţie (6.26). În acest scop folosim relaţia (6.35) particularizată la cazul suprafeţelor de arie minimă.

În concluzie :

1) starea de tensiune (1/3, 0) apare în vecinătatea unei margini care coincide cu o linie asimptotică a suprafeţei mediane. Prin urmare o astfel de stare poate avea loc numai pentru plăcile curbe avînd suprafaţa mediană cu curbura gaussiană negativă,

2) variabilele proprii ale acestei stări sînt ξ și β, unde ξ este dat de relația (6.27),

3) indicii de intensitate ai elementelor fizice sînt cei dați în tabela VIII,

4) pentru componentele tangențiale u, v ale deplasării, indicii de intensitate sînt dați, în cazul general, de relațiile (6.31), iar pentru suprafețele de arie minimă au expresiile (6.36). Funcțiile de ordine $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ se determină din sistemul (6.32), respectiv (6.37).

Cazul 3. Acest caz caracterizat prin

$$\frac{1}{R_2'} = 0\,; \quad \frac{1}{R_{12}} = 0\,; \quad \frac{1}{R_1'} \neq 0, \tag{6.38}$$

are loc numai pentru plăcile curbe avînd suprafața mediană cu curbura gaussiană nulă. După cum ne arată relațiile (6.38) marginea plăcii trece de-a lungul familiei unice de linii asimptotice ale suprafeței mediane.

Ținînd seama de (6.38), din ecuațiile Codazzi obținem

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{sau} \quad B = B(\beta) \tag{6.39}$$

și, prin urmare, conform cu (1.4) și (1.8), efortul N_α și componenta deformației $\varkappa_2$ sînt date în acest caz de

$$N_\alpha = \frac{1}{B}\,\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\,\frac{\partial c}{\partial \beta}\right), \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{B}\,\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\,\frac{\partial w}{\partial \beta}\right).$$

Rezultă astfel

$$q(N_\alpha) = q(c)\,; \; q(\varkappa_2) = q(w), \tag{6.40}$$

precum și relațiile corespunzătoare primei aproximații

$$N_\alpha^{(0)} = \frac{1}{B}\,\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\,\frac{\partial c^{(0)}}{\partial \beta}\right), \qquad \varkappa_2^{(0)} = \frac{1}{B}\,\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\,\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \beta}\right). \tag{6.41}$$

Deoarece funcția B depinde numai de β, ea nu se mai dezvoltă asimptotic după puterile lui h. Restul formulelor de calcul (5.7) — (5.17) pentru funcțiile de ordin zero ale celorlalte elemente fizice rămîn neschimbate; în aceste formule putem înlocui $(B)_0$ cu B în baza observației făcute mai sus.

Ţinînd seama de (6.38), din ecuaţiile (5.4) şi (5.5) se obţine tabela X în care sînt daţi indicii de intensitate cei mai mici corespunzători necunoscutelor c şi w.

Tabela X

Ecuaţia	Indicele de intensitate	
	c	w
(5.4)	$q(c)$	$q(w) + 3 - 4p$
(5.5)	$q(c) - 1 - 4p$	$q(w)$

Dacă facem uz de condiţiile de păstrare ai indicelor de variaţie, rezultă

$$q(c) = q(w) + 3 - 4p\,;\; q(c) - 1 - 4p = q(w),$$

de unde

$$p = \frac{1}{4} \tag{6.42}$$

şi

$$q(c) - q(w) = 3 - 4p = 2,$$

care este îndeplinită dacă se ia

$$q(c) = q + 2, \quad q(w) = q. \tag{6.43}$$

În consecinţă, conform tabelei II şi folosind (6.40), (6.42) (6.43), obţinem tabela XI în care sînt daţi indicii de intensitate ai elementelor fizice pentru starea de tensiune (1/4, 0).

Tabela XI

Element	w	$\varepsilon_1\,;\,\varepsilon_2$	ω	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	τ	γ_1	γ_2	N_α
Indice intensitate	q	$q + \frac{2}{4}$	$q + \frac{3}{4}$	$q - \frac{2}{4}$	q	$q - \frac{1}{4}$	$q - \frac{1}{4}$	q	$q + 2$

Element	$N_{\alpha\beta}$	N_β	$M_\alpha\,;M_\beta$	$M_{\alpha\beta}$	Q_α	Q_β
Indice intensitate	$q + \frac{7}{4}$	$q + \frac{6}{4}$	$q + \frac{10}{4}$	$q + \frac{11}{4}$	$q + \frac{9}{4}$	$q + \frac{10}{4}$

Indicele de intensitate q urmează a fi determinat în procesul de satisfacere al condițiilor la limită.

Din ecuațiile (5.4), (5.5) deducem indicii de ordine

$$a_n = np = \frac{n}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6.44}$$

precum și sistemul corespunzător primei aproximații

$$\frac{1}{(B^2R_1')_0}\frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial\beta^2} + \left(\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{BR_1'}\right)_0 \frac{\partial c^{(0)}}{\partial\beta} - \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{A^4}\right)_0 \frac{\partial^4 w^{(0)}}{\partial\xi^4} = 0,$$

$$\frac{1}{(B^2R_1')_0}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\beta^2} + \left(\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{BR_1'}\right)_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial\beta} + \frac{1}{2E}\left(\frac{1}{A^4}\right)_0 \frac{\partial^4 c^{(0)}}{\partial\xi^4} = 0,$$

care, în baza ecuației lui Codazzi,

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1'}\right) = 0,$$

mai poate fi scris și sub forma

$$\frac{1}{(BR_1')_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial\beta}\right) - \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{A^4}\right)_0 \frac{\partial^4 w^{(0)}}{\partial\xi^4} = 0,$$

$$\frac{1}{(BR_1')_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{2E}\left(\frac{1}{A^4}\right)_0 \frac{\partial^4 c^{(0)}}{\partial\xi^4} = 0. \tag{6.45}$$

Schimbarea de variabilă (5.3) devine în acest caz

$$\xi = h^{-1/4}(\alpha - \alpha_0), \tag{6.46}$$

care este transformarea proprie a stării de tensiune (1/4, 0).

Pentru determinarea componentelor tangențiale u, v ale deplasării folosim sistemul (1.6). Căutăm soluția acestui sistem sub forma

$$u = h^{q(u)}(u^{(0)} + h^{1/4}u^{(1)} + h^{2/4}u^{(2)} + \ldots),$$

$$v = h^{q(v)}(v^{(0)} + h^{1/4}v^{(1)} + h^{2/4}v^{(2)} + \ldots).$$

Ţinînd seama de (6.39) şi (6.46), precum şi de datele din tabela XI, acest sistem se scrie sub forma

$$h^{q(u)-1/4}\left[\left(\frac{1}{A}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial}{\partial\xi}(u^{(0)}+\ldots)+h^{q(v)}\cdot\frac{1}{B}\left[\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)_0+\ldots\right](v^{(0)}+$$

$$+\ldots)=h^{q+2/4}(\varepsilon_1^{(0)}+\ldots)+h^q\left[\left(\frac{1}{R_1'}\right)_0+\ldots\right](w^{(0)}+\ldots), \tag{6.47}$$

$$h^{q(v)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(v^{(0)}+\ldots)=h^{q+2/4}(\varepsilon_2^{(0)}+\ldots), \tag{6.48}$$

$$h^{q(u)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(u^{(0)}+\ldots)-h^{q(u)}\frac{1}{B}\left[\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)_0+\ldots\right](u^{(0)}+\ldots)+$$

$$+h^{q(v)-1/4}\left[\left(\frac{1}{A}\right)_0+\ldots\right]\frac{\partial}{\partial\xi}(v^{(0)}+\ldots)=h^{q+3/4}(\omega^{(0)}+\ldots). \tag{6.49}$$

În tabela XII sînt daţi indicii de intensitate ale grupelor de termeni care conţin componentele u şi v în ecuaţiile (6.47) — (6.49), precum şi indicii de intensitate ai funcţiilor cunoscute din membrul drept al acestor ecuaţii

Tabela XII

Ecuaţia	Indicii de intensitate		
	u	v	Termen liber
(6.47)	$q(u)-1/4$	$q(v)$	q
(6.48)	—	$q(v)$	$q+2/4$
(6.49)	$q(u)$	$q(v)-1/4$	$q+3/4$

În funcţie de valorile pe care le pot lua $q(u)$ şi $q(v)$ urmează a fi analizate următoarele variante:

a) $$q(u)=q(v)+\frac{1}{4},$$

b) $$q(u)=q(v),$$

c) $$q(u)=q(v)-\frac{1}{4}.$$

Procedînd analog ca şi în cazul 1 se stabileşte că numai varianta c) ne conduce la un proces iterativ pentru determinarea funcţiilor de ordine $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ din dezvoltările asimptotice ale lui u şi v.

Atunci, în baza datelor din tabela XII, rezultă

$$q(u) = q + \frac{1}{4}; \qquad q(v) = q + \frac{2}{4}, \tag{6.50}$$

precum și sistemul corespunzător primei iterații:

$$\left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{1}{(R_1')_0} w^{(0)}; \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \beta} \varepsilon_2^{(0)},$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \beta} - \frac{1}{B}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 u^{(0)} + \left(\frac{1}{A}\right)_0 \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \tag{6.51}$$

din care se determină $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Să demonstrăm că sistemul este compatibil.

Pentru aceasta ultima ecuație a sistemului (6.51) înmulțită cu $(A)_0$ o derivăm în raport cu ξ și apoi în raport cu β, ținînd seama că diverșii coeficienți care apar depind numai de variabila β. Obținem

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\left(\frac{A}{B}\right)_0 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Folosind primele două ecuații ale aceluiași sistem, precum și ecuațiile Codazzi-Gauss

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{R_1'}\right) = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) = 0,$$

deducem în continuare

$$\left(\frac{A}{R_1'}\right)_0 \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\left(\frac{A}{B}\right)_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \beta}\right] - \left(\frac{A}{R_1'}\right)_0 \left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)_0 \frac{\partial w^{0)}}{\partial \beta} + B\frac{\partial^2 \varepsilon_2^{(0)}}{\partial \xi^2} = 0$$

sau

$$\frac{1}{(BR_1')_0}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \beta}\right) + \left(\frac{1}{A^2}\right)_0 \frac{\partial^2 \varepsilon_2^{(0)}}{\partial \xi^2} = 0 \tag{6.52}$$

și se observă că ecuația de compatibilitate (6.52) coincide cu ultima ecuație a sistemului (6.45) deoarece

$$\varepsilon_2^{(0)} = \frac{1}{2E} N_\beta^{(0)} = \frac{1}{2E}\left(\frac{1}{A^2}\right)_0 \frac{\partial^2 c^{(0)}}{\partial \xi^2}.$$

În concluzie :

1) starea de tensiune (1/4, 0) are loc numai pentru plăcile curbe avînd suprafaţa mediană cu curbura gaussiană nulă, marginea plăcii trecînd de-a lungul familiei unice de linii asimptotice a suprafeţei mediane ;

2) variabilele proprii ale acestei stări sînt ξ şi β, unde ξ este dat de (6.46) ;

3) indicii de intensitate ai elementelor fizice sînt daţi în tabela XI, iar pentru componentele tangenţiale u, v ale deplasării ei sînt daţi de relaţiile (6.50).

4) funcţiile de ordin zero din dezvoltările asimptotice ale elementelor fizice se calculează cu ajutorul formulelor (5.7) — (5.17), cu excepţia efortului N_α şi a deformaţiei $\varkappa_2$ pentru care trebuie să folosim (6.41) ; necunoscutele $u^{(0)}$ şi $v^{(0)}$ se determină din sistemul (6.51).

Primită la redacţie la 15 august 1973.

CERCETĂRI ASUPRA REZISTENȚEI ARBORELUI COTIT STATIC NEDETERMINAT, CU LUAREA ÎN CONSIDERARE A JOCURILOR DIN LAGĂRE

de I. COȘEREANU, I. DEUTSCH, T. NEAMȚU și FL. SPERCHEZ
Universitatea Brașov

Lucrarea scoate în evidență influența jocurilor din lagăre asupra rezistenței arborelui cotit, static nedeterminat. Se prezintă o metodică de calcul ce are în vedere posibilitatea existenței jocurilor în diverse lagăre. Se deduc relațiile dintre coeficienții de influență din metoda eforturilor pentru cazul schimbării sistemului de bază.
Calculul este condus cu referire și la un caz concret, din care rezultă că apariția jocurilor cauzează o micșorare importantă a coeficientului de siguranță la solicitări variabile, ceea ce poate conduce la ruperea arborelui cotit.

1. GENERALITĂȚI

Dacă un arbore cotit se sprijină pe mai mult decît două lagăre, calculul de rezistență necesită ridicarea nedeterminării. De obicei, în acest calcul nu sînt luate în considerare jocurile care pot exista în lagăre.

Prin cercetarea unor arbori cotiți după un număr de ore de funcționare, s-a putut constata existența unor jocuri în lagăre, mărite față de cele care existau din fabricație. Jocurile cauzate de uzură se adună la cele datorită toleranțelor de montaj și pot atinge, în cazul motoarelor de vehicule, valori de ordinul zecimilor de milimetri, ceea ce are repercusiuni asupra stării de solicitare.

În lucrarea de față se prezintă o metodică de calcul pentru un arbore cotit, sprijinit în mai multe lagăre, în care există jocuri. Această metodă a fost aplicată la calculul de verificare la solicitări variabile în cazul arborelui cotit de la un motor de tractor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 403–413

În literatura de specialitate sînt studiate în special arborii static determinați [1], cînd problema jocului din lagăre nu prezintă aceeași importanță.

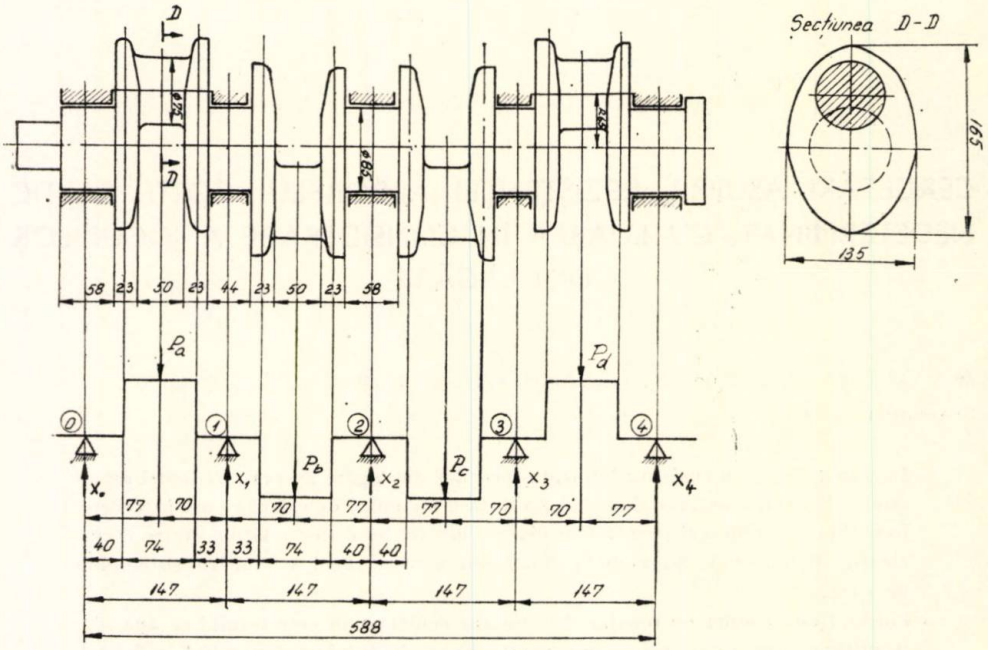


Fig. 1

2. METODA DE RIDICARE A NEDETERMINĂRII

Prezentarea metodei, care este generală, se va face pe un arbore motor triplu static nedeterminat (fig. 1). Drept mărimi static nedeterminate se admit trei dintre reacțiunile arborelui cotit.

În ipoteza *lipsei jocurilor* în lagăre, așa cum se calculează în general arborii motori, reacțiunile static nedeterminate din lagăre X_{10}, X_{20}, X_{30} în sistemul de bază 0—4 (grindă sprijinită pe reazemele marginale) sînt date de ecuațiile canonice ale metodei eforturilor :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}X_{10} + \alpha_{12}X_{20} + \alpha_{13}X_{30} + \Delta_1 &= 0, \\ \alpha_{21}X_{10} + \alpha_{22}X_{20} + \alpha_{23}X_{30} + \Delta_2 &= 0, \\ \alpha_{31}X_{10} + \alpha_{32}X_{20} + \alpha_{33}X_{30} + \Delta_3 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde α_{ik} sînt coeficienții de influență (deplasări în locul i datorită forțelor unitare din locul k), iar Δ_i deplasările produse de forțele active P_a, P_b, P_c, P_d în dreptul lagărelor i în sistemul de bază :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \beta_{1a}P_a + \beta_{1b}P_b + \beta_{1c}P_c + \beta_{1d}P_d, \\ \Delta_2 &= \beta_{2a}P_a + \beta_{2b}P_b + \beta_{2c}P_c + \beta_{2d}P_d, \\ \Delta_3 &= \beta_{3a}P_a + \beta_{3b}P_b + \beta_{3c}P_c + \beta_{3d}P_d, \end{aligned} \tag{2}$$

unde β_{ik}(cu $i = 1, 2, 3$ și $k = a, b, c, d$) reprezintă coeficienții de influență, adică deplasări în locul i produse de către o singură forță egală cu unitatea aplicată în locul forței P_k.

Pentru a se determina reacțiunile din lagăre cu luarea în considerare a jocurilor se vor studia cazurile, cînd aceste jocuri apar într-unul, în două sau trei lagăre simultan. Pentru simplificarea calculului s-a admis același joc δ în lagărele considerate.

La calculele efectuate s-a ținut seama de următoarele observații, care rezultă din fenomenul fizic :

a) Apariția unui joc în lagăr conduce la o micșorare a reacțiunii în lagărul considerat.

b) Dacă reacțiunea dintr-un lagăr fără joc este relativ mică, atunci, prin luarea în considerare a jocului, se poate ajunge la o reacțiune egală cu zero.

c) Dacă reacțiunea este nulă, atunci deplasarea (săgeata) în lagărul respectiv este mai mică decît jocul.

d) Dacă într-un lagăr cu joc există reacțiune, atunci deplasarea în lagăr trebuie să fie egală cu jocul, iar sensul ei invers sensului reacțiunii.

Atît forțele active, cît și reacțiunile se vor admite ca acționînd concentrat la mijlocul fusurilor. Rezemările în lagăre se vor considera punctiforme.

2.1. CAZUL EXISTENȚEI UNUI JOC EGAL CU $\pm\delta$ ÎNTR-UN SINGUR LAGĂR

Pentru determinarea reacțiunilor se presupun cunoscute reacțiunile X_{10}, X_{20} și X_{30}, determinate din sistemul de ecuații (1) pentru deplasări nule în lagăre.

Dacă se admite, de exemplu, un joc în lagărul 1, atunci reacțiunile se pot exprima sub forma :

$$X_1 = X_{10} - \bar{X}_1; \quad X_2 = X_{20} - \bar{X}_2; \quad X_3 = X_{30} - \bar{X}_3, \tag{3}$$

unde s-a notat cu $\bar{X}_i$ abaterea valorii reacțiunii în lagărul cu joc față de cea din lagărul fără joc.

Reacțiunile trebuie să satisfacă sistemul de ecuații :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + \Delta_1 &= \mp\,\delta, \\ \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3 + \Delta_2 &= 0, \\ \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}X_2 + \alpha_{33}X_3 + \Delta_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Înlocuind relațiile (3) în (4) rezultă :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\bar{X}_1 + \alpha_{12}\bar{X}_2 + \alpha_{13}\bar{X}_3 &= \pm\,\delta, \\ \alpha_{21}\bar{X}_1 + \alpha_{22}\bar{X}_2 + \alpha_{23}\bar{X}_3 &= 0, \\ \alpha_{31}\bar{X}_1 + \alpha_{32}\bar{X}_2 + \alpha_{33}\bar{X}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Acest sistem de ecuații determină reacțiunile limită $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ și $\bar{X}_3$, pentru care în lagărul 1 arborele are o deplasare egală cu δ.

Se notează cu v_i deplasările arborelui cotit în lagăre.

Vor putea exista următoarele două cazuri:

a) Dacă $X_{10} > \bar{X}_1$, atunci $v_1 = \delta$ și $X_1 > 0$,

b) Dacă $X_{10} \leqslant \bar{X}_1$, atunci $v_1 \leqslant \delta$ și $X_1 = 0$.

În primul caz reacțiunile se calculează cu relațiile (3), iar în al doilea, cînd arborele nu se mai sprijină în lagăr, cu

$$X_1 = X_{10} - K\bar{X}_1; \quad X_2 = X_{20} - K\bar{X}_2; \quad X_3 = X_{30} - K\bar{X}_3, \tag{6}$$

unde

$$K = \frac{X_{10}}{\bar{X}_1} \leqslant 1.$$

Soluțiile (6) verifică ecuația a doua și a treia din sistemul (4), iar prima ecuație devine:

$$v_1 = \pm K\,\delta, \text{ adică } v_1 \leqslant \delta.$$

Prin urmare relațiile (6) satisfac condițiile impuse. În mod asemănător se conduce calculul și pentru cazul cînd se admite jocul în lagărul 2 sau 3.

2.2. CAZUL EXISTENȚEI JOCURILOR ÎN DOUĂ LAGĂRE

Se determină reacțiunile limită pentru două stări, după cum deplasările din aceste lagăre sînt de același semn sau de semne diferite ($\bar{X}_i'$, respectiv $\bar{X}_i''$), fapt care se constată din semnele rădăcinilor X_{i0}.

Se pot prezenta următoarele situații:

a) Dacă $X_{i0} > \bar{X}_i$, atunci reacțiunile X_i se calculează cu relațiile (3).

b) Cînd într-unul din lagărele cu joc $X_{i0} < \bar{X}_i$, atunci soluția este $X_i = 0$, iar celelalte reacțiuni se deduc din ecuațiile canonice, care pun condițiile de deformație în celelalte lagăre. De exemplu, dacă există jocuri în lagărele 1 și 2, iar $X_1 = 0$, atunci reacțiunile X_2 și X_3 se determină punînd condițiile $v_2 = \delta$ și $v_3 = 0$.

c) Dacă în ambele lagăre $X_{i0} \leqslant \bar{X}_i$, atunci sînt două posibilități:

— reacțiuni nule în ambele lagăre;

— reacțiune nulă într-un lagăr și anume în acela în care X_{i0} este mai depărtat de $\bar{X}_i$.

În toate cazurile se va verifica, dacă $v_i \leqslant \delta$ în lagărele cu joc.

2.3. CAZUL EXISTENȚEI JOCURILOR ÎN TREI LAGĂRE

Reacțiunile se determină în principiu ca în cazul jocurilor în două lagăre. Aici există însă mai multe condiții rezultate din trei valori ale reacțiunilor limită (X_i', X_i'', X_i''', după cum reacțiunile X_{i0} sînt de același semn sau de semne diferite).

Se obțin soluții sigure numai cînd :

— toate reacțiunile $X_{i0} > \bar{X}_i$. În acest caz se aplică relația (3).

— toate reacțiunile $X_{i0} \leqslant \bar{X}_i$ sau $\Delta_i \leqslant \delta$. Rezultă toate reacțiunile nule.

Cazurile intermediare, pentru care unele reacțiuni $X_{i0} > \bar{X}_i$, iar altele $X_{j0} \leqslant \bar{X}_j$ se tratează prin încercări cu soluții X_j nule. Celelalte reacțiuni se determină din ecuațiile canonice cu condițiile de deplasări în lagăre.

Soluțiile sînt bune numai dacă $v \leqslant \delta$ în cele trei lagăre cu joc.

3. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR DE INFLUENȚĂ

3.1. STABILIREA COEFICIENȚILOR PRIN CALCUL ȘI EXPERIMENTAL

Coeficienții de influență ai deformațiilor α_{ik} și β_{ik}, care intervin în ecuațiile canonice ale metodei eforturilor, se pot calcula cu relația lui Mohr-Maxwell :

$$\alpha_{ik}(\text{sau } \beta_{ik}) = \Sigma \int \frac{m_k m_i}{EI_z} \, dx + \Sigma \int \frac{m_{tk} m_{ti}}{GI_t} \, dx,$$

unde s-au luat în considerare încovoierea și torsiunea, prin momentele m și m_t, produse de forțe egale cu unitatea, aplicate în secțiunea k, respectiv i, și prin rigiditățile de încovoiere EI_z, respectiv de torsiune GI_t. Integrala se referă la cîte o porțiune, iar sumele se extind la toate porțiunile din care este format arborele cotit. Se recomandă calculul integralelor cu ajutorul regulei de înmulțire a diagramelor, denumită metodă grafică-analitică a lui Vereșceaghin. În mod asemănător se pot determina și termenii liberi Δ_i din sistemul de ecuații canonice.

Această metodă dă rezultate bune numai atunci, cînd arborele cotit se compune din elemente de lungime mare în comparație cu dimensiunile secțiunilor transversale, respectiv dacă se reușește să se aprecieze destul de corect lungimile reduse ale elementelor, care compun arborele cotit.

Această condiție nu este însă realizabilă la toți arborii cotiți. Asupra deformațiunilor arborelui are o influență mare deformația brațelor. La multe motoare lungimea brațelor, deci și cursa pistoanelor, este mică în raport cu diametrele fusurilor arborelui și ale manetoanelor. De multe ori lungimea brațului este mai mică decît suma razelor fusurilor alăturate. În asemenea condiții în calculele de deformație va trebui să apară o *lungime redusă* a brațului în funcție de razele fusurilor alăturate. În special pentru astfel de cazuri se recomandă ca valorile coeficienților α_{ik} și β_{ik} să se determine experimental.

Cu o instalație arătată în figura 2, utilizînd mașina universală de tracțiune a Laboratorului de rezistența materialelor de la Universitatea din Brașov cu ajutorul unor ceasuri comparatoare, s-au putut măsura pentru un arbore plan deplasările α_{ik} și β_{ik} atît pentru cazul forțelor din planul arborelui, cît și pentru cazul forțelor normale pe acest plan. Determinarea coeficienților β_{ik} pentru forțele normale a necesitat folosirea unui dispozitiv pentru oprirea rotației arborelui.

Pe baza deplasărilor elastice măsurate se pot afla și corecțiile care trebuie aduse calculului teoretic.

Pentru mărirea preciziei în măsurare se recomandă ca determinarea coeficienților de influență să se facă pentru sistemul de bază, în care arborele este rezemat pe lagărele marginale.

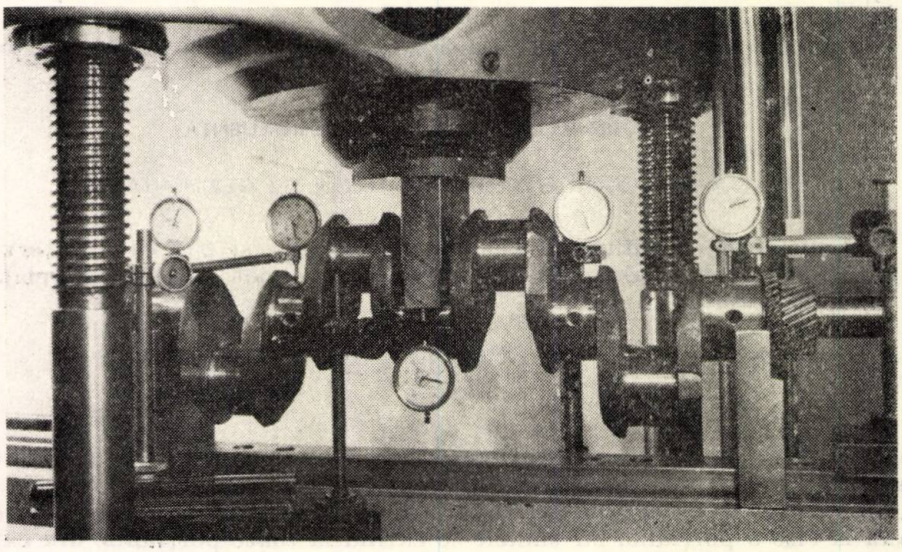


Fig. 2

3.2. SCHIMBAREA SISTEMULUI DE BAZĂ

Întrucît în sistemul de bază adoptat nu se pot pune condiții de joc în reazemele static determinate, pentru a putea studia cît mai multe cazuri posibile, este necesar a se schimba sistemul de bază. Pentru a nu mai calcula coeficienții α'_{ik} în noul sistem, luînd calculul sau încercările experimentale de la început, s-au stabilit relații între noii coeficienți de influență și cei din sistemul de bază vechi, admis inițial.

Pentru stabilirea relațiilor s-a considerat în figura 3 o grindă sprijinită pe mai multe reazeme, pentru care se cunosc coeficienții de influență α_{ik} în sistemul de bază $0 - r$, (cu reazeme la capetele grinzii).

În noul sistem de bază $m - n$ coeficienții de influență α'_{ik} se pot calcula cu relația, care rezultă din figura 3, unde se dă și explicația notațiilor :

$$\alpha'_{ik} = (\alpha_{ik} - \alpha_{mk}) - (1 - \lambda_{nk})(\alpha_{im} - \alpha_{mm}) - \lambda_{nk}(\alpha_{in} - \alpha_{mn}) - \tag{7}$$

$$- \lambda_{in}[(\alpha_{nk} - \alpha_{mk}) - (1 - \lambda_{nk})(\alpha_{nm} - \alpha_{mm}) - \lambda_{nk}(\alpha_{nn} - \alpha_{mn})].$$

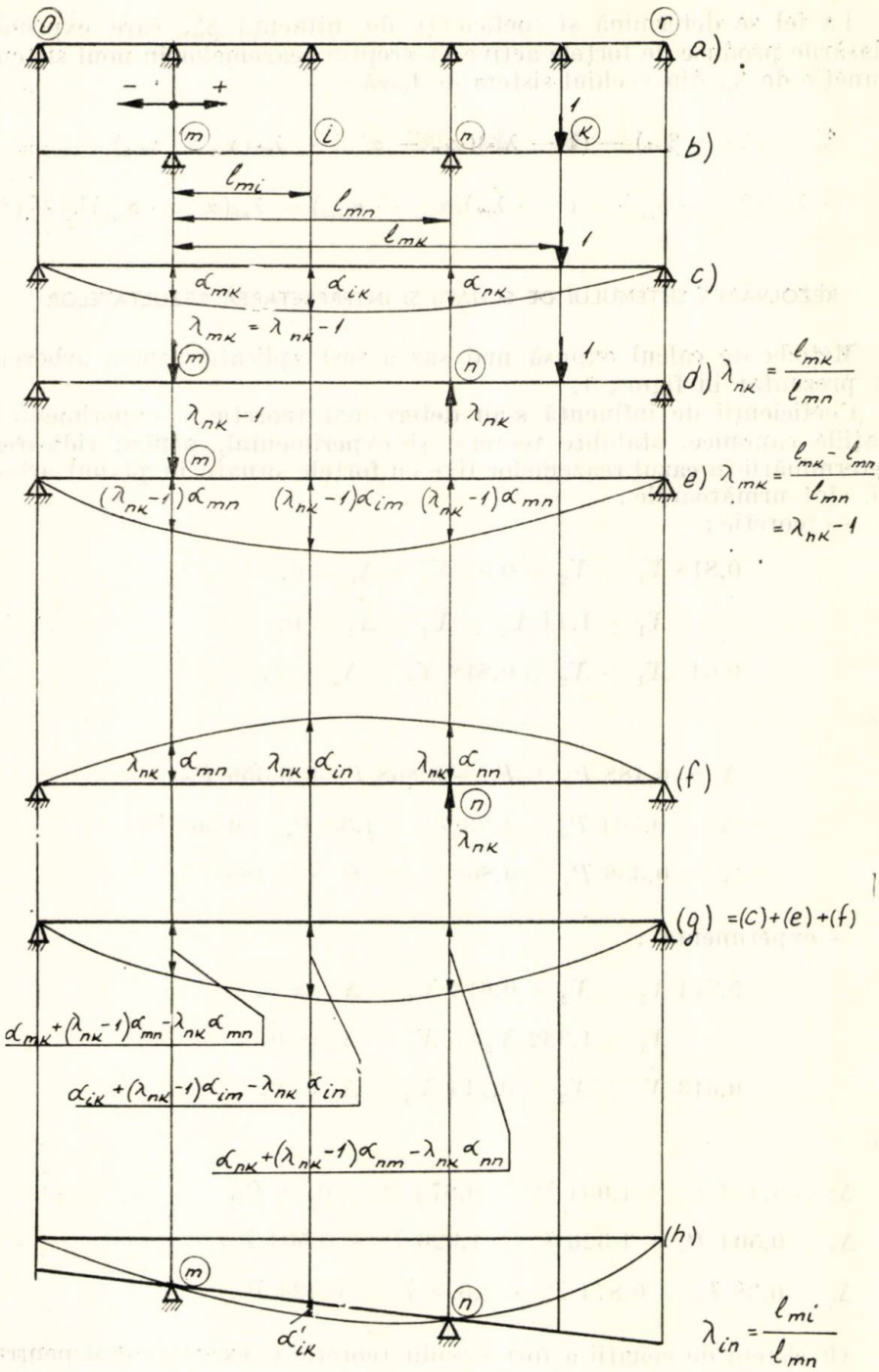

0
r
a)
m
i
n
k
b)
l_{mi}
l_{mn}
l_{mk}
1
c)
α_{mk}
α_{ik}
α_{nk}
$\lambda_{mk} = \lambda_{nk} - 1$
d) $\lambda_{nk} = \frac{l_{mk}}{l_{mn}}$
$\lambda_{nk} - 1$
λ_{nk}
e) $\lambda_{mk} = \frac{l_{mk} - l_{mn}}{l_{mn}} = \lambda_{nk} - 1$
$(\lambda_{nk}-1)\alpha_{mn}$
$(\lambda_{nk}-1)\alpha_{im}$
$(\lambda_{nk}-1)\alpha_{mn}$
$\lambda_{nk}\alpha_{mn}$
$\lambda_{nk}\alpha_{in}$
$\lambda_{nk}\alpha_{nn}$
(f)
(g) =(c)+(e)+(f)
$\alpha_{mk}+(\lambda_{nk}-1)\alpha_{mn}-\lambda_{nk}\alpha_{mn}$
$\alpha_{ik}+(\lambda_{nk}-1)\alpha_{im}-\lambda_{nk}\alpha_{in}$
$\alpha_{nk}+(\lambda_{nk}-1)\alpha_{nm}-\lambda_{nk}\alpha_{nn}$
(h)
α'_{ik}
$\lambda_{in} = \frac{l_{mi}}{l_{mn}}$

Fig. 3

La fel se determină și coeficienții de influență β'_{ik}, care exprimă deplasările produse de forțele active în dreptul reazemelor în noul sistem în funcție de β_{ik} din vechiul sistem de bază :

$$\beta'_{ik} = (\beta_{ik} - \beta_{mk}) - (1 - \lambda_{nk})(\alpha_{im} - \alpha_{mm}) - \lambda_{nk}(\alpha_{in} - \alpha_{mn}) -$$

$$- \lambda_{in}[(\beta_{nk} - \beta_{mk}) - (1 - \lambda_{nk})(\alpha_{nm} - \alpha_{mm}) - \lambda_{nk}(\alpha_{nn} - \alpha_{mn})]. \quad (8)$$

4. REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII ȘI INTERPRETAREA REZULTATELOR

Metoda de calcul expusă mai sus a fost aplicată pentru arborele cotit prezentat în figura 1.

Coeficienții de influență s-au determinat teoretic și experimental. Ecuațiile canonice, stabilite teoretic și experimental, pentru ridicarea nedeterminării în cazul reazemelor fixe cu forțele situate în planul arborelui, sînt următoarele :

— teoretic :

$$0{,}818\, X_1 + X_2 + 0{,}64\, X_3 + \Delta_1 = 0,$$

$$X_1 + 1{,}44\, X_2 + X_3 + \Delta_2 = 0,$$

$$0{,}64\, X_1 + X_2 + 0{,}818\, X_3 + \Delta_3 = 0,$$

unde

$$\Delta_1 = 0{,}488\, P_a + P_b + 0{,}868\, P_c + 0{,}356\, P_d,$$

$$\Delta_2 = 0{,}564\, P_a + 1{,}33\, P_b + 1{,}33\, P_c + 0{,}564\, P_d,$$

$$\Delta_3 = 0{,}356\, P_a + 0{,}868\, P_b + P_c + 0{,}488\, P_d.$$

— experimental :

$$0{,}714\, X_1 + X_2 + 0{,}613\, X_3 + \Delta_1 = 0,$$

$$X_1 + 1{,}332\, X_2 + X_3 + \Delta_2 = 0,$$

$$0{,}613\, X_1 + X_2 + 0{,}714\, X_3 + \Delta_3 = 0,$$

unde

$$\Delta_1 = 0{,}424\, P_a + 1{,}054\, P_b + 0{,}874\, P_c + 0{,}38\, P_d,$$

$$\Delta_2 = 0{,}504\, P_a + 1{,}326\, P_b + 1{,}326\, P_c + 0{,}504\, P_d,$$

$$\Delta_3 = 0{,}38\, P_a + 0{,}874\, P_b + 1{,}054\, P_c + 0{,}424\, P_d.$$

Alt sistem de ecuații a fost stabilit teoretic și experimental pentru cazul forțelor normale pe planul arborelui cotit, (ecuațiile de mai sus sînt scrise în kgf pentru forțe și în cm pentru lungimi).

Pe baza deformațiilor determinate experimental s-a putut stabili că în formulele pentru determinarea deformației după metoda Maxwell-Mohr în loc de lungimea l a brațului manivelei trebuia luat în calcul în exemplul considerat :

— 0,23 l pentru cazul forțelor din planul arborelui (solicitare de încovoiere) ;

— 0,2 l pentru cazul forțelor normale pe plan (solicitare de răsucire).

Corecțiile sînt relativ mari datorită faptului că la acest arbore suma razelor fusurilor alăturate brațului (80 mm) este mai mare decît lungimea lui (65 mm).

În sistemele de ecuații de genul acelora arătate în (4) și (5) valoarea lui δ poate fi de asemenea corectată pe baza rezultatelor experimentale (valoarea lui δ, care apare în ecuație, este egală cu valoarea jocului, divizată printr-un coeficient, care depinde de mărimea deformațiilor în sistemul de bază adoptat).

Aflarea reacțiunilor din lagăre, pe baza metodei propuse, conduce la calcule destul de laborioase, întrucît aceste reacțiuni trebuie determinate, pentru diferite unghiuri de rotație și pentru diferite ipoteze de jocuri. Astfel, pentru arborele motorului în patru timpi, care s-a studiat, s-au calculat reacțiunile pentru rotații din 30° în 30° și s-au luat în considerare 10 ipoteze de jocuri. Aceasta a implicat calculul unui număr de 2400 reacțiuni.

Determinarea acestora, într-un timp util, desigur că nu poate fi făcută decît cu ajutorul mașinilor de calcul [3].

După stabilirea reacțiunilor se determină solicitările (tracțiune-compresiune, încovoiere, răsucire) în diferitele secțiuni ale arborelui (fusuri, brațe) și apoi tensiunile. Deoarece, de obicei, nu se cunosc secțiunile periculoase, urmează a se lua în considerare mai multe secțiuni. Și acest calcul este extrem de laborios și el poate fi programat tot pe calculator.

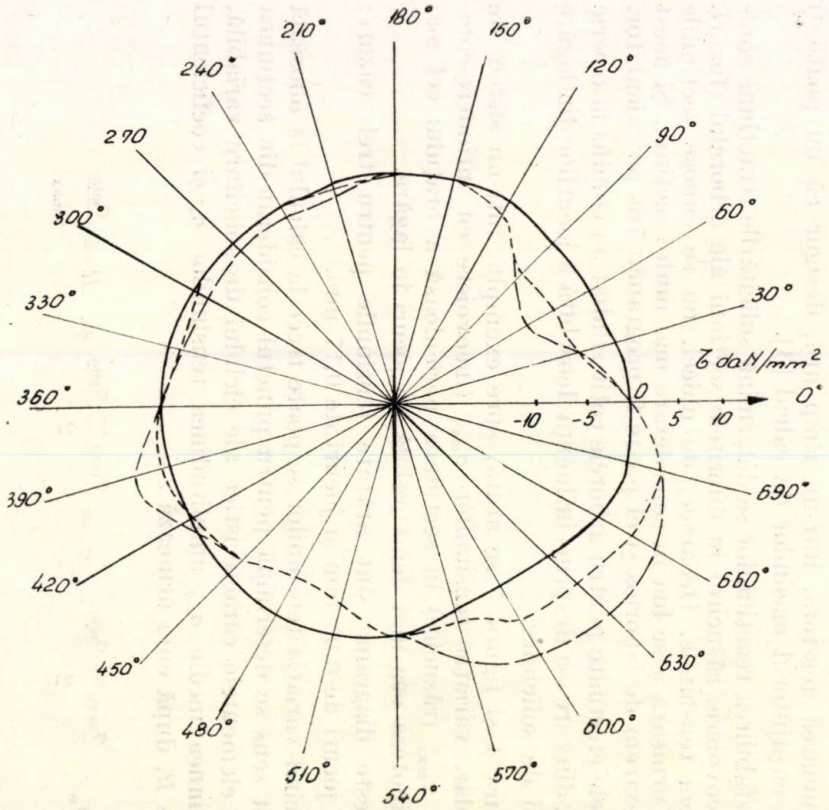
Calculele efectuate pentru arborele cotit studiat au condus la o serie de rezultate, din care s-a desprins influența deosebită a jocurilor din lagăre asupra stării de solicitare.

În figura 4 și figura 5 se arată, spre exemplu, într-un sistem de referință polar, variația tensiunilor σ_{max} (încovoiere cu întindere-compresiune) și τ_{max} (răsucire) în secțiunea periculoasă a brațului cel mai solicitat în ipoteza cea mai defavorabilă de jocuri în lagăre.

În aceste diagrame sînt arătate tensiunile pentru trei cazuri : jocuri nule, jocuri de 0,05 mm și jocuri de 0,17 mm.

Cunoscînd variația tensiunilor se poate trece la calculul la oboseală [4]. În acest sens se determină pentru punctul considerat din secțiunea periculoasă, elementele caracteristice ale ciclului de solicitare variabilă, anume tensiunea medie σ_m, amplitudinea tensiunilor σ_v și coeficientul de asimetrie R, după cum urmează :

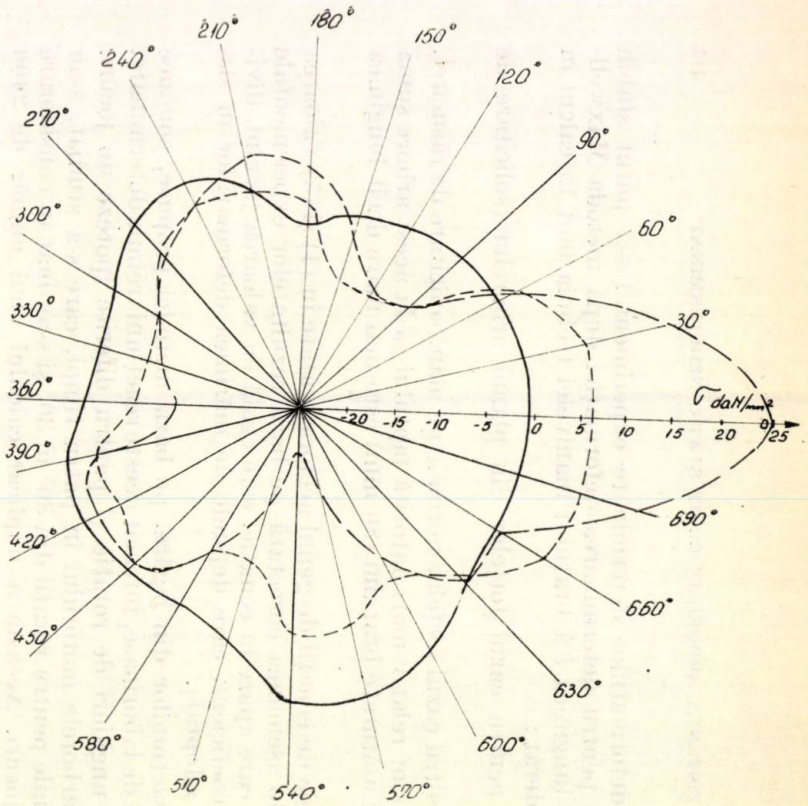
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad \sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \text{ și } \quad R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}.$$



LEGENDA :

——— joc 0
- - - - - - joc 0,05 mm
— — — joc 0,17 mm

Fig. 4



LEGENDA:

——— joc 0
- - - - - - - - joc 0.05 mm
— — — — joc 0.17 mm

Fig. 5

Coeficientul de siguranță al solicitării variabile se poate calcula în condiții acceptabile numai dacă s-au determinat rezistențele la oboseală σ_R și τ_R pe epruvete cu o structură cît mai apropiată de aceea a arborelui motor.

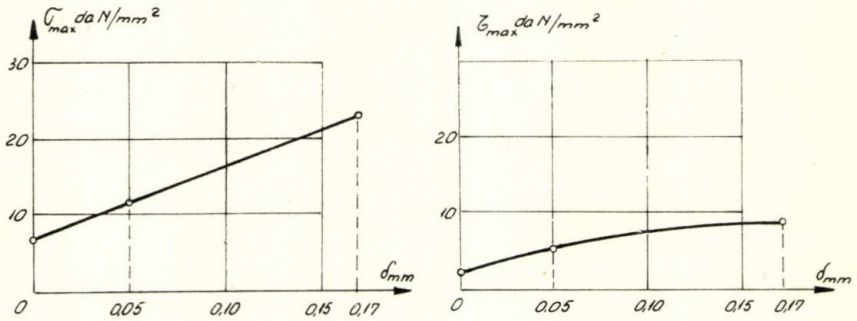


Fig. 6

De asemenea trebuie să se aprecieze cît mai exact valorile coeficienților de concentrare în cazul cînd nu există posibilitatea de a le determina experimental.

Din figura 6 rezultă că tensiunile pot crește foarte mult, odată cu apariția și creșterea jocurilor din lagăre.

Se observă, spre exemplu, că tensiunea σ_{max} în cazul existenței lagărelor cu joc poate fi de 2—3 ori mai mare, decît în cazul lagărelor fixe.

La arborele studiat s-a găsit că luarea în considerare a jocurilor de 0,05 mm reduce coeficientul de siguranță de la $c = 1{,}7$ la $c = 1{,}05$.

Primită la redacție la 17 martie 1972.

BIBLIOGRAFIE

1. B. Popa și colectiv, *Arbori cotiți*, București, Edit. tehnică, 1960.
2. Panait Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
3. I. Coșereanu, I. Deutsch, M. C. Tofan, Gh. Pamfil, *Contribuții la determinarea reacțiunilor în lagărele cu jocuri ale arborelui cotit*, Buletinul Universității din Brașov, vol. XIV, seria A, 1972.
4. G. Buzdugan, *Calculul de rezistență la solicitări variabile*, București, Edit. tehnică, 1963.

O METODĂ DE RECURENȚĂ PENTRU CALCULUL STABILITĂȚII CADRELOR ETAJATE

de N. POSEA

Institutul de petrol Ploiești

Din studiul în teoria de ordinul II al unei bare încovoiate și comprimate se stabilesc relații de recurență pentru deplasările și eforturile unei secțiuni în funcție de deplasările și eforturile secțiunii precedente.
Folosirea succesivă a acestora permite determinarea deplasărilor și eforturilor de la unul din capetele barei în funcție de deplasările și eforturile capătului opus, sub aceeași formă, indiferent de tipul încărcărilor exterioare.
Relațiile stabilite sub formă matriceală au fost sistematizate într-un algoritm, ușor de transpus într-un program pentru un calculator automat, atît pentru calculul de ordinul II, cît și pentru determinarea sarcinilor critice.
Procedeul general de calcul propus a fost concretizat pentru calculul cadrelor etajate cu o deschidere atît simetrice, cît și nesimetrice, care, dealtfel, au o mare aplicabilitate în practică.

Aplicarea metodelor generale — metoda eforturilor și metoda deplasărilor — la studiul stabilității barelor și sistemelor de bare, ca și la calculul eforturilor și deplasărilor în teoria de ordinul II, întîmpină dificultăți datorită funcțiilor speciale prin care se introduce influența forțelor axiale. Astfel, în cazul determinării sarcinilor critice, chiar cînd se cunosc funcțiile speciale pentru influența forțelor axiale, se ajunge la ecuații transcendente care nu pot fi rezolvate decît prin multiple încercări și fără posibilitatea aplicării unor expresii iterative.

De asemenea, aplicarea teoriei de ordinul II necesită stabilirea în prealabil a unor funcții de corecție pentru fiecare combinație de încărcări transversale ce poate interveni; calculul acestora este greoi, laborios și neadecuat unui proces de aproximații succesive.

În lucrarea de față, pornind de la ecuația diferențială a fibrei medii deformate în teoria de ordinul II, se exprimă relațiile de recurență ale eforturilor și deplasărilor și prin folosirea acestora se prezintă un procedeu adecuat pentru studiul stabilității mai multor tipuri de bare și cadre cu largă utilizare în practică.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 415–429

Algoritmele teoretice prezentate, fiind ciclice și necesitînd relativ puține date inițiale, îndeplinesc toate condițiile pentru a fi transpuse cu ușurință în programe de calcul pentru ordinatoare.

1. EXPRIMAREA EFORTURILOR ȘI DEPLASĂRILOR ÎN TEORIA DE ORDINUL II

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate pentru o bară dreaptă comprimată (fig. 1) este

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} + k^2 \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{q(x)}{EI}, \tag{1}$$

în care

$$k^2 = \frac{P}{EI}. \tag{2}$$

Soluția generală a acestei ecuații [3], folosind parametrii din origine v_0, φ_0, M_0, T_0 și pentru încărcările transversale $\sum_i \mathfrak{M}_i$ și $\sum_j Q_j$ (fig. 1) are forma

$$v = v_0 + \frac{\varphi_0}{k} \sin kx - \frac{M_0}{P}(1 - \cos kx) - \frac{T_0}{kP}(kx - \sin kx) -$$

$$- \frac{1}{P} \Sigma \mathfrak{M}_i [1 - \cos k(x - a_i)] + \frac{1}{kP} \Sigma Q_j [k(x - b_j) - \sin k(x - b_j)]. \tag{3}$$

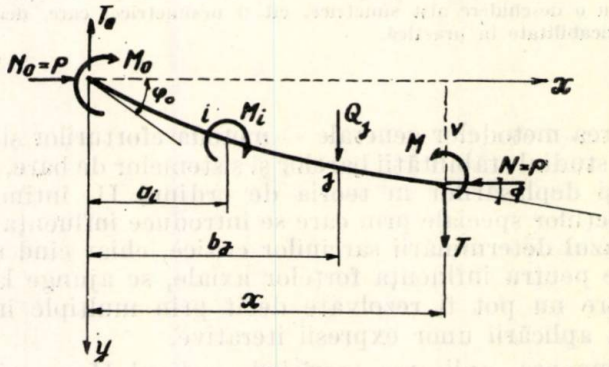


Fig. 1

Din aceasta, ținînd seama că $\varphi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ și $M = -EI\, v''$, se deduce

$$\varphi = \varphi_0 \cos kx - \frac{M_0}{P} k \sin kx - \frac{T_0}{P}\left((1 - \cos kx) - \frac{k}{P} \Sigma \mathfrak{M}_i \sin k(x - a_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{P} \Sigma Q_j [1 - \cos k(x - b_j)], \right. \tag{4}$$

$$M = \varphi_0 \frac{P}{k} \sin kx + M_0 \cos kx + \frac{T_0}{k} \sin kx + \Sigma \mathfrak{M}_i \cos k(x - a_i) -$$

$$- \frac{1}{k} \Sigma Q_j \sin k(x - b_j). \tag{5}$$

În relațiile (3), (4), (5) sumele (Σ) se referă la toate cuplele $\mathfrak{M}_i$ și forțele Q_j care se află în stînga secțiunii x.

Pentru forța tăietoare pe forma deformată $T^d = \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}$ se poate utiliza și relația

$$T^d = T + P\varphi, \tag{6}$$

unde T reprezintă forța tăietoare în cazul barei nedeformate și, evident, provine din încărcările transversale, care se notează generic cu Q. Astfel: $T = T^Q$.

2. RELAȚII DE RECURENȚĂ PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR ȘI EFORTURILOR ÎN TEORIA DE ORDINUL II

Se consideră segmentul de bară i (fig. 2*a*) avînd lungimea l_i, momentul de inerție I_i și fără forțe transversale exterioare în intervalul $i-1$, i (segmentul se notează cu indicele nodului din dreapta). Forțele de legătură corespunzătoare forței axiale și tăietoare se aleg cu direcțiile din cazul barei nedeformate. În această situație

$$T_i = T_{i-1}. \tag{7}$$

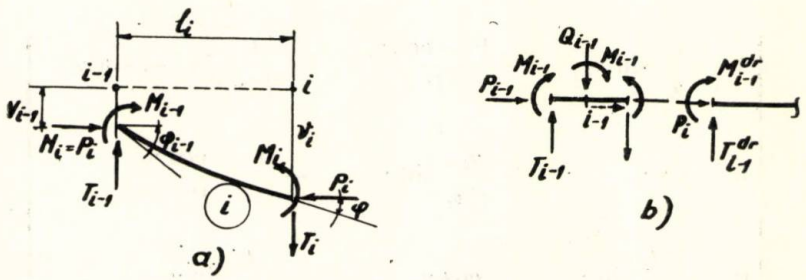


Fig. 2

Alegînd originea în $i-1$ și notînd

$$\nu_i = l_i \sqrt{\frac{P_i}{EI_i}} = l_i k_i, \tag{8}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

prin particularizarea expresiilor (3), (4) şi (5) se obţin relaţiile de recurenţă

$$v_i = v_{i-1} + \varphi_{i-1}\frac{l_i}{\nu_i}\sin\nu_i - M_{i-1}\frac{1}{P_i}(1-\cos\nu_i) - T_{i-1}\frac{l_i}{P_i\nu_i}(\nu_i - \sin\nu_i),$$

$$\varphi_i = \varphi_{i-1}\cos\nu_i - M_{i-1}\frac{\nu_i}{P_i l_i}\sin\nu_i - T_{i-1}\frac{1}{P_i}(1-\cos\nu_i), \tag{9}$$

$$M_i = \varphi_{i-1}\frac{P_i l_i}{\nu_i}\sin\nu_i + M_{i-1}\cos\nu_i + T_{i-1}\frac{l_i}{\nu_i}\sin\nu_i,$$

care permit calculul valorilor v_i, φ_i, M_i, T_i în funcţie de valorile v_{i-1}, φ_{i-1}, M_{i-1}, T_{i-1}.

Considerînd vectorii coloană

$$\{N_{i-1}\} = \begin{Bmatrix} v_{i-1} \\ \varphi_{i-1} \\ M_{i-1} \\ T_{i-1} \end{Bmatrix}; \quad \{N_i\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ T_i \end{Bmatrix}, \tag{10}$$

care definesc deplasările şi eforturile de la capetele elementului $i-1$, i, relaţiile de recurenţă (7) şi (9) se scriu matriceal sub forma

$$\{N_i\} = [A_i]\{N_{i-1}\}, \tag{11}$$

în care matricea de transformare $[A_i]$ este

$$[A_i] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l_i}{\nu_i}\sin\nu_i & -\frac{1-\cos\nu_i}{P_i} & -\frac{l_i}{P_i\nu_i}(\nu_i - \sin\nu_i) \\ 0 & \cos\nu_i & -\frac{\nu_i}{P_i l_i}\sin\nu_i & -\frac{1-\cos\nu_i}{P_i} \\ 0 & \frac{P_i l_i}{\nu_i}\sin\nu_i & \cos\nu_i & \frac{l_i}{\nu_i}\sin\nu_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Aplicînd expresia (11) în mod succesiv, pornind de la originea barei (nodul 0) pînă la ultimul nod n, se ajunge la exprimarea vectorului $\{N_n\}$

corespunzător nodului n, în funcție de vectorul $\{N_0\}$, corespunzător originii, sub forma

$$\{N_n\} = [A_n]\,[A_{n-1}] \ldots [A_1]\{N_0\} = [A]\,\{N_0\}. \tag{13}$$

Se observă că matricea $[A]$ de dimensiuni 4×4 este produsul matricelor de transformare ale tuturor elementelor.

În cazul cînd nodurile considerate $0, 1, \ldots i, \ldots, n$ se aplică încărcări exterioare, constituite în vectorii

$$\{\bar{N}_1\} = \{0, 0, \mathfrak{M}_1, Q_1\}^T; \ldots \{\bar{N}_i\} = \{0, 0, \mathfrak{M}_i, Q_i\}^T; \ldots \tag{14}$$

în care indicele superior T indică transpunerea, eforturile din secțiunea din dreapta a unui nod oarecare se vor exprima în funcție de eforturile din secțiunea din stînga prin scrierea ecuațiilor de echilibru ale nodului respectiv (fig. 2*b*). Astfel, vectorul parametrilor din secțiunea din dreapta a nodului $i - 1$ (fig. 2*b*) va fi

$$\{N^{dr}_{i-1}\} = \{N_{i-1}\} + \{\bar{N}_{i-1}\}. \tag{a}$$

Introducînd în relația (11) $\{N^{dr}_{i-1}\}$ în loc de $\{N_{i-1}\}$ și ținînd seama de (a), se obține

$$\{N_i\} = [A_i]\{N_{i-1}\} + [A_i]\{\bar{N}_{i-1}\}, \tag{15}$$

care reprezintă relația de recurență pentru calculul deplasărilor și eforturilor în teoria de ordinul II.

Dacă $\{N_{i-1}\}$ se exprimă în funcție de $\{N^{dr}_{i-2}\} = \{N_{i-2}\} + \{\bar{N}_{i-2}\}$ și se procedează astfel pînă la vectorul $\{N_1\}$, scris în funcție de $\{N_0\}$, se ajunge la relația

$$\{N_i\} = [A_i][A_{i-1}] \ldots [A_1]\{N_0\} + [A_i][A_{i-1}] \ldots [A_2]\{\bar{N}_1\} + \ldots$$
$$+ [A_i][A_{i-1}]\{\bar{N}_{i-2}\} + [A_i]\{\bar{N}_{i-1}\}, \tag{16}$$

care exprimă vectorul deplasări-eforturi din secțiunea i în funcție de vectorul $\{N_0\}$ și vectorii încărcărilor exterioare din noduri.

Pentru nodul n, de la capătul din dreapta al barei, vectorul deplasări-eforturi este

$$\{N_n\} = [A_{n,0}]\{N_0\} + [A_{n,1}]\{\bar{N}_1\} + [A_{n,2}]\{\bar{N}_2\} + \ldots + [A_{n,i}]\{\bar{N}_i\} + \ldots$$
$$+ [A_{n,n-2}]\{\bar{N}_{n-2}\} + [A_{n,n-1}]\{\bar{N}_{n-1}\}. \tag{17}$$

În această relație o matrice oarecare, de exemplu

$$[A_{n,i}] = [A_n][A_{n-1}] \ldots [A_{i+2}][A_{i+1}], \tag{18}$$

reprezintă produsul matricelor de transformare ale elementelor cuprinse între nodurile i și n. Se recunoaște cu ușurință că matricea $[A_{n,0}]$ este tocmai matricea $[A]$ din relația (13).

Pornind de la relațiile de recurență stabilite mai sus, ordinea operațiilor pentru calculul deplasărilor și eforturilor în teoria de ordinul II este următoarea :

— se împarte bara în elemente astfel încît sarcinile exterioare să se aplice numai la noduri și se calculează pentru fiecare element P_i, ν_i;

— se determină matricele $[A_i]$ pentru toate elementele;

— dacă se cunoaşte vectorul $\{N_0\}$ complet se aplică succesiv relaţia (15) pînă la ultimul nod;

— dacă o parte din componentele lui $\{N_0\}$ nu se cunosc, se determină produsele de matrice $[A_{i,0}]$ pînă în nodul unde dispunem de condiţiile necesare pentru determinarea tuturor componentelor vectorului $\{N_0\}$, după care se efectuează calculul cu (15) sau direct cu (16) sau (17).

Procedeul expus poate fi aplicat şi barelor cu secţiune variabilă făcînd aproximaţia că pe fiecare tronson momentul de inerţie este constant. În plus caracterul ciclic al operaţiilor face ca algoritmul să fie uşor de programat pe un calculator cifric.

3. DETERMINAREA SARCINILOR CRITICE PRIN METODA PARAMETRILOR ÎN ORIGINE

În absenţa unor încărcări transversale, relaţia (13) exprimă, prin intermediul matricei

$$[A] = [A_n]\,[A_{n-1}]\ldots[A_i]\ldots[A_1], \tag{19}$$

vectorul parametrilor din secţiunea n în funcţie de vectorul parametrilor din origine (secţiunea 0).

Fiecare din matricele produsului (19) este o matrice pătrată (4×4), care se calculează cu expresia (12) care este dependentă de un parametru $\nu = l\sqrt{\frac{P}{EI}}$ deoarece toţi ceilalţi parametri ν_i se exprimă în funcţie de aceasta. Sistemul elastic îşi pierde stabilitatea cînd determinantul matricei A este nul

$$\det [A] = 0. \tag{20}$$

Aceasta reprezintă ecuaţia echilibrului critic [4] şi rădăcinile ei dau valorile factorului critic ν_{cr} care, prin intermediul relaţiei (8), conduce la valorile sarcinilor critice.

În situaţia cînd numărul parametrilor nenuli ai vectorului $\{N_0\}$ este egal cu numărul parametrilor nuli ai vectorului $\{N_n\}$ în produsul de matrice (19) interesează numai valorile elementelor care fac parte din coloanele parametrilor din origine nenuli şi din liniile parametrilor finali nuli; în acest caz ecuaţia echilibrului critic se reduce la un determinant ce cuprinde numai aceste elemente. Calculul se face prin aproximaţii succesive pornind de la o anumită valoare ν pînă cînd se găsesc două valori ν_a, ν_b pentru care $\det [A]$ are valori apropiate de zero şi de semne contrarii. Între aceste valori, prin interpolare, se stabileşte valoarea ν_{cr}.

În cazul cînd intervin condiţii la limită şi în alte puncte decît în extremităţile 0 şi n, acestea se introduc sub forma unor vectori cunoscuţi $\{\bar{N}_i\}$ şi atunci vectorul parametrilor din secţiunea n este de forma (17).

În această situaţie ecuaţiile corespunzătoare tuturor condiţiilor cunoscute în afara originii vor forma un sistem omogen de ecuaţii al cărui determinant nul va fi tocmai ecuaţia echilibrului critic.

În astfel de cazuri este posibil ca procedeele bazate pe metodele generale să fie mai expeditive.

4. STABILITATEA CADRELOR ETAJATE PRIN RELAȚII DE RECURENȚĂ

Cadrele etajate sînt tipurile de structuri cu cea mai largă utilizare în practică. De aceea dezvoltarea unor metode specifice, care să necesite un volum redus de calcule și să fie ușor de aplicat la proiectare prezintă o importanță deosebită.

4.1. CADRE SIMETRICE CU O SINGURĂ DESCHIDERE

Se consideră cadrul etajat simetric din figura 3*a*, acționat de sarcini axiale numai la noduri. Fiecare etaj va fi notat cu indicele nivelului superior. Astfel, stîlpul dintre nivelele $i-1$, i este numit stîlpul i, iar forța axială din el va fi $P_i = \sum_{j=i}^{n} F_j$.

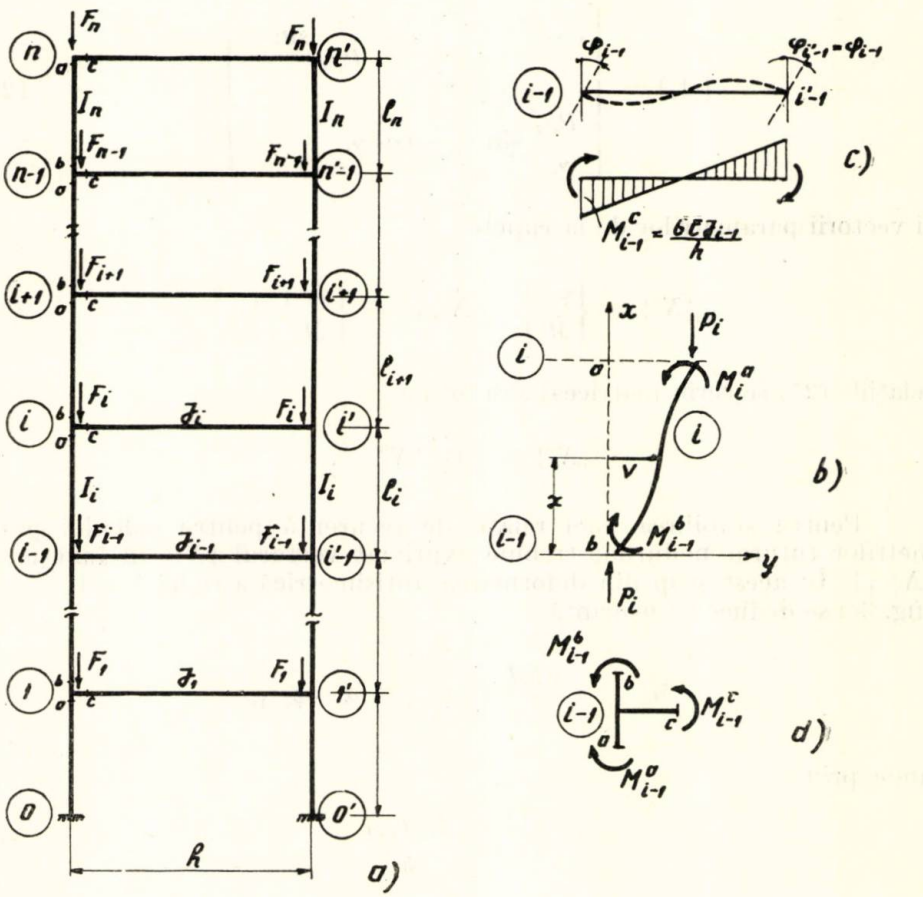


Fig. 3

Datorită simetriei încărcării și a formei antisimetrice de pierdere a stabilității, forțele tăietoare din stîlpi ce apar prin deformare se neglijează. În acest caz forța tăietoare din expresiile (9) devine nulă și pentru calculul deformatei de pierdere a stabilității sînt suficienți parametrii φ și M la fiecare capăt de bară.

Particularizînd relațiile (9) pentru cazul barei i din figura 3*b* se obține :

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} \cos \nu_i - M^b_{i-1} \frac{\nu_i}{P_i l_i} \sin \nu_i,$$

$$M^a_i = \varphi_{i-1} \frac{P_i l_i}{\nu_i} \sin \nu_i + M^b_{i-1} \cos \nu_i. \tag{21}$$

Notînd matricea (2 × 2), caracteristică stîlpului i

$$[A_i] = \begin{bmatrix} \cos \nu_i & -\dfrac{\nu_i}{P_i l_i} \sin \nu_i \\ \dfrac{P_i l_i}{\nu_i} \sin \nu_i & \cos \nu_i \end{bmatrix} \tag{22}$$

și vectorii parametrilor de la capete

$$\{N^a_i\} = \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ M^a_i \end{Bmatrix}; \quad \{N^b_{i-1}\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{i-1} \\ M^b_{i-1} \end{Bmatrix}, \tag{23}$$

relațiile (21) se scriu matriceal sub forma

$$\{N^a_i\} = [A_i] \{N^b_{i-1}\}. \tag{24}$$

Pentru stabilirea unei relații de recurență pentru calculul parametrilor tuturor nodurilor trebuie exprimat vectorul $\{N^a_i\}$ în funcție de $\{N^a_{i-1}\}$. În acest scop din deformarea antisimetrică a riglei $i - 1$, $i' - 1$ (fig. 3*c*) se deduce cu ușurință

$$M^c_{i-1} = \frac{6EJ_{i-1}}{h} \varphi_{i-1} = \alpha_{i-1} \varphi_{i-1}, \tag{b}$$

unde prin

$$\alpha_{i-1} = \frac{6EJ_{i-1}}{h} \tag{25}$$

s-a notat rigiditatea la încovoiere antisimetrică a riglei nivelului $i - 1$.

Știind că toate capetele barelor ce vin într-un nod au aceeași rotire vectorul parametrilor din secțiunea c a riglei $i-1$ se poate scrie sub forma :

$$\{N_{i-1}^c\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{i-1} \\ M_{i-1}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_{i-1} & 0 \end{bmatrix} \{N_{i-1}^a\} = [C_{i-1}]\{N_{i-1}^a\}, \tag{26}$$

unde $[C_{i-1}]$ este matricea de transformare a vectorului $\{N_{i-1}^a\}$ în vectorul $\{N_{i-1}^c\}$.

Din echilibrul nodului $i-1$ (fig. 3*d*) se obține relația

$$M_{i-1}^c = M_{i-1}^a - M_{i-1}^c, \tag{c}$$

care, asociată cu condiția $\varphi_{i-1}^a = \varphi_{i-1}^b = \varphi_{i-1}$, conduce la exprimarea vectorului $\{N_{i-1}^b\}$ în funcție de $\{N_{i-1}^a\}$,

$$\{N_{i-1}^b\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_{i-1} & 1 \end{bmatrix} \{N_{i-1}^a\} = [B_{i-1}]\{N_{i-1}^a\}, \tag{d}$$

unde

$$[B_{i-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_{i-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

reprezintă matricea (2×2) de transformare a vectorului $\{N_{i-1}^a\}$ în $\{N_{i-1}^b\}$.

Introducînd (d) în (24) și notînd

$$[A_i][B_{i-1}] = [D_i], \tag{28}$$

rezultă

$$\{N_i^a\} = [D_i]\{N_{i-1}^a\}, \tag{29}$$

care reprezintă relația de recurență a parametrilor de la nodul i, în funcție de parametrii nodului $i-1$.

Aplicînd succesiv relația (29) pornind din 0 se ajunge la exprimarea vectorului $\{N_n^a\}$ în funcție de $\{N_0\}$ sub forma

$$\{N_n^a\} = [D_n][D_{n-1}]\ldots[D_i]\ldots[D_2][A_1]\{N_0\} = [D_{n,0}]\{N_0\}. \tag{30}$$

Ultima matrice din produsul indicat de $[D_{n,0}]$ similar cu produsul (19) este $[A_1]$ și nu o matrice $[D_1]$ deoarece nivelul 0 nu are riglă și matricea B_0 corespunzătoare (27) devine matrice unitate.

La ultimul nivel, folosind (26), (30) și ecuația de echilibru a nodului n, rezultă condiția

$$([D_{n,0}] - [C_n])\{N_0\} = 0, \tag{31}$$

care reprezintă un sistem omogen de ecuații, avînd ca necunoscute parametrii originii. Pentru obținerea unor soluții nebanale trebuie îndeplinită relația

$$\det([D_{n,0}] - [C_n]) = 0, \tag{32}$$

care reprezintă ecuația echilibrului critic. Întrucît în cazul considerat $\varphi_0 = 0$, vectorul $\{N_0\}$ are o singură componentă necunoscută, ceea ce face ca sistemul (32) să se reducă la o singură ecuație, care se rezolvă prin corectări succesive în modul precizat la punctul 3.

Observație. Dacă relațiile de recurență se pornesc de la nodul n spre nodul 0, după o metodologie [2] asemănătoare cu cea prezentată mai sus se ajunge să se determine înălțimea critică (H_{cr}) a cadrului de la care cadrul își pierde stabilitatea.

Procedeul este următorul: se pornește de la o rotire θ_n mică și se verifică compatibilitatea deformațiilor cu legăturile de la baza structurii. Operațiile de recurență merg pînă la un rang r pentru care se observă că legăturile sînt asigurate și căruia îi corespunde înălțimea critică.

4.2. CADRE NESIMETRICE CU O SINGURĂ DESCHIDERE

În cazul unui cadru nesimetric (fig. 4) acționat de forțe axiale pe stîlpi, păstrînd convențiile de notare folosite la cadrele simetrice, se vor

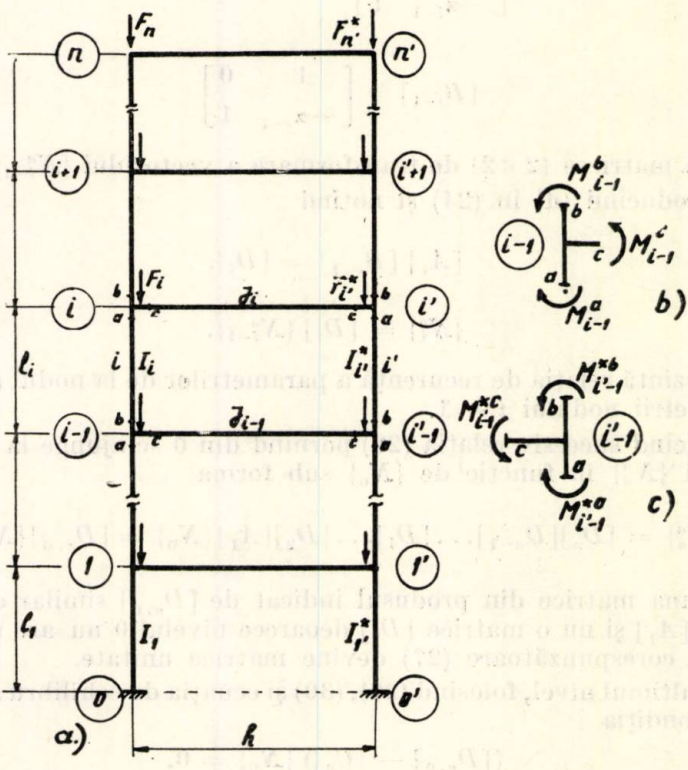


Fig. 4

lua ca parametri rotirile nodurilor și momentele de la capetele superioare ale stîlpilor fiecărui etaj. Astfel, la nivelul i se va introduce vectorul

$$\{N^a_{i,i'}\} = \{\varphi_i \varphi^*_{i'} M^a_i M^{*a}_{i'}\}^T, \tag{33}$$

în care indicele T înseamnă transpunere, iar rotirea și momentul pe stîlpul din dreapta, pentru claritate, s-au notat și cu asterisc.

Alegînd pentru ambii stîlpi același sistem de axe și particularizînd relațiile (9), ținînd seama de constanta forței tăietoare pe înălțimea etajului, se obține

— pentru stîlpul i :

$$v_i = v_{i-1} + \varphi_{i-1}\frac{l_i}{\nu_i}\sin\nu_i - M^b_{i-1}\frac{1}{P_i}(1-\cos\nu_i) - T_i\frac{l_i}{P_i\nu_i}(\nu_i - \sin\nu_i),$$

$$\varphi_i = \varphi_{i-1}\cos\nu_i - M^b_{i-1}\frac{\nu_i}{P_i l_i}\sin\nu_i - T_i\frac{1}{P_i}(1-\cos\nu_i), \tag{34}$$

$$M^a_i = \varphi_{i-1}\frac{P_i l_i}{\nu_i}\sin\nu_i + M^b_{i-1}\cos\nu_i + T_i\frac{l_i}{\nu_i}\sin\nu_i,$$

— pentru stîlpul i' :

$$v^*_i = v^*_{i-1} + \varphi^*_{i-1}\frac{l_i}{\nu^*_i}\sin\nu^*_i - M^{*b}_{i-1}\frac{1}{P^*_i}(1-\cos\nu^*_i) - T^*_i\frac{l_i}{P^*_i\nu^*_i}(\nu^*_i - \sin\nu^*_i),$$

$$\varphi^*_i = \varphi^*_{i-1}\cos\nu^*_i - M^{*b}_{i-1}\frac{\nu^*_i}{P^*_i l_i}\sin\nu^*_i - T^*_i\frac{1}{P^*_i}(1-\cos\nu^*_i), \tag{35}$$

$$M^{*a}_i = \varphi^*_{i-1}\frac{P^*_i l_i}{\nu^*_i}\sin\nu^*_i + M^{*b}_{i-1}\cos\nu^*_i + T^*_i\frac{l_i}{\nu^*_i}\sin\nu^*_i.$$

Întrucît nu există forțe orizontale și se neglijează scurtarea prin forțe axiale a riglelor există condițiile

$$T_i = -T^*_i, \tag{e}$$
$$v_i = v^*_i,$$

din care, notînd

$$\beta_i = \frac{l_i}{P_i\nu_i}(\nu_i - \sin\nu_i) + \frac{l_i}{P^*_i\nu^*_i}(\nu^*_i - \sin\nu^*_i), \tag{36}$$

rezultă

$$T_i = \frac{1}{\beta_i}\Big[\varphi_{i-1}\frac{l_i}{\nu_i}\sin\nu_i - \varphi^*_{i-1}\frac{l_i}{\nu^*_i}\sin\nu^*_i - M^b_{i-1}\frac{1}{P_i}(1-\cos\nu_i) +$$

$$+ M^*_{i-1}\frac{1}{P^*_i}(1-\cos\nu^*_i). \tag{37}$$

Introducînd (37) în (34) și (35) care se aranjează sub forma (33) se obține relația

$$\{N^a_{i,i'}\} = [A_i]\,\{N^b_{i-1,i'-1}\}, \tag{f}$$

în care matricea de transformare A_i are expresia

$$[A_i] = \begin{bmatrix} \cos\nu_i - \dfrac{l_i \sin\nu_i}{p_i\beta_i\nu_i}(1-\cos\nu_i^*) & \dfrac{l_i\sin\nu_i^*}{\nu_i^* P_i}(1-\cos\nu_i^*) & -\dfrac{\nu_i\sin\nu_i}{P_i\, l_i}+\dfrac{1}{P_i^2\beta_i}(1-\cos\nu_i)^2 & -\dfrac{(1-\cos\nu_i)(1-\cos\nu_i^*)}{P_iP_i^*\beta_i} \\ \dfrac{l_i\sin\nu_i}{\nu_i\beta_i P_i^*}(1-\cos\nu_i^*) & \cos\nu_i^* - \dfrac{l_i\sin\nu_i^*}{\nu_i^* P_i^*}(1-\cos\nu_i^*) & -\dfrac{(1-\cos\nu_i)(1-\cos\nu_i^*)}{\beta_i P_i P_i^*} & -\dfrac{\nu_i^*}{P_i^* l_i}\sin\nu_i^* + \dfrac{1}{\beta_i l_i^2}(1-\cos\nu_i^*)^2 \\ \dfrac{P_i l_i}{\nu_i}\sin\nu_i + \dfrac{l_i^2}{\beta_i\nu_i^2}\sin^2\nu_i & -\dfrac{l_i^2}{\beta_i\nu_i\nu_i^*}\sin\nu_i\sin\nu_i^* & \cos\nu_i - \dfrac{l_i\sin\nu_i}{P_i\beta_i\nu_i}(1-\cos\nu_i) & \dfrac{l_i\sin\nu_i}{\beta_i\nu_i P_i^*}(1-\cos\nu_i^*) \\ -\dfrac{l_i^2}{\beta_i\nu_i\nu_i^*}\sin\nu_i\sin\nu_i^* & \dfrac{P_i^* l_i}{\nu_i^*}\sin\nu_i^* + \dfrac{l_i^2}{\beta_i\nu_i^{*2}}\sin^2\nu_i^* & \dfrac{l_i(1-\cos\nu_i)}{P_i\beta_i\nu_i^*}\sin\nu_i^* & \cos\nu_i^* - \dfrac{l_i\sin\nu_i^*}{\beta_i P_i^*\nu_i^*}(1-\cos\nu_i^*) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Momentele pe rigla i, i' avînd sensurile pozitive indicate în figura 4 *b*,*c* se exprimă în funcție de rotirile φ_i, φ_i^*,

$$M_{i-1}^c = \frac{2EJ_{i-1}}{h}(2\varphi_{i-1} + \varphi_{i'-1}^*),$$

$$M_{i'-1}^{*c} = \frac{2EJ_{i-1}}{h}(\varphi_{i-1} + 2\varphi_{i'-1}^*). \tag{39}$$

Scriind echilibrul nodurilor $i - 1$ (fig. 4*b*) și $i' - 1$ (fig. 4*c*) se obțin relațiile

$$M_{i-1}^b = M_{i-1}^a - M_{i-1}^c,$$

$$M_{i'-1}^{*b} = M_{i'-1}^{*a} - M_{i'-1}^{*c}. \tag{g}$$

Aranjînd vectorul $\{N_{i-1,i'-1}^b\}$ prin utilizarea relațiilor (39) și (g) se obține

$$\{N_{i-1,i'-1}^b\} = [B_{i-1}]\{N_{i-1,i'-1}^a\}, \tag{h}$$

în care matricea (4 × 4) de transformare are expresia

$$[B_{i-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4EJ_{i-1}}{h} & -\frac{2EJ_{i-1}}{h} & 1 & 0 \\ -\frac{2EJ_{i-1}}{h} & -\frac{4EJ_{i-1}}{h} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Introducînd (h) în (f) și notînd

$$[D_i] = [A_i]\,[B_{i-1}], \tag{41}$$

se obține relația de recurență

$$\{N_{i,i'}^a\} = [D_i]\,\{N_{i-1,i'-1}^a\}, \tag{42}$$

care permite determinarea parametrilor de la un nivel în funcție de vectorul parametrilor de la nivelul inferior.

La ultimul nivel, aranjînd rotirile nodurilor și momentele de la capetele riglei în vectorul

$$\{N^c_{n,n'}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4EJ_n}{h} & \frac{2EJ_n}{h} & 0 & 0 \\ \frac{2EJ_n}{h} & \frac{4EJ_n}{h} & 0 & 0 \end{bmatrix} \{N^a_{n,n'}\} = [C_n]\{N^a_{n,n'}\}. \tag{43}$$

Efectuînd calculele de recurență cu expresia (42) pornind de la 0 pînă la n se obține vectorul

$$\{N^a_{n,n'}\} = [D_{n,0}]\{N_0\}, \tag{44}$$

în care, în mod similar ca în expresia (30), matricea $[D_{n,0}]$ este un produs de matrice. Pentru continuitatea și echilibrul nodurilor n, n', existînd condiția $\{N^a_{n,n'}\} = \{N^c_{n,n}\}$, se egalează (44) cu (43), din care rezultă ecuația echilibrului critic

$$\det([D_{n,0}] - [C_n]) = 0. \tag{45}$$

Rădăcinile acesteia, calculate prin corectări succesive, conduc la valorile parametrului critic și deci a sarcinilor critice de flambaj.

5. CONCLUZII

a) Studiul stabilității sistemelor elastice și calculul în teoria de ordinul II necesită cunoașterea unor funcții speciale privind influența forțelor axiale ceea ce conduce atît la mărirea gradului de complexitate în cazul problemelor concrete, cît și la dificultăți importante în alcătuirea programelor și folosirea calculatoarelor cifrice.

b) Procedeele dezvoltate în această lucrare, pe baza relațiilor de recurență dintre vectorii eforturilor și deplasărilor de la capetele unui segment de bară, prezintă avantajul unor operații ciclice [1], care pot fi programate cu ușurință la un ordinator, în plus timpul de lucru al acestuia va fi foarte redus.

c) În general la calculul în teoria de ordinul II după metodele generale intervin și alte funcții speciale decît cele utilizate la studiul sarcinilor critice, care se face numai în prezența forțelor axiale. În consecință, calculul de ordinul II reprezintă o problemă mai dificilă și mai complexă decît cea a determinării sarcinilor critice. Algoritmele prezentate în această lucrare utilizează integral, la calculul în teoria de ordinul II, elementele caracteristice care intervin în faza determinării sarcinilor critice. În acest fel calculul de ordinul II devine mai simplu decît în cazul

metodelor generale și în același timp dă o imagine mai clară privind deformarea în apropierea sarcinilor critice.

d) Formulele de recurență stabilite pentru cadrele etajate cu o deschidere, simetrice și nesimetrice, pot avea o largă utilizare în proiectare atît prin faptul că se întîlnesc frecvent în practică, cît și prin faptul că structurile blocurilor obișnuite, chiar cînd au mai multe deschideri pot fi reduse [4] uneori exact și de cele mai multe ori în mod aproximativ — apropiat însă de realitate — la cadre cu o singură deschidere.

Primită la redacție la 26 septembrie 1973.

BIBLIOGRAFIE

1. PING-CHUN-WANG, *Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor cu aplicații la calculatoare*, Traducere din limba engleză. București, Edit. tehnică, 1970.
2. M. ALBIGES, W. A. JALIL, *Etude de quelques problèmes de structure en vue de leur traitement par le calcul automatique*, Analles de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics nr. 279, Mars 1971 série „Théorics et Métodes de calcul" nr. 135.
3. N. POSEA, *Stabilitatea la forțe axiale a turlelor de foraj de tip „A"*, Buletinul Institutului de Petrol, Gaze și Geologie, **XVI** (1967).
4. A. SCARLAT, *Stabilitatea structurilor*, București, Edit. tehnică, 1969.

STUDII

CALCULUL DISTANȚEI OPTIME PENTRU STABILIZATORII MULTIPLI CU JOC REDUS FOLOSIȚI ÎN FORAJUL SONDELOR

de I. SILION
Institutul de cercetare și proiectare tehnologică pentru industria extractivă de țiței și gaze Cîmpina

În lucrarea prezentă s-a stabilit o metodă de calcul ce permite determinarea directă a distanței h de la sapă la stabilizatorul superior, prin rezolvarea unei ecuații de gradul 5.
Într-o variantă simplificată această distanță se calculează cu o aproximație suficientă prin rezolvarea unei ecuații de gradul 2. Această soluție poate fi utilizată și pentru determinarea factorului de corecție ξ, necesar unei soluții cît mai exacte a ecuației de gradul 5. În plus, lucrarea permite determinarea aproximativă a acestei distanțe, prin folosirea tabelelor.

I. INTRODUCERE

Studiile teoretice inițiate din 1950 de A. Lubinski și H. B. Woods au pus în evidență efectul de pendul și forța de îndreptare a găurii [1]—[5]. Inițial s-a studiat flambajul garniturii de foraj într-o gaură verticală ce s-a preconizat de F. A. Willers din 1941 [6].

În acest scop s-au întocmit diagrame pentru rezolvarea unghiului de echilibru al găurii care ulterior au fost înlocuite prin tabele pentru determinarea distanței de la sapă la stabilizator [7]. Datorită deplasării laterale a sapei nestabilizată în formații neînclinate, se produc găuri spirale ce împiedică tubarea coloanelor [8]. În esență conceptul Lubinski-Woods are la bază efectul plasării unui stabilizator la o distanță calculată, utilizînd greutatea prăjinilor de jos ca un pendul [9].

Prin această tehnică nu se asigură în condiții normale, valori suficiente pentru apăsările axiale și vitezele mecanice, experiența de foraj indicînd posibilitatea unor valori cu mult mai mari [10].

Deoarece prin aplicarea strictă a tehnicii pendulului în zonele caracterizate prin tendință mare de deviere, nu se poate asigura un control riguros și prevenirea îngenuncherilor, comitetul pentru forajul găurilor drepte din fostul AADC*) a preconizat folosirea asamblajelor din prăjini

*) Denumit recent IADC, asociația internațională a contractanților de foraj.

grele şi stabilizatori multipli cu joc redus (packed hole) care sînt cu mult mai eficiente [10], [11].

Pentru stabilirea unei noi tehnologii, R. S. Hoch a propus o relaţie simplificată ce permite determinarea forţei de împingere laterale maxime şi deci a distanţei de la sapă la stabilizatorul superior, prin încercări [12], [13].

Relaţia lui Hoch reprezintă o simplificare a formulei iniţiale stabilite de Lubinski-Woods, prin neglijarea componentei verticale a greutăţii prăjinii grele de sub punctul de tangenţă [14].

Datorită dificultăţii de aplicare, unii operatori utilizează formula lui Euler, pentru calculul distanţei maxime critice de la sapă la stabilizatorul superior [15].

În lucrarea prezentă aceste încercări sînt eliminate prin stabilirea unor formule de calcul ce permit determinarea directă a acestei distanţe.

2. PRINCIPIUL METODEI SIMPLIFICATE

Tehnica pendulului stabilită de Lubinski-Woods poate fi concretizată prin figura 1 propusă de Peter A. Szego [3], [5].

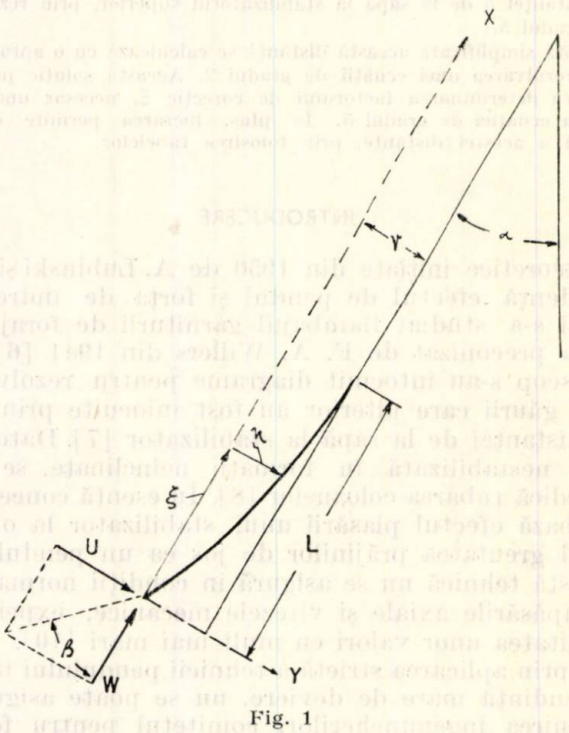


Fig. 1

În această figură se consideră o gaură dreaptă, înclinată, în care : L este distanţa de la sapă la punctul de tangenţă ; U şi W — forţele în direcţia axelor de coordonate ce acţionează asupra sapei ; α — unghiul de deviere ; p — greutatea exprimată prin componenta $p \cos \alpha$ în direcţia X, şi componenta $p \sin \alpha$ în direcţia Y ; ξ şi η — coordonatele unui punct

din porțiunea elastică a prăjinii grele; E — modulul de elasticitate, iar I — momentul de inerție al secțiunii.

A. Szego a propus pentru momentul de încovoiere următoarea relație generalizată:

$$EI\frac{d^2Y}{d^2X} = UX - WY + \int_0^X (Y-\eta)\,p\cos\alpha + (X-\xi)\,p\sin\alpha\,d\xi. \qquad (1)$$

În tehnica asamblajelor de fund cu joc redus (packed hole) este nevoie de trei puncte de sprijin pentru stabilirea unei curburi fixe și deci de cel puțin doi stabilizatori în apropierea sapei.

Hoch a propus și folosirea unui al treilea stabilizator plasat lîngă sapă, pentru a se limita deplasarea laterală. Acțiunea stabilizatorilor de primul tip este redată în figura 2. Într-o gaură perfect dreaptă și înclinată, sapa și cei doi stabilizatori se sprijină pe porțiunea inferioară (fig. 2*a*). Cînd se întîlnesc strate înclinate (fig. 2*b*) formația transmite o forță laterală F_b. Această forță împinge sapa în direcția de sus a înclinării,

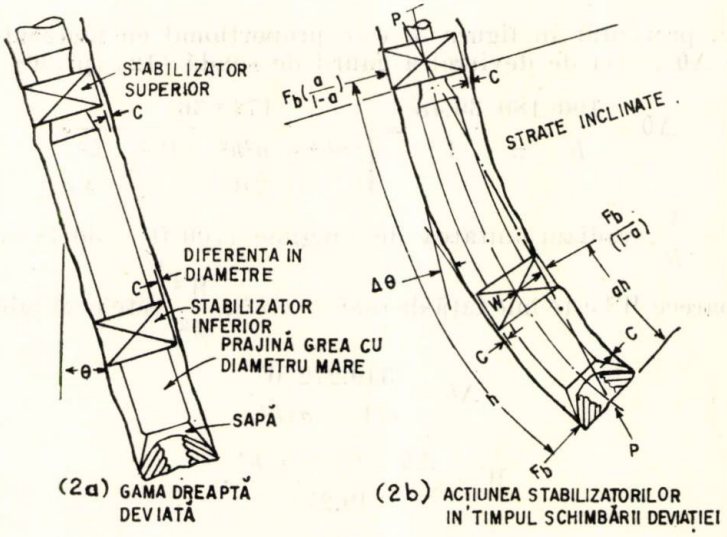


Fig. 2

în timp ce stabilizatorul inferior este îndreptat către partea inferioară a găurii. Hoch a prezentat pe baza unei formule din teoria elasticității [16] expresia:

$$F_b = \frac{\left[\dfrac{\Delta\theta\,a(1-a)\,h^2}{349\,272} - C - \dfrac{ma(1-a)(1-a)\,h^4\sin\theta}{24\,EI}\right](1-a)\,P}{\sqrt{\dfrac{EI}{P}}\sin\dfrac{ah}{\sqrt{\dfrac{EI}{P}}}\sin\dfrac{(1-a)\,ah}{\sqrt{\dfrac{EI}{P}}}} + \frac{mh\sin\theta}{2} \cdot$$
$$\frac{}{\sin\dfrac{h}{\sqrt{\dfrac{EI}{P}}}} - (1-a)\,ah \qquad (2)$$

Prin creşterea forţei laterale a formaţiei F_b, se măresc şi forţele transmise stabilizatorului superior şi inferior.

Datorită creşterii forţelor de la stabilizatori şi sapă se majorează deplasarea laterală şi jocul prăjinii grele W, de la stabilizatorul inferior.

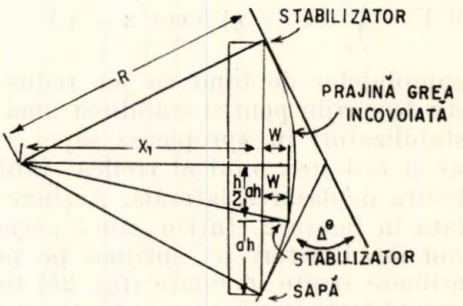


Fig. 3

Acest joc, prezentat în figura 3, este proporţional cu factorul de îngenunchere $\Delta\theta$ (raţia de deviere) a găurii de sondă [12] (p. 96)

$$\Delta\theta = \frac{100}{R}\,\frac{180}{\pi}\,\frac{30{,}48}{1} = \frac{174.636}{\sqrt{\dfrac{ah^2 - a^2h^2 - W^2}{2W} + \dfrac{h^2}{4}}}.$$

Curbura $= \dfrac{1}{R}$, radiani/unitatea de lungime (100 ft = 30,48 m).

Deoarece W^2 este mic faţă de $(ah^2 - a^2h^2)$, $\dfrac{W^2}{h^2}$ este neglijabil, deci

$$\Delta\theta = \frac{349.272\ W}{a(1-a)h^2},$$

$$W = \frac{\Delta\theta\, a(1-a)^2 h^2}{349.272}. \tag{3}$$

Relaţia (3) este valabilă pentru $C = 0$.

Pentru $C \neq 0$, rezultă

$$W = \frac{\Delta\theta\, a(1-a)h^2}{349.272} - C. \tag{4}$$

Distanţa maximă critică, de la sapă la stabilizator, se determină prin folosirea formulei de flambaj a lui Euler, pentru grindă articulată la ambele capete:

$$h_c = \pi\sqrt{\frac{EI}{P}} = 3{,}14\ 1593\ \sqrt{2{,}11\times10^6}\sqrt{\frac{I}{P}} = 4563\sqrt{\frac{I}{P}}. \tag{5}$$

Cînd distanţa h de la sapă la stabilizatorul superior depăşeşte valoarea lui h_c, asamblajul de fund va flamba, nefiind posibil de a se transmite o forţă F_b de îndreptare a găurii.

3. REPREZENTAREA FUNCȚIEI F_b

3.1. FUNCȚIA GENERALĂ

Se consideră o nouă formă de reprezentare a funcției F_b, care se mai poate scrie :

$$F_b = \frac{-\frac{P\sin\theta\, ma(1-a)^2(1+a)h^4}{24\,EI} + \frac{P\Delta\theta\, a(1-a)^2h^2}{349.272} - P(1-a)C}{\sqrt{\frac{EI}{P}}\sin\frac{ah}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}\sin\frac{(1-a)h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}} + \frac{}{\sin\frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}} - (1-a)ah + \frac{mh\sin\theta}{2} \tag{2a}$$

și în continuare

$$F_b = \tilde{f}_b + F_4(h) \tag{6}$$

în care

$$\tilde{f}_b = \frac{F_1(h)}{F_2(h) - F_3(h)}, \tag{7}$$

$$F_1(h) = -\frac{P\sin\theta\, ma(1-a)^2(1+a)h^4}{24\,EI} + \frac{P\Delta\theta\, a(1-a)^2}{349.272}h^2 - P(1-a)C = \alpha h^4 + \beta h^2 + \gamma, \tag{8}$$

$$\alpha = -\frac{P\sin\theta\, ma(1-a)^2(1+a)}{24\,EI}, \tag{9}$$

$$\beta = \frac{P\Delta\theta\, a(1-a)^2}{349.272}, \tag{10}$$

$$\gamma = -P(1-a)\,C, \tag{11}$$

$$F_2(h) = \frac{\sqrt{\frac{EI}{P}}\sin\frac{ah}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}\sin\frac{(1-a)h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}}{\sin\frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}}, \tag{12}$$

$$F_3(h) = (1-a)\,ah, \tag{13}$$

$$F_4(h) = \frac{m\sin\theta}{2}h = \zeta h, \tag{14}$$

$$\zeta = \frac{m\sin\theta}{2}. \tag{15}$$

3.2. FUNCȚIA BIPĂTRATĂ $F_1(h)$

3.2.1. Maximul funcției $F_1(h)$

Maximul funcției $F_1(h)$ se obține prin anularea derivatei

$$F_1'(h) = 4\alpha h^3 + 2\beta h = 0 \quad \text{sau}$$

$$2\alpha h^2 + \beta = 0,$$

$$h_M = \sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{P\Delta\theta\, a(1-a)^2 \times 12\, EI}{349.272 \times P \sin\theta\, ma(1-a)^2(1+a)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Delta\theta\, EI}{29106 \times P \sin\theta\, m(1+a)}}. \tag{16}$$

3.2.2. Calculul rădăcinilor ecuației $F_1(h) = 0$

Rădăcinile ecuației bipatrate sînt exprimate prin relația

$$h_{1,2,3,4} = +\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}. \tag{17}$$

Înlocuind coeficienții α, β și γ prin expresiile lor din (9), (10) și (11) rezultă

$$h_{1,2,3,4} =$$

$$= \sqrt{-\frac{P\Delta\theta a(1-a)^2}{349.272} \pm \sqrt{\left(\frac{P\Delta\theta a(1-a)^2}{349.272}\right)^2 - \frac{P^2 \sin\theta ma(1-a)^3(1+a)C}{6EI}} - \frac{P\Delta\theta \sin\theta ma(1-a)^2(1+a)}{12\, EI}}. \tag{18}$$

3.2.3. Reprezentarea funcției $F_1(h)$ printr-o funcție de gradul 1

Considerînd valoarea medie $h = 1000$ cm $= 10^3$ și înlocuind în (8)

$$F_1(h) = \alpha h^4 + \beta h^2 + \gamma,$$

pe h^4 din termenul negativ, prin 10^{12}, acesta se poate reprezenta aproximativ printr-o funcție de gradul 1 :

$$F_1(h) = -\frac{P \sin\theta\, ma(1-a)^2(1+a)}{24 \times 2{,}11 \times 10^6\, I} \times 10^{12} + \frac{P\Delta\theta\, a(1-a)^2 10^3}{349.272} h -$$

$$- P(1-a)C = \frac{P\Delta\theta\, a(1-a)^2 h}{349.272} - \frac{P \sin\theta\, ma(1-a)^2(1+a)10^6}{50{,}64\, I} -$$

$$- P(1-a)C = \delta h + \varepsilon. \tag{19}$$

O determinare mai corectă a coeficienților δ și ε se poate obține calculînd derivata funcției $F_1(h)$ pentru $h = h_1$, ce reprezintă valoarea rădăcinii pozitive din ramura ascendentă a funcției bipătrate

$$\delta = F_1'(h) = 4\alpha h_1^3 + 2\beta h_1. \tag{20}$$

Anulînd derivata funcției $F_1(h)$ se obține

$$\varepsilon = -\delta h_1. \tag{21}$$

Funcția $F_1(h)$, exprimată prin relația (19) reprezintă ecuația tangentei la funcția bipătrată $F_1(h)$, dusă prin punctul de coordonate $h = h_1$ și $F_1(h) = 0$.

3.3. REPREZENTAREA FUNCȚIEI TRIGONOMETRICE $F_2(h)$ PRINTR-O FUNCȚIE DE GRADUL 2

3.3.1. Stabilirea relațiilor de calcul

Se consideră relațiile :

$$K = \sqrt{\frac{EI}{P}}, \tag{22}$$

$$\frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} = \frac{h}{k} = x. \tag{23}$$

Efectuînd înlocuirile în funcția $F_2(h)$ din (12) se obține

$$F_2(h) = \frac{k \sin ax \sin(1-a)x}{\sin x} = k\varphi(x), \tag{24}$$

în care

$$\varphi(x) = \frac{\sin ax \sin(1-a)x}{\sin x}. \tag{25}$$

Deoarece

$$\sin ax \sin(1-a)x = \frac{1}{2}[\cos(2a-1)x - \cos x], \tag{26}$$

înlocuind în (25)

$$\varphi(x) = \frac{\cos(2a-1)x - \cos x}{2 \sin x}, \tag{27}$$

Dezvoltînd în serie funcțiile de la numărător, se obține :

$$\cos(2a-1)x = 1 - \frac{(2a-1)^2}{2!}x^2 + \frac{(2a-1)^4}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^n \frac{(2a-1)^{2n}}{2n!}x^{2n} + \ldots \tag{28}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots \tag{29}$$

Efectuînd înlocuirile în (26) rezultă următoarea expresie pentru $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{2 \times \sin x \times 2n!} [1 - (2a - 1)^{2^n}] (-1)^{n+1}. \tag{30}$$

Se consideră $\psi(x) \simeq \varphi(x)$, într-un interval convenabil ales, cuprins între x_1 și x_2, exprimată printr-o funcție de gradul 2 :

$$\psi(x) = \rho x^2 + \sigma x + \tau. \tag{31}$$

Pentru determinarea coeficienților ρ, σ și τ se rezolvă sistemul de trei ecuații :

$$\begin{aligned} x_1^2\rho + x_1\sigma + \tau - \varphi(x_1) &= 0, \\ x^2\rho + x\sigma + \tau - \varphi(x) &= 0, \\ x_2^2\rho + x_2\sigma + \tau - \varphi(x_2) &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Se consideră determinantul sistemului :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x^2 & x & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1^2(x - x_2) - x^2(x_1 - x_2) + x_2^2(x_1 - x). \tag{33}$$

Se obține ρ, σ și τ :

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} \varphi(x_1) & x_1 & 1 \\ \varphi(x) & x & 1 \\ \varphi(x_2) & x_2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\varphi(x_1)(x - x_2) - \varphi(x)(x_1 - x_2) + \varphi(x_2)(x_1 - x)}{x_1^2(x - x_2) - x^2(x_1 - x_2) + x_2^2(x_1 - x),}, \tag{34}$$

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & \varphi(x_1) & 1 \\ x^2 & \varphi(x) & 1 \\ x_2^2 & \varphi(x_2) & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\varphi(x_1)(x_2^2 - x^2) - \varphi(x)(x_2^2 - x_1^2) + \varphi(x_2)(x^2 - x_1^2)}{x_1^2(x - x_2) - x^2(x_1 - x_2) + x_2^2(x_1 - x),}, \tag{35}$$

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & \varphi(x_1) \\ x^2 & x & \varphi(x) \\ x_2^2 & x_2 & \varphi(x_2) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\varphi(x_1)(x^2 x_2 - x x_2^2) - \varphi(x)(x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2) + \varphi(x_2)(x_1^2 x - x_1 x^2)}{x_1^2(x - x_2) - x^2(x_1 - x_2) + x_2^2(x_1 - x)}. \tag{36}$$

S-a considerat pentru x_1 și x_2 intervalul:

$$x_1 = \frac{\pi}{5} = 0{,}6283 - 36°,$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{8} = 1{,}9635 - 112°30'. \tag{37}$$

Efectuînd înlocuirile și calculele respective, se obține:

$$\rho = \frac{\varphi(x_1)(x - 1{,}9635) + \varphi(x) \times 1{,}3352 + \varphi(x_2)(0{,}6283 - x)}{1{,}3352\, x^2 - 3{,}46055\, x^2 + 1{,}64723}, \tag{38}$$

$$\sigma = \frac{\varphi(x_1)(3{,}85533 - x^2) - \varphi(x) \times 3{,}46055 + \varphi(x_2)(x^2 - 0{,}39478)}{1{,}3352\, x^2 - 2{,}46055\, x^2 + 1{,}64723}, \tag{39}$$

$$\tau = \frac{\varphi(x_1)(x^2 \times 1{,}9635 - x \times 3{,}85533) + \varphi(x) 1{,}64723 + \varphi(x_2)(0{,}39478x - 0{,}6283x^2),}{1{,}3352\, x^2 - 3{,}46055\, x^2 + 1{,}64723} \tag{40}$$

S-au efectuat încercări în intervalul x_1, x_2 luînd arbitrar $a = 0, 2$, obținînd $\psi(x) \simeq \varphi(x)$ pentru $x = \frac{11}{30} = 1{,}15192$ (66°). Înlocuind

$$x = \frac{11}{10}\pi = 1{,}15192 \text{ și } x^2 = 1{,}326909, \tag{41}$$

rezultă

$$\rho = \frac{\varphi(x_1)(1{,}15192 - 1{,}9635) - \varphi(x) \times 1{,}3352 + \varphi(x_2)(0{,}6283 - 1{,}15192)}{1{,}3352 \times 1{,}326909 - 3{,}46055 \times 1{,}15192 + 1{,}64723} =$$

$$= \frac{-0{,}81158\, \varphi(x_1) + 1{,}3352\, \varphi(x) - 0{,}52362\, \varphi(x_2)}{-0{,}56734}, \tag{42}$$

$$\tau = \frac{\varphi(x_1)(3{,}85533 - 1{,}326909) - \varphi(x) \times 3{,}46055 + \varphi(x_2)(1{,}326909 - 0{,}39478)}{-0{,}56734} =$$

$$= \frac{2{,}528421\, \varphi(x_1) - 3{,}46055\, \varphi(x) + 0{,}932129\, \varphi(x_2)}{-0{,}56734}, \tag{43}$$

$$= \frac{\varphi(x_1)(2{,}60537 - 4{,}441) + \varphi(x) \times 1{,}64723 + \varphi(x_2)(0{,}45476 - 0{,}83372)}{-0{,}56734} =$$

$$= \frac{-1{,}83563\, \varphi(x_1) + 1{,}64723\, \varphi(x) - 0{,}37896\, \varphi(x_2)}{-0{,}56734}, \tag{44}$$

Efectuînd calculele pentru primii cinci termeni, consideraţi suficienţi, se obţine, respectiv,

$$\varphi(x_1)=\sum_{n=1}^{5}\frac{x_1^{2n}}{2\times\sin x_1\times 2n!}[1-(2a-1)^{2n}](-1)^{n+1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{5}\frac{0{,}6283^{2n}}{2\times 0{,}5878\times 2n!}[1-(2a-1)^{2n}](-1)^{n+1}=$$

$$=\frac{0{,}6283^2}{2!\times 2\times 0{,}5878}[1-(2a-1)^2]+$$

$$+\frac{0{,}6283^4}{4!\times 2\times 0{,}5878}[1-(2a-1)^4]+$$

$$+\frac{0{,}6283^6}{6!\times 2\times 0{,}5873}[1-(2a-1)^6]+$$

$$+\frac{0{,}6283^8}{8!\times 2\times 0{,}5878}[1-(2a-1)^8]+$$

$$+\frac{0{,}6283^{10}}{10!\times 2\times 0{,}5878}[1-(2a-1)^{10}]=$$

$$=0{,}1679[1-(2a-1)^2]-0{,}005524[1-(2a-1)^4]+$$

$$+0{,}0000727\,[1-(2a-1)^6]-0{,}0000005125[1-$$

$$-(2a-1)^8]+0{,}000000002248[1-(2a-1)^{10}], \quad (45)$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{5}\frac{x^{2n}}{2\times\sin x\times 2n!}[1-(2a-1)^{2n}](-1)^{n+1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{5}\frac{0{,}15192^{2n}}{2\times 0{,}91354\times 2n!}[1-(2a-1)^{2n}](-1)^{n+1}=$$

$$=\frac{1{,}15192^2}{2!\times 2\times 0{,}91354}[1-(2a-1)^2]+$$

$$+\frac{1{,}15192^4}{4!\times 2\times 0{,}91354}[1-(2a-1)^4]+$$

$$+\frac{1{,}15192^6}{6!\times 2\times 0{,}91354}[1-(2a-1)^6]+$$

$$+\frac{1{,}15192^8}{8!\times 2\times 0{,}91354}[1-(2a-1)^8]+$$

$$+\frac{1{,}15192^{10}}{10!\times 2\times 0{,}91354}[1-(2a-1)^{10}]=$$

$$=0{,}363116[1-(2a-1)^2]+0{,}040152[1-(2a-1)^4]+$$

$$+0{,}00177595[1-(2a-1)^6]+0{,}00004208[1-$$

$$-(2a-1)^8]+0{,}000000620414[1-(2a-1)^{10}], \quad (46)$$

$$\varphi(x_2)=\sum_{n=1}^{5}\frac{x_2^{2n}}{2\sin x_2\times 2n!}[1-(2a-1)^{2n}](-1)^{n+1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{5}\frac{1{,}9635^{2n}}{2\times 0{,}9239\times 2n!}[1-(2a-1)^{2n}](-1)^{n+1}=$$

$$=\frac{1{,}9635^2}{2!\times 2\times 0{,}9239}[1-(2a-1)^2]+$$

$$+\frac{1{,}9635^4}{4!\times 2\times 0{,}9239}[1-(2a-1)^4]+$$

$$+\frac{1{,}9635^6}{6!\times 2\times 0{,}9239}[1-(2a-1)^6]+$$

$$+\frac{1{,}9635^8}{8!\times 2\times 0{,}9239}[1-(2a-1)^8]+$$

$$+\frac{1{,}9635^{10}}{10!\times 2\times 0{,}9239}[1-(2a-1)^{10}]=$$

$$=1{,}04323[1-(2a-1)^2]-0{,}335169[1-(2a-1)^4]+$$

$$+0{,}0430727[1-(2a-1)^6]$$

$$-0{,}00296533[1-(2a-1)^8]+0{,}000127025[1-(2a-1)^{10}]. \quad (47)$$

Înlocuind aceste expresii la numărător, inclusiv $x = 0{,}15192$ la numitor, în relațiile (42), (43) și (44) și efectuînd calculele, se obțin pentru coeficienții ρ, σ și τ următoarele relații generale :

$$\rho =$$

$$= \frac{-0{,}197689[1-(2a-1)^2]+0{,}126372[1-(2a-1)^4]-0{,}020413271[1-(2a-1)^6]}{-0{,}56734} +$$

$$+ \frac{0{,}0014963971[1-(2a-1)^8]-0{,}000066251344[1-(2a-1)^{10}]}{-0{,}56734} =$$

$$= 0{,}348458[1-(2a-1)^2]-0{,}005524[1-(2a-1)^4]+0{,}0000727[1-(2a-1)^6]-$$

$$-0{,}0000005125[1-(2a-1)^8]+0{,}0000000002248[1-(2a-1)^{10}], \qquad (48)$$

$$\sigma =$$

$$= \frac{0{,}14039[1-(2a-1)^2]-0{,}1874309[1-(2a-1)^4]+0{,}03418695[1-(2a-1)^6]}{-0{,}56734} +$$

$$+ \frac{-0{,}00261973273[1-(2a-1)^8]+0{,}000117726067[1-(2a-1)^{10}]}{-0{,}56734} =$$

$$= 0{,}247455[1-(2a-1)^2]+0{,}330384[1-(2a-1)^4]-0{,}0602585[1-(2a-1)^6]+$$

$$+ 0{,}00461766[1-(2a-1)^8]-0{,}000207509[1-(2a-1)^{10}], \qquad (49)$$

$$\tau =$$

$$= \frac{-0{,}10542[1-(2a-1)^2]+0{,}07014[1-(2a-1)^4]-0{,}013530587[1-(2a-1)^6]}{-0{,}56734} +$$

$$+ \frac{0{,}0010553357[1-(2a-1)^8]-0{,}000047813431[1-(2a-1)^{10}]}{-0{,}56734} =$$

$$= 0{,}185813[1-(2a-1)^2]-0{,}125176[1-(2a-1)^4]+0{,}0238494[1-(2a-1)^6]-$$

$$- 0{,}00186016[1-(2a-1)^8]+0{,}000084278[1-(2a-1)^{10}]. \qquad (50)$$

3.3.2. Tabele pentru valorile funcțiilor $\varphi(x)$ și $\psi(x)$; reprezentare grafică

În tabela 1 sînt prezentate valorile termenilor

$$1-(2a-1)^2,\quad 1-(2a-1)^4,\quad 1-(2a-1)^6,\quad 1-(2a-1)^8,\quad 1-(2a-1)^{10}$$

din relațiile (48), (49), și (50) pentru $a = 0{,}1$, $a = 0{,}2$, $a = 0{,}3$ și $a = 0{,}4$, iar în tabela 2, valorile coeficienților ρ, σ și τ. Pentru valori intermediare ale raportului a, coeficienții ρ, σ și τ urmează a fi recalculați.

Funcțiile $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ au fost calculate din 5 în 5°, pentru aceleași valori ale raportului a, rezultatele fiind trecute în tabela 3. Existînd unele diferențe între cele două funcții, s-a determinat factorul de corecție ξ, definit prin relația

$$\xi = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}. \tag{51}$$

Factorul de corecție s-a mai calculat și în afara intervalului ales pentru x_1, x_2 definit (în 37), permițînd să se stabilească limitele de utilizare și valoarea optimă a distanței h.

Tabela 1

a	$1-(2a-1)^2$	$1-(2a-1)^4$	$1-(2a-1)^6$	$1-(2a-1)^8$	$1-(2a-1)^{10}$
0,1	0,36	0,5904	0,7379	0,8322	0,8926
0,2	0,64	0,8704	0,95334	0,9832	0,993954
0,3	0,84	0,974	0,99390	0,9993446	0,9998951
0,4	0,96	0,9984	0,99936	0,9999774	1,00000

Pe baza acelorași date s-a întocmit și graficul din figura 4.

Tabela 2

a	ρ	σ	τ
0,1	0,01814	0,06517	0,009117
0,2	0,06067	0,07601	0,03097
0,3	0,1087	0,05846	0,056097
0,4	0,14534	0,03645	0,07583

Tabela 3

Nr.	Arcul x		Raportul a	Funcţia $\varphi(x) = \frac{\sin ax \sin(1-a)x}{\sin x}$				Funcţia $\psi(x) = \rho x^2 + \sigma x + \tau$				Factor de corecţie $\xi = \frac{\rho(x)}{\psi(x)}$
	Radiani	Grade sexag		$\sin x$	$\sin ax$	$\sin(1-a)x$	$\varphi(x)$	ρx^2	σx	τ	$\psi(x)$	
1	$\frac{\pi}{12} = 0{,}2618$	15°	0,1	0,25882	0,026177	0,233447	0,0236127	0,00124331	0,0170616	0,009117	0,02742191	0,8607
			0,2		0,05234	0,2079	0,04204	0,00415827	0,0199181	0,03097	0,05504637	0,7636
			0,3		0,07846	0,1822	0,05524	0,0074502	0,0149516	0,056097	0,0784988	0,7037
			0,4		0,10452	0,1564	0,06318	0,0099616	0,009527	0,07583	0,09543	0,6627
2	$\frac{\pi}{9} = 0{,}349066$	20°	0,1	0,342016	0,0348992	0,309014	0,0315321	0,0022103	0,0228879	0,009117	0,0332152	0,9483
			0,2		0,0697557	0,275637	0,0562175	0,0073925	0,026557	0,03097	0,0649195	0,8659
			0,3		0,104526	0,241922	0,0738683	0,0132442	0,0204066	0,056097	0,0897478	0,8231
			0,4		0,139174	0,207914	0,084604	0,01771	0,0127235	0,07583	0,106235	0,7962
3	$\frac{5}{36}\pi = 0{,}436333$	25°	0,1	0,42268	0,043619	0,382683	0,0394972	0,00345366	0,028434	0,009117	0,04100066	0,96335
			0,2		0,087156	0,342016	0,0705343	0,0115489	0,0331892	0,03097	0,075081	0,9317
			0,3		0,130527	0,300706	0,0928725	0,0206952	0,0255	0,056097	0,1022922	0,9079
			0,4		0,173648	0,258823	0,106396	0,027669	0,0158992	0,07583	0,1193982	0,8907
4	$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$	30°	0,1	0,5000	0,05234	0,4540	0,04752	0,00497322	0,034123	0,009117	0,04821322	0,9850
			0,2		0,10453	0,4067	0,08503	0,01663	0,0398363	0,03097	0,0874363	0,9725
			0,3		0,1564	0,3584	0,1121	0,0298005	0,03061	0,056097	0,1165075	0,96234
			0,4		0,2079	0,30901	0,12849	0,0398463	0,0190852	0,07583	0,1347615	0,9535
5	$\frac{7}{36}\pi = 0{,}610871$	35°	0,1	0,573575	0,0610487	0,5225	0,0556137	0,00676928	0,03981	0,009117	0,05569628	0,9985
			0,2		0,121868	0,46947	0,09975	0,0226355	0,046476	0,03097	0,1000815	0,9967
			0,3		0,182234	0,4147	0,131754	0,0405627	0,0357115	0,0656097	0,1323612	0,9954
			0,4		0,241922	0,358366	0,151155	0,0542362	0,0222657	0,07583	0,1523319	0,9923

6	$\frac{2}{9}\pi =$ 0,698133	40°	0,1	0,642785	0,0697557	0,587785	0,063781	0,0088414	0,0454977	0,009117	0,0634561	1,0052
			0,2		0,139174	0,529922	0,114736	0,0295646	0,053114	0,03097	0,1136486	1,00958
			0,3		0,207914	0,46947	0,151851	0,05298	0,040813	0,056097	0,14989	1,0131
			0,4		0,275637	0,406744	0,174412	0,0708383	0,025447	0,07583	0,1721153	1,01334
7	$\frac{\pi}{4} =$ 0,7854	45°	0,1	0,7071	0,07846	0,6494	0,07205	0,0111897	0,0511844	0,009117	0,0714911	1,0077
			0,2		0,1564	0,5878	0,13003	0,0374172	0,0597543	0,03097	0,1281415	1,01476
			0,3		0,2335	0,5225	0,1725	0,0670516	0,0459144	0,056097	0,169093	1,02032
			0,4		0,30901	0,4540	0,1984	0,089654	0,028628	0,07583	0,194112	1,02207
8	$\frac{5}{18}\pi =$ 0,872675	50°	0,1	0,766033	0,087156	0,70113	0,080452	0,0138146	0,0567711	0,009117	0,0797027	1,00941
			0,2		0,173648	0,642785	0,14571	0,0461944	0,0663943	0,03097	0,1435587	1,01535
			0,3		0,2588234	0,560514	0,193795	0,08278	0,0510162	0,056097	0,1898932	1,02053
			0,4		0,342016	0,5000	0,22234	0,110687	0,0318092	0,07583	0,218326	1,0225
9	$\frac{11}{36}\pi =$ 0,959933	55°	0,1	0,81914	0,095845	0,649443	0,088974	0,016153	0,0625585	0,009117	0,0883855	1,00665
			0,2		0,190808	0,694657	0,161812	0,055895	0,0730333	0,03097	0,15989813	1,01193
			0,3		0,284013	0,622514	0,21584	0,100163	0,0561175	0,056097	0,2123775	1,0163
			0,4		0,374609	0,544637	0,249043	0,133928	0,03499	0,07583	0,244748	1,01772
10	$\frac{\pi}{3} =$ 1 ,0472	60°	0,1	0,86602	0,10452	0,80902	0,0976475	0,019893	0,0682466	0,009117	0,0972566	1,0042
			0,2		0,2079	0,7431	0,1784	0,06652	0,0796733	0,03097	0,1771633	1,00746
			0,3		0,30901	0,6691	0,2388	0,119227	0,0584627	0,056097	0,2337867	1,00937
			0,4		0,4067	0,5878	0,2761	0,159392	0,038173	0,07583	0,273395	1,00974
11	$\frac{13}{16}\pi =$ 1,13416	65°	0,1	0,90632	0,113202	0,85264	0,1065	0,0233415	0,0739333	0,009117	0,1063918	1,0028
			0,2		0,224952	0,788	0,195586	0,078068	0,086312	0,03097	0,19535	1,00134
			0,3		0,333807	0,7325	0,2627	0,139896	0,0663214	0,056097	0,2623144	1,0014
			0,4		0,43833	0,629314	0,304321	0,187056	0,04135	0,07583	0,304237	1,005
12	$\frac{7}{18}\pi =$ 1,22174	70°	0,1	0,9397	0,121868	0,891	0,115552	0,0270768	0,0796216	0,009117	0,1158154	0,9977
			0,2		0,241922	0,829033	0,213462	0,090542	0,092952	0,03097	0,214464	0,9952
			0,3		0,358366	0,754716	0,28782	0,162251	0,0714233	0,056097	0,2897713	0,99325
			0,4		0,46947	0,669128	0,334292	0,216945	0,044533	0,07583	0,337308	0,99106

Tabela 3 (continuare)

Nr.	Arcul x		Raportul a	Funcţia								Factorul de corecţie $\varepsilon_\rho = \frac{\rho(x)}{\psi(x)}$
				$\varphi(x) = \frac{\sin ax \sin(1-a)x}{\sin x}$				$\psi(x) = \rho x^2 + \sigma x + \tau$				
	Radiani	Grade sexag.		$\sin x$	$\sin ax$	$\sin(1-a)x$	$\varphi(x)$	ρx^2	σx	τ	$\psi(x)$	
13	$\frac{5}{12}\pi =$ 1,309	75°	0,1	0,9659	0,1305	0,9239	0,124848	0,0310128	0,08531	0,009117	0,125598	0,99474
			0,2		0,2588	0,8660	0,23205	0,103936	0,09959	0,03097	0,234496	0,9896
			0,3		0,3827	0,7934	0,31432	0,186256	0,076525	0,056097	0,318878	0,9857
			0,4		0,5000	0,7071	0,3660	0,249041	0,0477188	0,07583	0,3725898	0,9824
14	$\frac{4}{9}\pi =$ 1,39625	80°	0,1	0,9848	0,139174	0,95106	0,134406	0,0353653	0,090996	0,009117	0,1354783	0,9921
			0,2		0,275637	0,8988	0,25154	0,118258	0,106241	0,03097	0,255469	0,9847
			0,3		0,406736	0,829033	0,3424	0,21192	0,081626	0,05097	0,349643	0,9793
			0,4		0,529922	0,743133	0,39988	0,283345	0,0508944	0,07583	0,4100694	0,9752
15	$\frac{17}{36}\pi$ 1,48361	85°	0,1	0,99618	0,14781	0,972375	0,144273	0,0399245	0,0966825	0,009117	0,145724	0,990
			0,2		0,292373	0,9272	0,272125	0,13353	0,112871	0,03097	0,277371	0,9812
			0,3		0,43051	0,86162	0,372358	0,23379	0,086728	0,056097	0,376615	0,9887
			0,4		0,559187	0,77714	0,43627	0,31884	0,0540812	0,07583	0,4497952	0,9699
16	$\frac{\pi}{2} =$ 1,57079	90°	0,1	1,0000	0,1564	0,9877	0,154525	0,044759	0,102369	0,009117	0,156245	0,9889
			0,2		0,30901	0,9511	0,2939	0,14967	0,119508	0,03097	0,300148	0,9792
			0,3		0,4540	0,8910	0,404509	0,268206	0,09183	0,056097	0,416133	0,9721
			0,4		0,5878	0,8090	0,4755	0,358616	0,0572557	0,07583	0,4917017	0,9671
17	$\frac{19}{36}\pi =$ 1,65874	95°	0,1	0,99618	0,165047	0,99692	0,16513	0,04987	0,108056	0,009117	0,167043	0,99065
			0,2		0,325577	0,9703	0,3171	0,166757	0,126147	0,03097	0,323874	0,9791
			0,3		0,477155	0,91706	0,43926	0,298833	0,09693	0,056097	0,45186	0,9721
			0,4		0,615657	0,838666	0,518312	0,399563	0,60446	0,07583	0,535839	0,9673

18	$\frac{10}{18}\pi$ 1,74533	100°	0,1	0,9848	0,173648	1,00000	0,176328	0,0552587	0,113744	0,009117	0,1781197	0,98994
			0,2		0,342016	0,9848	0,342016	0,184778	0,132787	0,03097	0,348535	0,9813
			0,3		0,5000	0,9397	0,4771	0,331123	0,102032	0,056097	0,489252	0,97513
			0,4		0,642785	0,86602	0,565262	0,44274	0,0636257	0,07583	0,5821957	0,9709
19	$\frac{21}{36}\pi$ 1,832608	105°	0,1	0,96592	0,182233	0,99692	0,188082	0,060923	0,119432	0,009117	0,189472	0,99266
			0,2		0,358366	0,99452	0,368983	0,0203719	0,139429	0,03097	0,374118	0,9863
			0.3		0,5215	0,958825	0,518666	0,365066	0,107135	0,056097	0,528298	0,9819
			0,4		0,66913	0,891	0,617213	0,488122	0,0668066	0,07583	0,6307586	0,9786
20	$\frac{11}{18}\pi =$ 1,91987	110°	0,1	0,9397	0,190887	0,98768	0,200557	0,0668616	0,125117	0,009117	0,2010956	0,9973
			0,2		0,374609	0,9994	0,398409	0,223579	0,146066	0,03097	0,400615	0,9945
			0,3		0,544637	0,97436	0,56473	0,400655	0,112235	0,056097	0,568987	0,9925
			0,4		0,694657	0,91354	0,675316	0,535762	0,0699871	0,07583	0,6815791	0,9908
21	$\frac{23}{36}\pi =$ 2,00714	115°	0,1	0,90632	0,199322	0,972375	0,2139	0,07308	0,130806	0,009117	0,213003	1,00465
			0,2		0,390736	0,9994	0,43086	0,244372	0,152728	0,03097	0,42807	1,00651
			0,3		0,566412	0,98628	0,616385	0,43792	0,117337	0,056097	0,611354	1,0082
			0,4		0,719333	0,93358	0,740566	0,58553	0,07317	0,07583	0,73453	1,0087
22	$\frac{2}{3}\pi =$ 2,0944	120°	0,1	0,8660	0,2079	0,9511	0,2283	0,079572	0,136493	0,009117	0,223799	1,0202
			0,2		0,4067	0,9945	0,4671	0,266081	0,159344	0,03097	0,456395	1,02038
			0,3		0,5878	0,9945	0,6750	0,47681	0,22438	0,056097	0,655345	1,0300
			0,4		0,7432	0,9511	0,8161	0,637543	0,07635	0,07583	0,789723	1,0334
23	$\frac{25}{36}\pi =$ 2,18168	125°	0,1	0,81914	0,21644	0,9239	0,244116	0,086342	0,14218	0,009117	0,237639	1,02726
			0,2		0,42262	0,9848	0,508088	0,288713	0,165984	0,03097	0,485667	1,04616
			0,3		0,608771	0,99905	0,742466	0,517377	0,127517	0,056097	0,700991	1,059
			0,4		0,766033	0,96592	0,9033	0,691683	0,0795316	0,07583	0,8470446	1,0661
24	$\frac{13}{18}\pi =$ 2,26894	130°	0,1	0,766033	0,224952	0,891	0,26165	0,093386	0,147551	0,009117	0,250054	1,04638
			0,2		0,43837	0,97028	0,55525	0,312271	0,172624	0,03097	0,515865	1,07634
			0,3		0,629314	0,99984	0,8214	0,559585	0,132642	0,056097	0,748324	1,09764
			0,4		0,788	0,9784	1,00604	0,748283	0,082712	0,07583	0,906825	1,1182

Tabela 3 (continuare)

Nr.	Arcul x		Raportul a	Funcţia $\varphi(x) = \frac{\sin ax \sin (1-a)x}{\sin x}$				Funcţia $\psi(x) = \rho x^2 + \sigma x + \tau$				Factor de corecţie $\xi = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$
	Radiani	Grade sexag		$\sin x$	$\sin ax$	$\sin (1-a)x$	$\varphi(x)$	ρx^2	σx	τ	$\psi(x)$	
25	$\frac{3}{4}\pi = 2{,}35621$	135°	0,1	0,7071	0,2334	0,8526	0,2881	0,10077	0,153553	0,009117	0,26342	1,06861
			0,2		0,4540	0,9511	0,6106	0,336753	0,179262	0,03097	0,546985	1,11633
			0,3		0,6494	0,99692	0,9156	0,603457	0,137743	0,056097	0,797297	1,14813
			0,4		0,8090	0,9877	1,1130	0,80688	0,085894	0,07583	0,968604	1,6667
26	$\frac{7}{9}\pi = 2{,}4435$	140°	0,1	0,642785	0,241922	0,80902	0,304486	0,108307	0,159242	0,009117	0,276666	1,10055
			0,2		0,46947	0,9273	0,677185	0,362166	0,185943	0,03097	0,579079	1,16942
			0,3		0,66913	0,99026	1,03788	0,649014	0,142847	0,056097	0,847958	1,22411
			0,4		0,829033	0,99452	1,28264	0,86778	0,089076	0,07583	1,032686	1,24205
27	$\frac{29}{36}\pi = 2{,}53076$	145°	0,1	0,573575	0,250382	0,760416	0,331938	0,116181	0,16493	0,009117	0,290228	1,14378
			0,2		0,48481	0,89818	0,7597	0,3885	0,192543	0,03097	0,612013	1,24131
			0,3		0,68835	0,97992	1,176	0,6962	0,147948	0,056097	0,900245	1,30632
			0,4		0,84804	0,99862	1,47648	0,930875	0,0922575	0,07583	1,0989625	1,34459
28	$\frac{5}{6}\pi = 2{,}618$	150°	0,1	0,5000	0,2588	0,7071	0,3660	0,124331	0,170616	0,009117	0,2958587	1,2372
			0,2		0,5000	0,8660	0,8660	0,41575	0,199181	0,03097	0,645901	1,34078
			0,3		0,7071	0,9659	1,36603	0,74502	0,149565	0,056097	0,750682	1,4369
			0,4		0,8660	1,0000	1,732	0,99615	0,099935	0,07583	1,171915	1,47793

REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR $\varphi(x)$ și $\Psi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{\sin ax \sin (1-a)x}{\sin x} = \xi \varphi(x) = \xi (\rho x^2 + \sigma x + \tau)$$

ξ – factor de corecție calculat, indicat în tabelul 3

——— funcția reală $\varphi(x)$

– – – – – funcția aproximativă $\Psi(x)$

$$\rho = 0{,}348458\left[1-(2a-1)^2\right] - 0{,}227936\left[1-(2a-1)^4\right] + 0{,}0356783\left[1-(2a-1)^6\right] - 0{,}00263853\left[1-(2a-1)^8\right] + 0{,}000116778\left[1-(2a-1)^{10}\right]$$

$$\sigma = -0{,}247455\left[1-(2a-1)^2\right] + 0{,}330384\left[1-(2a-1)^4\right] - 0{,}0602585\left[1-(2a-1)^6\right] + 0{,}00461766\left[1-(2a-1)^8\right] - 0{,}000207509\left[1-(2a-1)^{10}\right]$$

$$\tau = 0{,}185813\left[1-(2a-1)^2\right] + 0{,}125176\left[1-(2a-1)^4\right] + 0{,}0238494\left[1-(2a-1)^6\right] - 0{,}00186016\left[1-(2a-1)^8\right] + 0{,}000084278\left[1-(2a-1)^{10}\right]$$

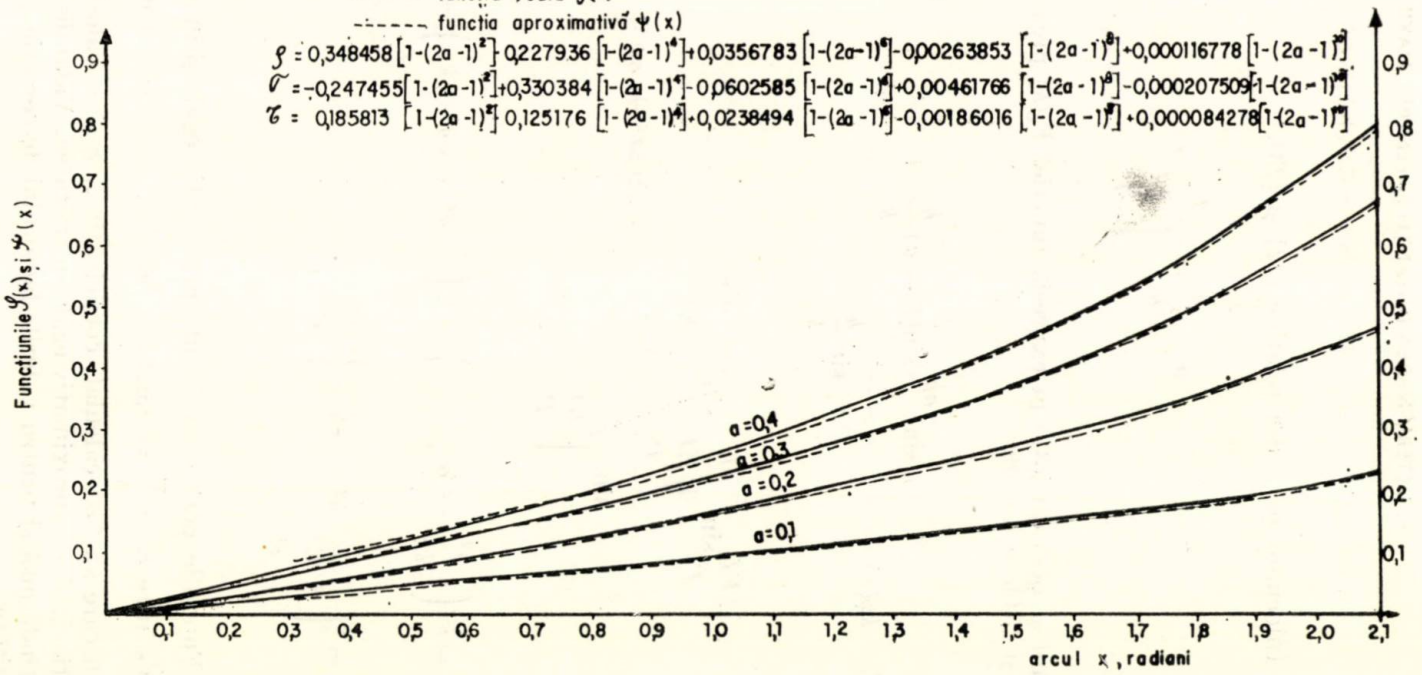


Fig. 4

4. DETERMINAREA DISTANȚEI F_b PENTRU MAXIM

4.1. ÎNLOCUIREA FUNCȚIEI $F_2(h)$ PRINTR-O FUNCȚIE DE GRADUL 2

Înlocuind pe x din relațiile (22) și (23),

$$x = \frac{h}{k} = \frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}},$$

precum și $\varphi(x)$ din (31) în expresia funcției $F_2(h)$ prezentată în relațiile (24) și (51), se obține

$$F_2(h) = k\varphi(x) = \frac{k \sin \frac{ah}{k} \sin(1-a)\frac{h}{k}}{\sin \frac{h}{k}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{EI}{P}} \sin \frac{ah}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} \sin \frac{(1-a)h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}}{\sin \frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}} = k\xi(\rho x^2 + \sigma x + \tau) =$$

$$= k\xi\left(\rho \frac{h^2}{k^2} + \sigma \frac{h}{k} + \tau\right) = \xi\left(\frac{\rho}{k} h^2 + \sigma h + k\tau\right) =$$

$$= \xi\left(\frac{\rho}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} h^2 + \sigma h + \sqrt{\frac{EI}{P}}\,\tau\right). \tag{52}$$

Funcțiile $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ sînt aproximativ egale și în afara intervalului cuprins între $x_1 = \frac{\pi}{5} = 0{,}6283 - 36°$ și $x_2 = \frac{5}{8}\ \pi = 1{,}9635 - 112°\ 30'$, pentru care au fost calculați coeficienții ρ, σ și τ, valorile factorului de corecție ξ, fiind aproximativ egale cu unitatea. Valabilitatea relației (52) se extinde însă și pentru valorile factorului de corecție ξ, diferite sensibil de unitate.

Înlocuind pe ρ, σ și τ cu valorile lor calculate din (48), (49) și (50) se obține

$$F_2(h) = \frac{\sqrt{\frac{EI}{P}} \sin \frac{ah}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} \sin \frac{(1-a)h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}}{\sin \frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}} =$$

$$= \frac{\xi h^2}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} \{0{,}348458[1 - (2a-1)^2] - 0{,}005524[1 - (2a-1)^4] +$$

$$+ 0{,}0000727[1 - (2a-1)^6] - 0{,}000005125[1 - (2a-1)^8] +$$

$$+ 0{,}0000000002248[1-(2a-1)^{10}]\} + \xi h\{-0{,}247455[1-(2a-1)^2] +$$

$$+ 0{,}3300384[1 - (2a-1)^4] - 0{,}0602585\,[1 - (2a-1)^6] +$$

$$+ 0{,}00461766[1 - (2a-1)^8] - 0{,}000207509[1 - (2a-1)^{10}]\} +$$

$$+ \xi \sqrt{\frac{EI}{P}} \{0{,}185813[1 - (2a-1)^2] - 0{,}125776[1 - (2a-1)^4] +$$

$$+ 0{,}0238494[1 - (2a-1)^6] - 0{,}00186016[1 - (2a-1)^8] +$$

$$+ 0{,}000084278[1 - (2a-1)^{10}]\}. \tag{53}$$

Înlocuind în expresia lui F_b din relația (2), pe $F_1(h)$ din (8) și pe $F_2(h)$ prin forma sa simplificată din (52), se obține

$$F_b = \frac{\alpha h^4 + \beta h^2 + \gamma}{\xi\left(\frac{\rho}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} h^2 + \sigma h + \sqrt{\frac{EI}{P}}\,\tau\right) - (1-a)ah} + \frac{mh \sin\beta}{2} =$$

$$= \frac{\alpha h^4 + \beta h^2 + \gamma}{\lambda h^2 + \mu h + \nu} + \zeta h. \tag{54}$$

În această relație se includ pe lîngă expresiile cunoscute pentru α, β și γ din (9), (10) și (11),

$$\alpha = -\frac{P \sin\theta ma(1-a)^2(1+a)}{24EI},$$

$$\beta = \frac{P\Delta\theta a(1-a)^2}{349272}.$$

$$\gamma = -P(1-a)C,$$

şi următoarele relaţii pentru coeficienţii λ, μ şi ν:

$$\lambda = \frac{\rho\xi}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}\{0{,}348458[1-(2a-1)^2]-0{,}005524[1-(2a-1)^4]+$$

$$+0{,}0000727[1-(2a-1)^6]-0{,}000005125[1-(2a-1)^8]+$$

$$+0{,}0000000002248[1-(2a-1)^{10}]\}, \tag{55}$$

$$\mu = \sigma\xi-(1-a)ah=\xi\{-0{,}247455[1-(2a-1)^2]+0{,}3300384[1-(2a-1)^4]-$$

$$-0{,}0602585[1-(2a-1)^6]+0{,}00461766[1-(2a-1)^8]-$$

$$-0{,}000207509[1-(2a-1)^{10}]\}-(1-a)ah, \tag{56}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{EI}{P}}\,\tau\xi = \sqrt{\frac{EI}{P}}\,\xi\,\{0{,}185813[1-(2a-1)^2]-0{,}125176[1-(2a-1)^4]+$$

$$+0{,}0238494[1-(2a-1)^6]-0{,}00186016[1-(2a-1)^8]+$$

$$+0{,}000084278[1-(2a-1)^{10}]\}. \tag{57}$$

4.2. DETERMINAREA DISTANŢEI h PENTRU F_b MAXIM. VARIAŢIA FUNCŢIEI F_b

4.2.1. Stabilirea ecuaţiei pentru determinarea distanţei optime, h

Se consideră funcţia F_b exprimată prin relaţia (54):

$$F_b = \frac{\alpha h^4+\beta h^2+\gamma}{\lambda h^2+\mu h+\nu}+\zeta h = \mathscr{F}_b+\zeta h,$$

în care

$$\mathscr{F}_b = \frac{\alpha h^4+\beta h^2+\gamma}{\lambda h^2+\mu h+\nu}.$$

Pentru a se obţine valoarea optimă a distanţei h, se anulează derivata funcţiei F_b:

$$F_b' = \mathscr{F}_b' + \varphi = 0.$$

Efectuînd calculele se obţine

$$\mathscr{F}_b' = \frac{(\lambda h^2+\mu h+\nu)(4\alpha h^3+2\beta h)-(\alpha h^4+\beta h^2+\gamma)(2\lambda h+\mu)}{(\lambda h^2+\mu h+\nu)^2} =$$

$$= \frac{2\alpha\lambda h^5+3\alpha\mu h^4+4\alpha\nu h^3+\beta\mu h^2+2(\beta\nu-\lambda\gamma)h-\gamma\mu}{\lambda^2h^4+\mu^2h^2+\nu^2+2\lambda\mu h^3+2\lambda\nu h^2+2\mu\nu h}. \tag{58}$$

Înlocuind în (58),

$$F'_b = \frac{2\alpha\lambda h^5 + 3\alpha\mu h^4 + 4\alpha\nu h^3 + \beta\mu h^2 + 2(\beta\nu - \lambda\gamma)h - \gamma\mu}{\lambda^2 h^4 + \mu^2 h^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu h^3 + 2\lambda\nu h^2 + 2\mu\nu h} + \xi = 0.$$

Multiplicînd cu numitorul primului termen, se obține ecuația

$$E(h) = 2\alpha\lambda h^5 + 3\alpha\mu h^4 + 4\alpha\nu h^3 + \beta\mu h^2 + 2(\beta\nu - \lambda\gamma)h - \gamma\mu +$$

$$+ \xi(\lambda^2 h^4 + \mu^2 h^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu h^3 + 2\lambda\nu h^2 + 2\mu\nu h) =$$

$$= 2\alpha h^5 + (3\alpha\mu + \lambda^2\xi)h^4 + (4\alpha\nu + 2\lambda\mu\xi)h^3 + (\beta\mu + \mu^2\xi +$$

$$+ 2\lambda\nu\xi)h^2 + 2(\beta\nu - \lambda\gamma + \mu\nu\xi)h + \xi\nu^2 - \gamma\mu = 0. \quad (59)$$

Maximul funcției $\mathcal{F}_b$ are loc pentru $\xi = 0$, cînd ecuația (59) devine :

$$E'(h) = 2\alpha\lambda h^5 + 3\alpha\mu h^4 + 4\alpha\nu h^3 + \beta\mu h^2 + 2(\beta\nu - \lambda\gamma)h - \gamma\mu = 0. \quad (60)$$

Ecuațiile (59) și (60) se pot rezolva prin interpolare, folosind relațiile :

$$h - h_I = \frac{-(h_{II} - h_I)E(h_{II})}{E(h_{II}) - E(h_I)} = \varkappa, \quad (61)$$

$$h = h_I + \varkappa, \quad (62)$$

în care h_I, h_{II} au valori apropiate, preferabil de semne diferite. Pentru determinarea distanței h, ce se obține prin rezolvarea ecuației generale (59) este necesar să se calculeze în prealabil valorile parametrilor λ, μ și ν din relațiile (55), (56) și (57), în funcție de coeficienții ρ, σ și τ și de factorul de corecție ξ.

În scopul estimării lui ξ se utilizează (tabela 3), luînd o valoare medie, sau se calculează

$$x = \frac{h}{k} = \frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}},$$

admițînd pentru h o soluție aproximativă (v. 5.3).

4.2.2. Simplificarea ecuației generale în cazul verticalității găurii ($\theta = 0$)

În acest caz se anulează termenii definiți prin relațiile (9) și (15) :

$$\alpha = -\frac{P \sin\theta\, ma(1-a)^2(1+a)}{24\,EI} = 0,$$

$$\zeta = \frac{m \sin\theta}{2} = 0.$$

Deoarece funcția $F_4(h) = \zeta h = 0$, funcția $F_b = \mathscr{F}_b$, și $\alpha = 0$, ecuația $E'(h)$, definită prin relația (60),

$$E'(h) = 2\alpha\lambda h^5 + 3\alpha\mu h^4 + 4\alpha\nu h^3 + \beta\mu h^2 + 2(\beta\nu - \lambda\gamma)\, h - \gamma\mu = 0,$$

se simplifică, reducîndu-se la următoarea ecuație de gradul 2:

$$E''(h) = \beta\mu h^2 + 2(\beta\nu - \lambda\gamma)\, h - \gamma\mu = 0, \tag{63}$$

care permite calculul direct al distanței h,

$$h = \frac{\lambda\gamma - \beta\nu + \sqrt{(\lambda\gamma - \beta\nu)^2 - \beta\mu^2\gamma}}{\beta\mu}. \tag{64}$$

4.2.3. Determinarea distanței h pentru $F_b = 0$

În acest caz se anulează funcția F_b,

$$F_b = \frac{\alpha h^4 + \beta h^2 + \gamma}{\lambda h^2 + \mu h + \nu} + \zeta h = 0. \tag{65}$$

Înmulțind cu funcția de la numitor și regrupînd:

$$\alpha h^4 + \beta h^2 + \gamma + \lambda\zeta h^3 + \mu\zeta h^2 + \nu\zeta h = 0,$$

sau

$$h^4 + \frac{\lambda\zeta}{\alpha} h^3 + \frac{\beta + \mu\zeta}{\alpha} h^2 + \frac{\nu\zeta}{\alpha} h + \frac{\gamma}{\alpha} = 0. \tag{66}$$

Punînd $h' = h - \dfrac{\lambda\zeta}{4\alpha}$. (67)

se obține ecuația bipatrată redusă:

$$h'^4 + ph'^2 + qh' + r = 0, \tag{68}$$

în care

$$p = \frac{\beta + \mu\zeta}{\alpha} - \frac{3\lambda^2\zeta^2}{8\alpha^2}, \tag{69}$$

$$q = \frac{\lambda^3\zeta^3}{8\alpha^2} + \frac{\nu\zeta}{\alpha} - (\beta + \mu\zeta)\frac{\lambda\zeta}{2\alpha^2}, \tag{70}$$

$$r = (\beta + \mu\zeta)\frac{\lambda^2\zeta^2}{16\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{3\lambda^4\zeta^4}{256\alpha^4} - \frac{\alpha\lambda\zeta^2}{4\alpha^2}, \tag{71}$$

pentru a se calcula rădăcinile acestei ecuații se rezolvă inițial rezolvanta cubică :

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0,$$

în care scop se efectuează transformarea :

$$Z = y - \frac{2p}{3}, \tag{73}$$

se obține astfel ecuația cubică redusă de formă :

$$Z^3 + SZ + t = 0, \tag{74}$$

care se rezolvă folosind formula lui Cardan.

Se poate folosi și a doua variantă, plecînd de la ecuația originală (66) :

$$\alpha h^4 + \lambda\zeta h^3 + (\beta + \mu\zeta)h^2 + \nu\zeta h + \gamma = 0$$

și efectuînd înlocuirea din (67), se obține :

$$\alpha h'^4 + \left[(\beta + \mu\zeta) - \frac{3\lambda^2\zeta^2}{8\alpha}\right] h'^2 + \left[\frac{\lambda^3\zeta^3}{8\alpha^2} + \nu\zeta - (\beta + \mu\zeta)\frac{\lambda\zeta}{2\alpha}\right] h' +$$

$$+ (\beta + \mu\zeta)\frac{\lambda^2\zeta^2}{16\alpha^2} + \gamma - \frac{3\lambda^4\zeta^4}{256\alpha^3} - \frac{\nu\lambda\zeta^2}{4\alpha} = 0, \tag{75}$$

care, înlocuind $h' = \frac{1}{y}$, devine

$$\left[(\beta + \mu\zeta)\frac{\lambda^2\zeta^2}{16\alpha^2} + \gamma - \frac{3\lambda^4\zeta^4}{256\alpha^3} - \frac{3\lambda\zeta^2}{4\alpha}\right] y^4 + \left[\frac{\lambda^3\zeta^3}{8\alpha^2} + \nu\zeta - (\beta + \mu\zeta)\frac{\lambda\zeta}{2\alpha}\right] y^3 +$$

$$+ \left[(\beta + \mu\zeta) - \frac{3\lambda^2\zeta^2}{8\alpha}\right] y^2 + \alpha = 0. \tag{76}$$

Derivînd și simplificînd, se obține ecuația de gradul 2 :

$$4\left[(\beta + \mu\zeta)\frac{\lambda^2\zeta^2}{16\alpha^2} + \gamma - \frac{3\lambda^4\zeta^4}{256\alpha^3} - \frac{\nu\lambda\zeta^2}{4\alpha}\right] y^2 + 3\left[\frac{\lambda^3\zeta^3}{8\alpha^2} + \nu\zeta - (\beta + \mu\zeta)\frac{\lambda\zeta}{2\alpha}\right] y +$$

$$+ 2\left[(\beta + \mu\zeta) - \frac{3\lambda^2\zeta^2}{8\alpha}\right] = 0, \tag{77}$$

ce permite determinarea a două din rădăcinile ecuației (66) și deci înlocuirea acesteia prin doi factori de gradul 2.

4.2.4. Calculul funcției F_b, prin folosirea formulei lui Euler

Pentru a se urmări variația funcției

$$F_b = \mathscr{F}_b + F_4(h),$$

se observă că $F_b = 0$ pentru valorile h_1 și h_2, ce reprezintă rădăcinile funcției $F_1(h)$ din relația (8),

$$F_1(h) = \alpha h^4 + \beta h^2 + \gamma = 0.$$

Se obține $F_b = 0$ și în cazul lui h_c, maxim, prin folosirea formulei lui Euler din (5),

$$\varphi(x) = \frac{h_c}{k} = \frac{\pi k}{k} = \pi.$$

Din relația (24)

$$F_2(h) = k\varphi(x) = \frac{k \sin ax \sin(1-a)x}{\sin x} = \frac{k \sin ax \sin(1-a)x}{\sin \pi} =$$

$$= \frac{k \sin ax \sin(1-a)x}{0} = \infty,$$

$$\mathscr{F}_b = \frac{F_1(h)}{F_2(h) - F_3(h)} = \frac{F_1(h)}{\infty} = 0. \tag{78}$$

4.3. DETERMINAREA LUI F_b MAXIM, PRINTR-O SOLUȚIE APROXIMATIVĂ

Pentru obținerea valorii optime corespunzătoare lui F_b maxim, se poate folosi o soluție aproximativă înlocuind numărătorul funcției F_b din (8) prin funcția de gradul 1 din (19).

În acest caz

$$\mathscr{F}_b = \frac{\delta h + \varepsilon}{\lambda h^2 + \mu h + \nu}, \tag{79}$$

în care δ, ε, λ, μ și ν sînt exprimate respectiv prin relațiile (20), (21), (55) (56) și (57).

Maximul funcției $\mathscr{F}_b$ se obține prin anularea derivatei:

$$\mathscr{F}_b' = \frac{(\lambda h^2 + \mu h + \nu)\delta - (\delta h + \varepsilon)(2\lambda h + \mu)}{(\lambda h^2 + \mu h + \nu)^2},$$

$$\lambda\delta h^2 + \mu\delta h + \nu\delta - 2\lambda\delta h^2 - 2\lambda\varepsilon h - \delta\mu h - \varepsilon\mu =$$

$$= -\mu\delta h^2 - 2\lambda\varepsilon h + \delta\nu - \varepsilon\mu = 0.$$

Schimbînd semnul se obține ecuația de gradul 2,

$$\lambda\delta h^2 + 2\lambda\varepsilon h + \varepsilon\mu - \nu\delta = 0 \tag{80}$$

și rezolvînd,

$$h = \frac{-\lambda\varepsilon \pm \sqrt{\lambda^2\varepsilon^2 - \lambda\delta(\varepsilon\mu - \nu\delta)}}{\lambda\delta}. \tag{81}$$

4.4. DETERMINAREA DIAMETRULUI EXTERIOR AL STABILIZATORULUI

Într-un asamblaj de fund cu stabilizatori multipli și joc redus, diametrul exterior al stabilizatorului, diferă de diametrul găurii prin valoarea jocului C, fiind exprimat prin relația

$$D_s = D_g - C. \tag{82}$$

Un astfel de asamblaj nu necesită prăjini grele supradimensionate, riscul de prindere fiind mult micșorat, ceea ce constituie un important avantaj, în special la forajul sondelor de mare adîncime.

4.5. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FORȚEI DE ÎMPINGERE LATERALĂ F_b

Pentru întocmirea acestui grafic s-au calculat și reprezentat funcțiile F_b, F_4 (h) și $\mathscr{F}_b$. Rezultatele calculelor sînt reprezentate în tabela 4 și figura 5, pentru datele generale indicate. Din examinarea graficului rezultă $h = 805$ cm, ce se obține prin rezolvarea ecuației (59).

Pentru determinarea lui h, corespunzător unei valori nule pentru forța de împingere F_b, s-a folosit soluția grafică prelungind ramura ascendentă a curbei reprezentative.

Prin aplicarea formulei lui Euler și a relației (78), rezultă $\mathscr{F}_b = 0$ și $F_b = F_4(h)$,

$$h_c = k\pi = 502{,}8 \times 3{,}141593 = 1579{,}57 \simeq 1580 \text{ cm},$$

$$F_b = \mathscr{F}_b + F_4(h) = F_4(h) = 0{,}1284 \times 1579{,}57 = 202{,}82 \text{ kgf}.$$

4.6. FOLOSIREA FACTORULUI DE CORECȚIE

Urmărind maximul funcției F_b din figura 5 se observă o formă foarte puțin variată, apropiată de orizontală a vîrfului curbei reprezentative ce corespunde valorii maxime, din care rezultă că nu se pot produce erori prea mari prin considerarea unui interval mai larg pentru h.

Tabela

Nr.	Distanța h, cm.	Date generale : Prăjini grele Forța axială P = 30000 kgf				
		Arcul x		$\varphi(x)$	$\psi(x)$	ξ
		radiani	grade sexag.			
1	532	1,05873	60°37′22″285	0,180579	0,179392	1,00662
2	552	1,09787	62°17′25″,008	0,18831	0,187623	1,00137
3	600	1,19333	68°22′17″,76	0,207512	0,208156	0,99705
4	650	1,29276	74°04′12″	0,228526	0,2307187	0,9906
5	700	1,39222	79°46′04″,8	0,2506,35	0,254485	0,9849
6	730	1,45186	83°11′09″,6	0,264637	0,269319	0,9826
7	750	1,49165	85°27′57″,6	0,274093	0,27945	0,9808
8	780	1,55132	88°53′02″,4	0,288913	0,295002	0,9794
9	790	1,57122	90°01′26″,4	0,2940	0,300219	0,9791
10	800	1,59111	91°09′50″,4	0,299114	0,305616	0,9788
11	805	1,60108	91°44′02″,4	0,308301	0,308301	0,9784
12	810	1,611	92°18′14″,4	0,30044	0,310998	0,9788
13	820	1,63088	93°26′31″,2	0,309707	0,316415	0,9788
14	830	1,65077	94°34′55″,2	0,315707	0,321892	0,9789
15	840	1,67065	95°43′19″,2	0,320407	0,32741	0,9788
16	850	1,69056	96°51′43″,2	0,326161	0,332981	0,9795
17	900	1,790	102°33′28″,8	0,355533	0,361539	0,9834
18	950	1,88943	108°15′18″	0,387818	0,391303	0,9911
19	1000	1,9889	113°57′18	0,4238	0,422273	1,00362
20	1050	2,08836	119°38′07″,2	0,46443	0,454439	1,02197
21	1100	2,18775	125°20′52″,8	0,511162	0,487796	1,04729
22	1150	2,28721	131°02′52″,8	0,566085	0,522368	1,0837
23	1200	2,38666	136°44′34″,8	0,632371	0,558196	1,1133
24	1250	2,48611	142°26′34″,8	0,7151	0,595094	1,20166
25	1300	2,58533	148°08′16″,8	0,82294	0,63325	1,2995
26	1350	2,685	153°49′50″,52	0,972025	0,67259	1,4452
27	1400	2,78443	159°32′13″,2	1,197236	0,71319	1,6635
28	1450	2,88387	165°56′16″,8	1,58533	0,743335	2,133
29	1500	2,98346	170°56′16″,8	2,41314	0,797972	3,062
30	1550	3,08278	176°37′40″,8	6,147	0,842074	7,794
31	* 1580	π = 3,141593	180°	∞	0,868769	∞

* Valoare ce corespunde lui hc = distanță maximă critică calculată cu formula lui Euler (6).

4

D = diam. ext. = $6^1/_2$ in = 16,51 cm
d = diam. int. = $2^1/_2$ in = 5,715 cm
a = 0,2, $\theta = 10°$, $\Delta\theta = 2°/30{,}48$ m

$$K = \sqrt{\frac{EI}{P}} = 502{,}8 \text{ cm}$$

$C = 0{,}1$ in $= 0{,}254$ cm

$F_1(h)$ kgf cm.	$F_2(h)$ cm.	$F_3(h)$ cm.	$F_2(h) - F_3(h)$ cm.	$\mathcal{F}h$ kgf.	$F_4(h)$ kgf.	F_b kgf.
−398,2	90,794	85,12	5,674	−70,16	63,38	0
0	94,68	88,32	6,36	0	70,89	70,89
969,26	104,352	96,00	8,352	116,05	77,06	193,11
20229	114,902	104,0	10,902	185,55	83,48	269,03
3112,68	126,017	112,0	14,017	222,07	89,9	311,97
3757,75	133,057	116,8	16,257	231,15	93,75	324,90
4195,65	137,813	120,0	17,815	235,54	96,32	331,86
4852,28	145,263	124,7	20,563	235,98	100,18	336,16
5070,99	147,823	126,4	21,423	236,7	101,46	338,16
5288,55	150,39	128,0	22,39	236,2	102,19	338,99
5396,13	151,669	128,8	22,869	236,5	103,31	Max. 339,81
5505,67	153,048	129,6	23,448	234,8	104,03	338,83
5721,79	155,717	131,2	24,517	233,37	105,31	338,68
5937,49	158,433	132,8	25,633	231,63	106,6	338,23
6151,69	161,129	134,4	26,729	230,15	107,89	338,04
6365	163,992	136,0	27,992	227,39	109,18	336,57
7408,8	178,76	144,0	34,76	213,14	115,59	328,73
8403	195,263	152,0	43,263	194,23	122,01	316,24
9332	213,085	160,0	53,085	175,79	128,4	304,19
10169,1	233,511	168,0	65,511	155,10	134,85	289,95
10901,4	257,011	176,0	81,011	134,56	141,28	275,84
11505,1	284,631	184,0	100,631	114,34	147,70	262,04
11958,2	317,9	192,0	125,9	94,98	154,15	249,10
122,38	359,55	200,0	159,55	76,7	160,54	237,24
Max. 12319,7	413,77	208,0	205,77	59,87	166,96	226,83
12179,1	488,733	216,0	272,733	44,66	173,38	218,04
11678,7	602,014	224,0	378,014	33,89	179,8	213,69
11123,4	797,116	232,0	565,116	19,68	192,65	202,91
10153,1	1228,54	240,0	988,54	10,27	192,65	202,92
8849,7	3090,63	248,0	2842,63	3,11	199,07	202,18
6660,7	∞	253,73	∞	0	202,82	202,82

GRAFICUL DE VARIAȚIE PENTRU FORȚA DE ÎMPINGERE LATERALĂ Fb(kgf) ÎN FUNCȚIE DE DISTANȚA h(cm), DE LA SAPĂ, LA STABILIZATORUL SUPERIOR.

Prăjini grele D = diam.ext.= 6 1/2 in = 16,51 cm
d = diam.int. = 2 1/4 in = 5,715 cm

Forța axială P= 30000 kgf. a=0,2 Θ=10°, $\Delta\Theta$= 2°/30,48 m, C=0,1 in=0,254 cm

$F_b = \mathcal{F}_b + F_4(h)$, $\mathcal{F}_b = \dfrac{F_1(h)}{F_2(h) - F_3(h)}$

$$F_1(h) = \left[\frac{\Delta\Theta a(1-a)^2h^2}{349272} - C - \frac{ma(1-a)(1+a)h\sin\Theta}{24EI}\right](1-a)P \,,\quad F_2(h) = \frac{\sqrt{\frac{EI}{P}}\sin\sqrt{\frac{EI}{P}}\frac{ah}{}\sin\sqrt{\frac{EI}{P}}\frac{(1-a)h}{}}{\sin\frac{EI}{P}} = \frac{EI}{P}\xi(\varphi x^2 + \sigma x + \tau)$$

(φ, σ, și τ sînt indicații în fig.3)

$F_3(h) = a(1-a)h$; $F_4(h) = \dfrac{m\sin\Theta}{2}h = \varphi h$; în care $x = \dfrac{h}{K} = \dfrac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}$

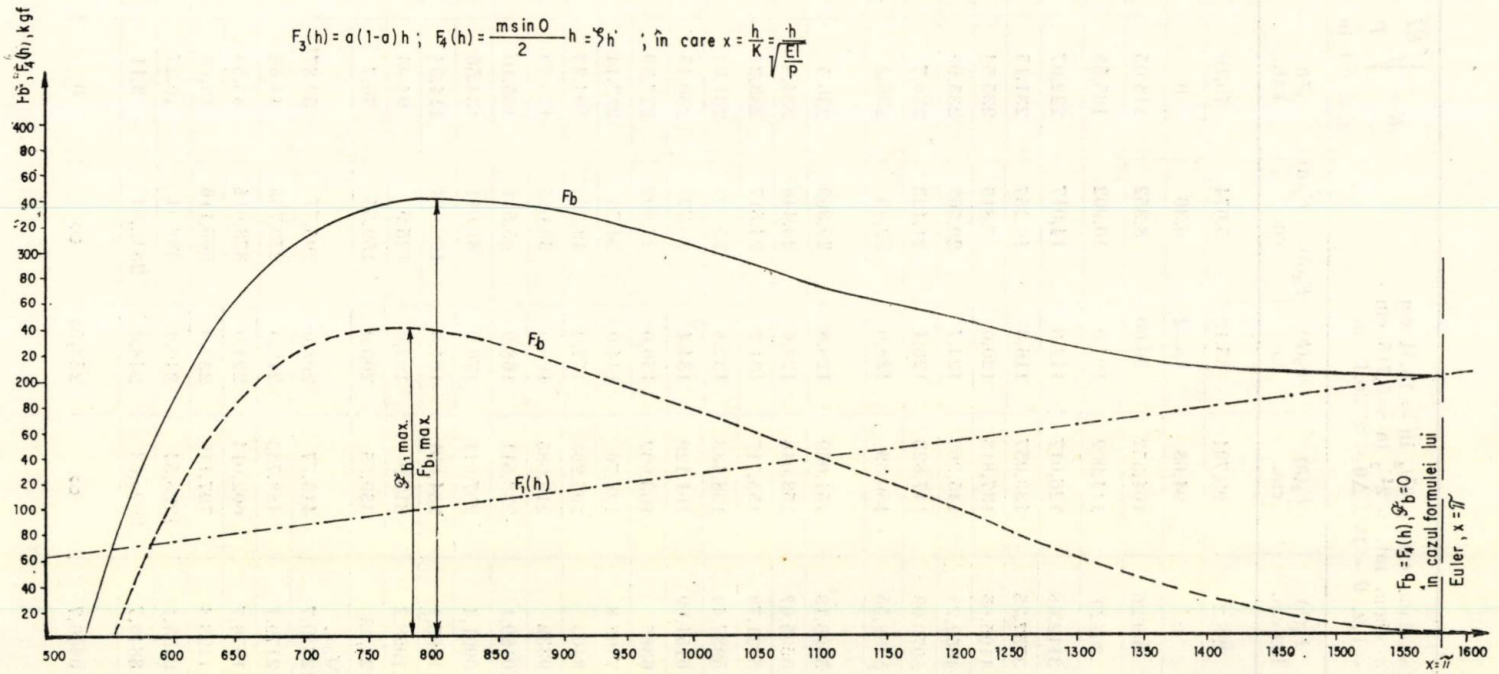


Fig. 5

5. FOLOSIREA TABELELOR

Pentru determinarea distanței h, se poate folosi și tabela 3. În acest scop se aplică relația (22) :

$$h = Kx,$$

pentru valori superioare lui h_1, rădăcina ecuației $F_1(h) = 0$.

Folosind aceste date, se poate stabili intervalul în care se găsește distanța h, ce corespunde valorii maxime pentru F_b.

6. CONCLUZII

În anumite zone, prin folosirea relațiilor Lubinski-Woods, pentru un singur stabilizator, nu se poate obține un control eficient al deviației găurii de sondă. În condiții normale, această tehnică impune apăsări axiale minime, ce nu satisfac cerințele optimizării forajului.

În literatură s-au preconizat noi tehnici, ce folosesc doi sau mai mulți stabilizatori cu joc redus ($C = 0{,}1 - 0{,}2$ in), plasați deasupra sapei în asamblajele de prăjini grele, care permit apăsări axiale cu mult mai mari, impuse de cerințele optimizării. În acest scop s-a considerat tehnica lui R. S. Hoch [12], care permite determinarea prin încercări a distanței de la sapă la stabilizatorul superior și o a doua tehnică preconizată de A. Crowner [15] ce folosește formula lui Euler de flambaj, pentru grindă articulată la ambele capete, exprimată prin relația (5).

Tehnica lui R. S. Hoch prezintă avantagii asupra celei recomandate de A. Crowner, permițînd determinarea prin încercări a distanței optime h de la sapă la stabilizatorul superior, ce corespunde forței maxime de împingere laterală F_b.

Folosirea formulei lui Euler, exprimată prin relația (6) pentru care forța efectivă de împingere laterală $\mathscr{F}_b$ indicată în relația (7) are o valoare nulă, nu asigură un control complet al deviației găurii și aplicarea unui regim optim de apăsări axiale.

Tehnica preconizată de R. S. Hoch, exprimată prin relația (2), care reprezintă o simplificare a relației (1) propusă de Lubinski-Woods, prin suprimarea componentei verticale a greutății prăjinii grele de sub punctul de tangență, este valabilă în condițiile apăsărilor axiale mari, eroarea fiind minimă [14] (vezi p. 433). În forma prezentată, aceasta nu permite însă stabilirea directă a distanței optime h, necesitînd un mare număr de încercări pentru determinarea forței maxime de împingere laterală F_b corespunzătoare.

În această lucrare sînt prezentate două variante pentru determinarea directă prin calcul a distanței h (fig. 2*b*). Prima reprezintă o ecuație simplificată de gradul 2, permițînd o soluție aproximativă. A doua reprezintă o ecuație de gradul 5, ce include factorul de corecție ξ. Pentru a se obține soluții exacte, factorul ξ se poate estima ușor. Erorile sînt minime datorită formei foarte puțin variate a vîrfului curbei reprezentative a funcției F_b (fig. 5).

Metoda indicată include şi a treia variantă, ce foloseşte tabela 3, permiţînd determinarea prin încercări, sau reprezentare grafică a distanţei h, stabilindu-se în prealabil intervalul respectiv.

În tabela 3 sînt prezentate valorile calculate din 5° în 5°, în funcţie de valoarea arcului $x = \frac{h}{k}$, exprimat în radiani.

Notaţii

P — Forţa axială transmisă sapei;
E — Modulul de elasticitate al oţelului $= 2{,}11 \times 10^6$, kgf/cm²;
I — Momentul de inerţie al secţiunii prăjinii grele de la sapă, cm⁴;
h — Distanţa de la sapă la stabilizatorul superior, cm;
a — Raportul dintre distanţa de la sapă la stabilizatorul inferior şi distanţa de la sapă la stabilizatorul superior;
m — Greutatea prăjinii grele de la sapă/unitatea de lungime, kgf/cm;
θ — Unghiul de deviere, grade sexagesimale;
$\Delta\theta$ — Factorul de îngenunchere (raţia de deviere), ce reprezintă variaţia unghiului de deviere, pe unitatea de adîncime exprimat în grade/100 picioare = 30,48 m, în conf. cu normele API — IADC;
C — Jocul, diferenţa dintre diametrul găurii şi diametrul exterior al stabilizatorului $= D_g - D_s$;
D_g — Diametrul găurii, cm;
D_s — Diametrul exterior al stabilizatorului, cm;
R — Raza curburii, cm;
W — Jocul lateral pentru stabilizatorul inferior, cm;
h_m — Distanţa minimă critică, cm;
h_c — Distanţa minimă critică calculată cu formula lui Euler, cm;

$$\mathcal{F}_b = \frac{F_1(h)}{F_2(h) - F_3(h)}, \text{ forţa de împingere laterală efectivă, kgf;}$$

$$F_2(h) = \alpha h^4 + \beta h^2 + \gamma, \text{ kgf/cm;}$$

$$\alpha = -\frac{P \sin\theta\, m(1-a)^2(1+a)}{24\, EI}, \text{ kgf/cm}^3;$$

$$\beta = \frac{P\Delta\theta a(1-a)^2}{349\,272}, \text{ kgf/cm;}$$

$$\gamma = -P(1-a)C, \text{ kgf/cm;}$$

$$F_2(h) = \frac{\sqrt{\frac{EI}{P}} \sin\frac{ah}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} \sin\frac{(1-a)h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}}{\sin\frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}}} - , \text{ cm;}$$

$F_3(h) = (1 - a)ah$, cm;
$F_4(h) = \zeta h$ — forța de împingere laterală adițională datorită componentei orizontale a greutății prăjinii grele, kgf;

$$\zeta = \frac{m \sin \theta}{2}, \quad \text{Kgf/cm};$$

$F_b = \mathcal{F}_b + F_4(h)$ — forța de împingere laterală totală, kgf;
h_M — Maximul funcției $F_1(h)$, kgf/cm;
h_1, h_2 — Rădăcinile pozitive ale ecuației $F_1(h) = 0$;
δ și ε — Coeficienții funcției liniare reprezentînd $F_1(h) \simeq \delta_h + \varepsilon$;

$$k = \sqrt{\frac{EI}{P}};$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{\frac{EI}{P}}} \text{ — arcul, radiani;}$$

$$\xi = \frac{\mathcal{S}(x)}{\psi(x)} \text{ — factor de corecție;}$$

$$\varphi(x) = \frac{\sin a\, x \sin(1 - a)x}{\sin x} = \xi\psi(x) = \xi(\rho x^2 + \sigma x + \tau);$$

x_1, x_2 — intervalul ales;

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x^2 & x & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ — determinantul sistemului;}$$

ρ, σ τ — coeficienții funcției ψ, exprimați prin relațiile (48), (49) și (50);

$F_2(h) - F_3(h) = \lambda h^2 + \mu h + \nu$;

$$\lambda = \frac{\rho\xi}{\sqrt{\frac{EI}{P}}};$$

$\mu = \sigma\xi - (1 - a)ah$;

$\upsilon = \sqrt{\frac{EI}{P}}\,\tau\xi$.

Primită la redacție la 3 iulie 1973.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Lubinski, *A study of the Buckling of Rotary Drill Strings*, Drilling and Production Practice, API (1950) p. 178.
2. G. O. Mac Donald, A. Lubinski, *Straight Hole Drilling.* in *Crooked — Hole Country* Drilling and Production Practice, API, 1951, p. 80.
3. A. Lubinski, H. B. Woods, *Factors Affecting the Angle of Inclination and Dog, Legging in Rotary Bore — holes*, Drilling and Production Practice, API, 1953, p. 222.
4. A. W. Woods, Arthur Lubinski, *Practical Charts for Solving Problems, on hole Deviation*, Drilling and Production Practice, 1954, p. 56.
5. A. W. Woods, Arthur Lubinski, *Use of stabilisers in controlling hole deviation*, Drilling and Production Practice, 1955, p. 165—182.
6. F. Willers, *Das Knicken schwerer Gestange*, Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Mechanik, **21**, *1*, 43 (1941).
7. H. M. Rollins, *Studies of Straight Hole Drilling Practices*, 1952 to 1956 — A Summary Report of API Southwest District Committee in Straight — Hole Drilling, Drilling and Production Practice, 1956, p. 37—95.
8. H. E. Treicher, *Penetration rates increase with larger drillcollars*, World Oil, October, **149**, *5*, 105, 107, 115 (1959).
9. Roy A. Bobo, *Drilling Three Decades Back, one Ahead.* Journal of Petroleum Technology, July 1968, p. 702.
10. Stanley C. Moore, *Recent Trends in Controlling Hole Deviation*, Drilling and Production Practice, 1962 p. 18.
11. Pedigo : *Annotated Bibliography of Published Material Related to Crooked Holes*, Texas A § M. College Station, Texas September 1961.
12. R. S. Hoch, *A Review of the Crooked-hole Problem and an Analysis of Packed Bottom-hole Drill-Collar Assemblies*, Drilling and Production Practice 1962, p. 27—37.
13. Chad Wiley, *The Use of Near-bit Stabilizer*, Assemblies for the Control of Hole Deviation, Drilling and Production Practice, 1965, p. 66—75.
14. C. E. Murphy, J. B. Cheatham J. R., *Hole Deviation and Drill String Behavior*, Society of Petroleum Engineer Journal, March 1966, p. 48.
15. Albert Crowner-Packed, *Hole Assemblies Solve Soft Formation Drilling Problems*, Petroleum Engineer, September, (**40**, *10*, 69—73 (1968).
16. Roark, *Formules for Stress and Strain*, Mc Graw Hill Book Co. New York N. 4 3 rd Edition (v. API RP 76 Second Edition april. 1971, p. 33).

PROGRESE ÎNREGISTRATE ÎN DOMENIUL MAŞINILOR DE RECTIFICAT CU PERFORMANŢE SUPERIOARE PRIN UTILIZAREA BROŞELOR LUBRIFICATE CU AER

ed FL. DIMOFTE şi ERMINA RĂDULESCU
Institutul pentru creaţie ştiinţifică şi tehnică Bucureşti

Domeniul maşinilor unelte reprezintă unul dintre cele mai caracteristice cîmpuri de utilizare în care introducerea lagărelor cu aer poate conduce la creşterea performanţelor şi a preciziei de lucru a maşinilor, a productivităţii muncii, la mărirea durabilităţii maşinilor etc.
Lucrarea de faţă prezintă realizările obţinute în ţară în această direcţie, punînd în evidenţă particularităţile, caracteristicile şi performanţele broşelor pe lagăre aerostatice.

Utilizarea lubrificaţiei cu aer în domeniul maşinilor unelte reprezintă unul dintre cele mai moderne mijloace de îmbunătăţire a performanţelor şi preciziei de lucru a maşinilor, oferind posibilităţi largi dezvoltării prelucrărilor mecanice de mare fineţe şi productivitate.

Se observă din ce în ce mai mult că cerinţele actuale ale maşinilor unelte în special impun ridicarea necontenită a preciziei şi productivităţii lor, tinzînd în primul rînd către folosirea unor viteze de lucru foarte mari faţă de cele actuale. În aceste condiţii posibilităţile sistemelor clasice de lubrificaţie sînt depăşite, impunîndu-se folosirea lagărelor cu gaze, ale căror avantaje, unanim recunoscute în prezent, le recomandă mai ales pentru satisfacerea necesităţilor amintite.

În ţara noastră cercetările în acest domeniu au fost iniţiate şi dezvoltate în cadrul Institutului pentru creaţie ştiinţifică şi tehnică, soldîndu-se cu rezultate dintre cele mai bune.

1. AVANTAJELE POTENŢIALE ALE LAGĂRELOR CU AER UTILIZATE LA MAŞINILE DE RECTIFICAT

Lagărele lubrificate cu aer reprezintă o soluţie tehnică relativ nouă, care oferă posibilitatea realizării unor aplicaţii tehnice deosebite, datorită avantajelor pe care le prezintă : frecări considerabil mai mici decît în alte tipuri de lagăre (în raportul 1/100 + 1/100 000), încălziri reduse,

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, 1974, P. 465 – 476

durabilităţi mari, precizii de prelucrare sporite, productivităţi ridicate, posibilitatea de a funcţiona la temperaturi joase sau înalte, în medii nocive sau iradiate etc.

Principalele avantaje ale utilizării lagărelor cu aer la maşinile de rectificat pot fi sintetizate după cum urmează :

1) Frecări neglijabile în lagăre care conduc la diverse consecinţe favorabile ca :

— eliminarea perioadei de încălzire, temperatura de regim a lagărelor cu aer fiind aceeaşi în stare de repaus şi de funcţionare şi egală cu temperatura ambiantă, spre deosebire de temperatura de funcţionare a lagărelor cu ulei sau rulmenţi care este cu 40—50°C mai mare decît cea ambiantă,

— creşterea puterii disponibile la piatra de rectificat, ca urmare a pierderilor prin frecare neglijabile în cazul lagărelor cu aer şi a momentului de pornire practic nul caracteristic acestor lagăre,

— folosirea lagărelor ca sistem riguros de echilibrare a pietrei de rectificat, axul pietrei plutind liber pe filmul de aer din lagărele alimentate sub presiune,

— creşterea turaţiilor de lucru, încălzirile constituind o piedică în această direcţie, element important mai ales pentru broşele de rectificat interior ale căror turaţii tind să depăşească 100 000 rot/min.

2) Îmbunătăţirea preciziei de prelucrare din punct de vedere :

— macrogeometric, ca urmare a tendinţei axului de a-şi păstra o poziţie fixă în spaţiu cu o precizie de fracţiuni de microni, a lipsei uzurii, a lipsei deformaţiilor termice etc.,

— microgeometric, ca urmare a îndepărtării vibraţiilor, rigidităţii pieselor, uzurii mai reduse a pietrei etc.

3) Reducerea rebuturilor este o consecinţă directă a măririi preciziei de prelucrare.

4) Mărirea durabilităţii pietrei de două pînă la patru ori, prin reducerea numărului de corectări ale profilului datorită uniformităţii mişcării.

5) Mărirea durabilităţii maşinii ca o consecinţă a uzurii extrem de redusă a lagărelor cu aer şi depinzînd de natura materialelor folosite pentru lagăre.

6) Simplificarea întreţinerii prin eliminarea reglajelor periodice şi evitarea contaminării cu impurităţi datorită circulaţiei de aer sub presiune.

7) Mărirea productivităţii muncii ca urmare a folosirii unor turaţii ridicate, a reducerii sau eliminării perioadei de scînteiere datorită preciziei sporite de prelucrare, a dispariţiei timpilor morţi datoraţi încălzirii, înlocuirii pietrei, schimbării uleiului etc.

2. UTILIZAREA LAGĂRELOR CU AER LA UNELE TIPURI DE MAŞINI DE RECTIFICAT FABRICATE ÎN ŢARĂ

Problemele tehnice ridicate de realizarea şi funcţionarea lagărelor cu aer la turaţii relativ scăzute fiind mai uşor de rezolvat, primele aplicaţii ale lubrificaţiei cu gaze au fost concepute pentru maşinile de rectificat plan şi anume capetele port-piatră ale acestora, a căror turaţii de regim nu depăşesc 3000 rot/min.

În această direcție s-au realizat pînă în prezent trei tipuri de broșe de rectificat plan pe lagăre alimentate cu aer, în mai multe variante constructive fiecare, destinate mașinilor de rectificat plan RPO 125, RPO 200, RPO 320. Dintre acestea prima a fost omologată ca prototip și se află în probe de anduranță (10 000 ore funcționare), fiind brevetată în țară și în străinătate (fig. 1). Dintre celelalte, broșa aerostatică pentru mașina RPO 200 (fig. 2) a fost experimentată cu rezultate foarte bune

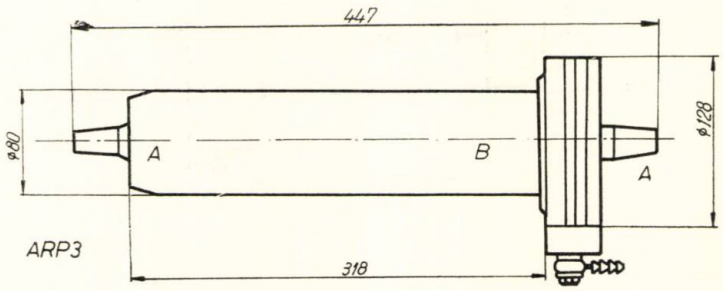


Fig. 1

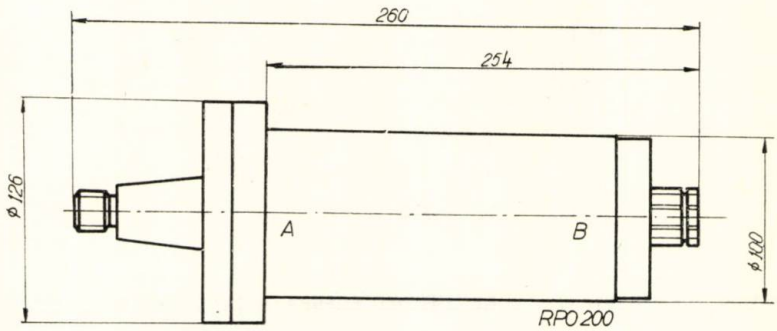


Fig. 2

și se află în curs de omologare, iar broșa pentru mașina RPO 320 urmează a parcurge aceleași etape.

Paralel cu broșele de rectificat menționate s-au realizat și experimentat și broșe de mare turație (30 000—50 000 rot/min) destinate mașinilor de rectificat interior RI 80 (fig. 3 și 4), întocmindu-se totodată proiectul pentru broșele aerostatice de 50 000—100 000 rot/min ce vor echipa noile mașini de rectificat interior RI 100.

Problemele tehnologice legate de uzinarea acestor broșe fiind mai dificile, a fost necesară parcurgerea a două etape și anume: realizarea unor prototipuri experimentale din materiale clasice curente, în scopul verificării performanțelor soluțiilor constructive adoptate și alegerea unui cuplu de materiale optim în vederea executării unor prototipuri industriale convenabile atît ca performanțe, cît și ca robustețe și siguranță în exploatare.

Pînă în prezent a fost încheiată cu succes prima etapă, fixîndu-se definitiv soluţiile constructive ale broşelor aerostatice pentru maşina RI 80, soluţii care constituie de asemenea obiectul unor brevete din ţară şi din străinătate.

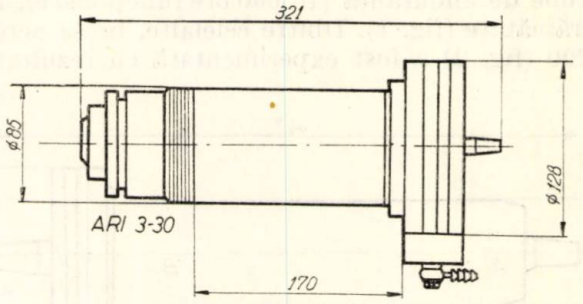


Fig. 3

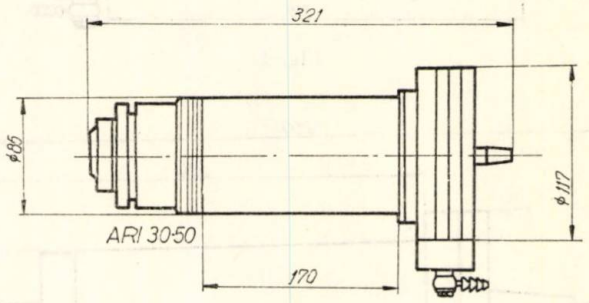


Fig. 4

3. PERFORMANŢELE MAŞINILOR DE RECTIFICAT ECHIPATE CU BROŞE PE LAGĂRE CU AER

Experimentarea broşelor aerostatice pe maşinile de rectificat a comportat întotdeauna două faze. Prima, urmărea măsurarea performanţelor lagărelor cu aer : capacitatea de încărcare, rigiditatea statică, precizia de rotire, constanta de amortizare, puterea consumată etc. A doua fază cuprindea probele tehnologice care stabileau performanţele maşinii de rectificat cu broşe aerostatice, prin calitatea sub aspect micro şi macrogeometric a suprafeţelor prelucrate.

3.1. REZULTATELE EXPERIMENTĂRII BROŞEI AEROSTATICE PE MAŞINA DE RECTIFICAT PLAN RPO 125

Maşina de rectificat plan RPO 125 atît în varianta cu avansuri manuale, cît şi în cea cu avansuri automate, este echipată cu o broşă antrenată la 2 700 rot/min, prevăzută cu două lagăre radiale şi un lagăr axial dublu, alimentate cu aer sub presiune la 5 at. rel. printr-o serie de

orificii calibrate, dispuse echidistant. Cotele de gabarit ale broșei sînt prezentate în figura 1.

Performanțele lagărelor cu aer stabilite experimental sînt suficient de apropiate de cele teoretice și de valorile atinse în mod obișnuit pe plan mondial în condiții asemănătoare de funcționare, după cum rezultă din valorile capacității de încărcare, rigidității, vibrațiilor, preciziei de rotire etc., prezentate în continuare :

a. *Capacitatea de încărcare*

Tabela 1

Presiunea de alimentare p_s (at. rel.)		3	4	5
Încărcarea maximă la piatră (Kgf)	repaus	25	35	43
	rotație	27	35	44
Încărcarea maximă a lag. anterior A(Kgf)	repaus	31	44,5	55
	rotație	33,5	44,5	57
Încărcarea maximă a lag. posterior B(Kgf)	repaus	11,3	14,8	17,3
	rotație	11,8	14,8	18,3

b. Rigiditatea statică a broșei în stare de repaus și în rotație a fost determinată atît în dreptul pietrei de rectificat, cît și în lagărul anterior (fig. 1), acuzînd o variație aproape liniară la deplasări mai mici decît jumătatea jocului, adică în cazurile normale de funcționare (fig. 5). Astfel, rigiditatea lagărului A, în origină (panta curbei în origină), este constantă și are următoarele valori :

Tabela 2

Presiunea de alimentare (at. rel.)	3	4	5
Rigiditate statică (Kgf/μ)	3,333	4,63	5,15
Rigiditate în rotație (Kgf/μ)	2,3	3,23	4,2
Rigiditate teoretică (Kgf/μ)	2,62	3,8	4,7

Se observă că valorile determinate experimental sînt foarte apropiate de cele teoretice, depășindu-le chiar în situația arborelui în repaus, datorită imperfecțiunilor de uzinare care fac ca arborele să se așeze strîmb în cuzinet, în timp ce în rotație efectul lor se diminuează.

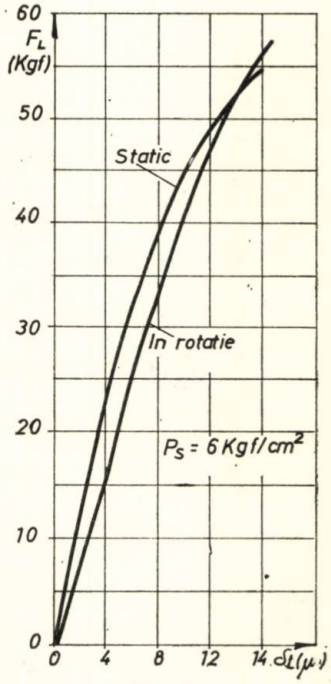


Fig. 5

c. Vibrațiile axului broșei au fost înregistrate atît în situația arborelui încărcat (15 Kgf), prin intermediul unui rulment, cît și în situația arborelui neîncărcat, folosind un analizor de frecvență. În cazul axului neîncărcat amplitudinea maximă constatată a fost de 1,11 μ, în dreptul frecvenței de 45 Hz, corespunzătoare turației nominale, valoare pusă în evidență și prin înregistrarea traectoriei centrului axului pe oscilograf. Încercările tehnologice au urmărit rectificarea unor suprafețe pe epruvete identice și în aceleași condiții, pe mașina RPO 125 echipată cu broșă aerostatică și, respectiv, broșă cu rulmenți în licență FORTUNA (fig. 8 și 9).

3.2. REZULTATELE EXPERIMENTĂRII BROȘELOR AEROSTATICE PE MAȘINA DE RECTIFICAT PLAN RPO 200

Pentru mașina RPO 200, ca și pentru RPO 320 au fost preconizate două soluții constructive de broșe aerostatice : cu lagăre axiale simple și cu lagăr axial dublu. La ambele variante lagărele radiale sînt mai robuste avînd dimensiuni mai mari și jocuri mai mici ($0{,}5\,^0/_{00}$ joc relativ), presiunea de alimentare fiind tot de 4—5 at. rel., iar turația de regim de aproximativ 3000 rot/min. Din această cauză performanțele celor două broșe sînt superioare celei de la mașina RPO 125 avînd valorile prezentate în continuare, numai pentru încărcări și rigidități. În cazul de față rigi-

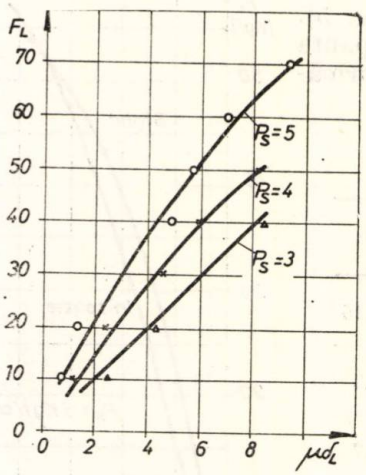


Fig. 6

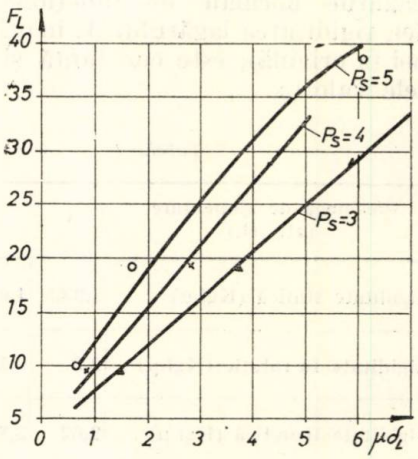


Fig. 7

dităţile au fost determinate numai pentru lagărul radial A, cel mai încărcat (adiacent pietrei de rectificat), pentru ambele soluții constructive (fig. 6, 7). Din analiza valorilor prezentate rezultă, pe de o parte, mici diferențe între valorile preconizate prin calcul și cele realizate efectiv, datorate

imperfecțiunilor în execuția lagărelor, iar pe de altă parte o reducere a acestor valori în dreptul pietrei ca urmare a construcției prea compacte

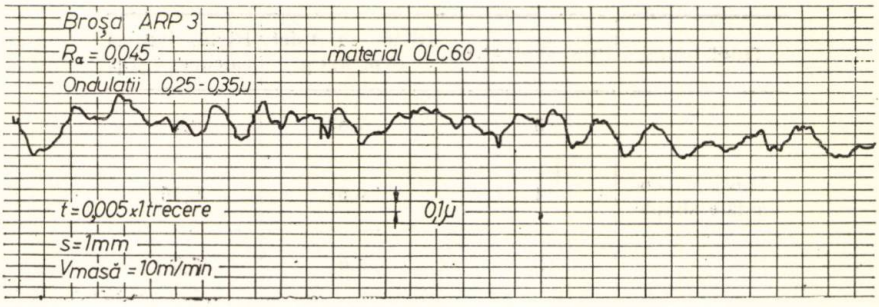


Fig. 8

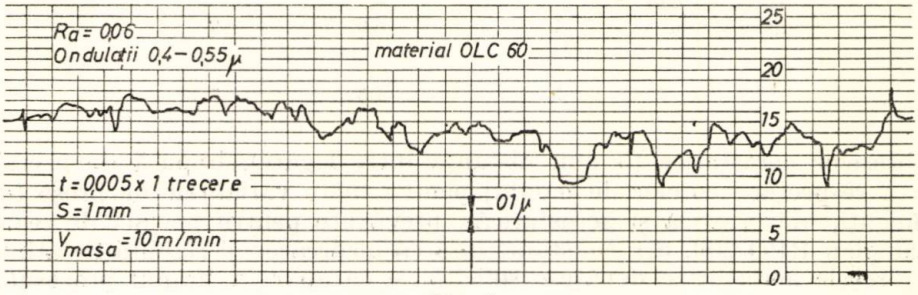


Fig. 9

a. *Capacitatea de încărcare*

Tabela 3

Tipul broșei	Pres. alim. (at. rel.)	Încărcarea max. la piatră (kgf)		Încărcarea max. a lag. radial *A*		Încărcarea max. a lag. radial *B*	
		măs.	calc.	măs.	calc.	măs.	calc.
Broșa cu lag. axiale simple	5	33	40	66	80	33	40
	4	25	33,5	50	67	25	33,5
	3	18,5	26,5	37	53	18,5	26,5
Broșa cu lag. axiale duble	5	16	44,5	30,78	—	13,12	—
	4	13	36	25,09	—	10,66	—
	3	11,6	28	22,38	—	9,51	—

b. *Rigiditatea radială statică*

Tabela 4

Tipul broşei	Pres. alim. at. rel.	Rigid. lag. *A* det. exp. kgf/μ	Rigid. lag. *A* calculat kgf/μ
Broşa cu lag. axiale simple	5	7,83	8,1
	4	6,6	6,75
	3	5,0	5,3
Broşa cu lag. axial dublu	5	6,75	8,6
	4	5,9	7
	3	4,32	5,38

a broşelor aerostatice (5 mm distanţă între lagăre), impusă de necesitatea respectării cotelor de montaj pentru toate variantele de broşe (cu rulmenţi, hidrostatică şi aerostatică), prevăzute pentru maşina de rectificat plan RPO 200. S-a constatat însă că încărcările şi rigidităţile atinse de broşele aerostatice depăşesc solicitările ce apar în timpul procesului de rectificare chiar la regimuri de aşchiere dure, permiţînd obţinerea unor calităţi de suprafaţă foarte bune. În cursul încercărilor s-a urmărit : a) punerea în evidenţă a performanţelor broşelor aerostatice în privinţa calităţilor suprafeţelor rectificate şi b) verificarea robusteţei acestora

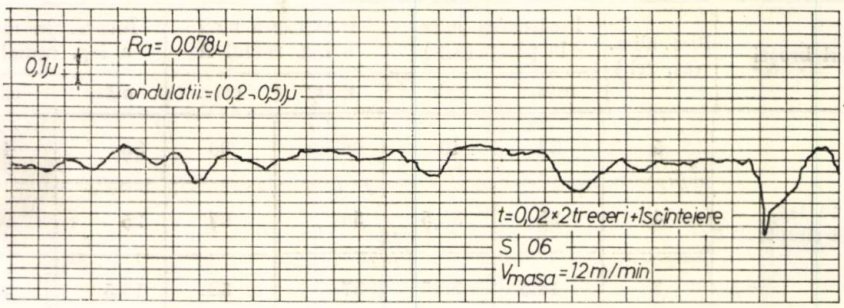


Fig. 10

la regimuri de aşchiere dură. Astfel s-au efectuat o serie de operaţii de rectificare cu diverse regimuri de aşchiere, la diferite presiuni de alimentare şi cu ambele variante de broşe, urmărindu-se obţinerea unor suprafeţe cît mai bune (profilogramele din figurile 10 şi 11). Se observă

că ondulațiile înregistrate au valori sub 0,5—0,7μ, iar rugozitatea medie R_a aproximativ 0,07 μ. De asemenea s-au făcut probe comparative între broșele aerostatice și broșele cu rulmenți, respectiv lagăre hidrostatice (fig. 12), efectuîndu-se operații de rectificare cu aceleași regimuri de așchiere și pe aceleași epruvete. Din analiza lor a rezultat superioritatea

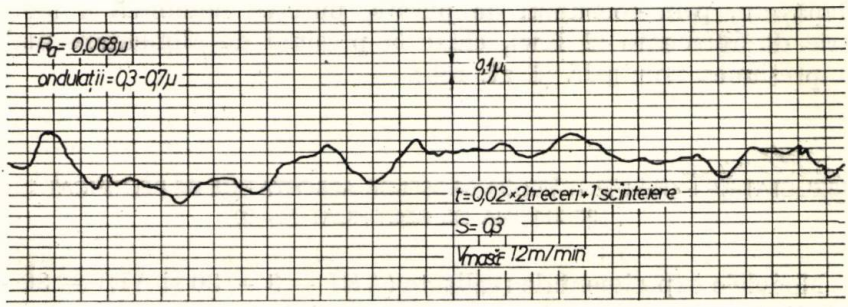


Fig. 11

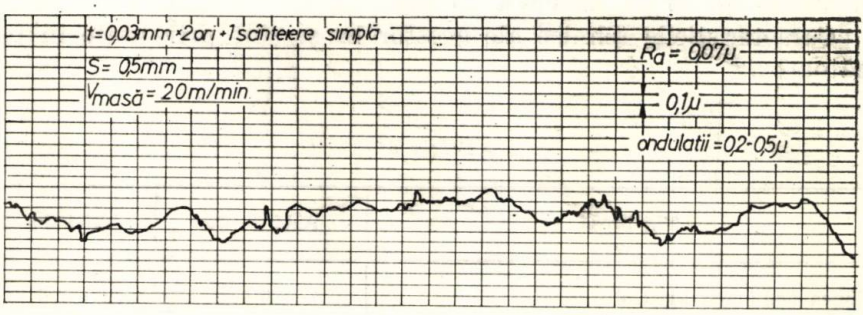


Fig. 12

suprafețelor realizate în aceleași condiții cu broșele aerostatice, ilustrate de valorile ce urmează :

Tabela 5

Tipul broșei	Material. epruvetă	Ondulații, μ	Rugozitatea Ra, μ
Cu rulmenți	OL60 $HR_c = 60$	1—2,4	0,24
cu lagăre aerostat. (lag. ax. simp).	„	0,5—1,2	0,18
cu lag. hidrost.	C 130 $HR_c = 80$	0,7	0,1
cu lag. aerost. (lag. ax. dublu)	„	0,2—0,5	0,07

A doua etapă de încercări tehnologice a urmărit comportarea broşelor aerostatice la regimuri dure de exploatare, efectuîndu-se operaţii de rectificare pe o epruvetă de oţel călit de 400 mm lung, utilizînd regimurile de degroşare şi anume adîncimi de tăiere de 0,03 mm şi avansuri transversale de 3—10 mm, viteza mesei fiind de 20 m/min. La ambele broşe aerostatice s-a constatat o funcţionare normală la regimuri severe ce depăşeau, prin consumul de putere, puterea nominală a motorului electric de antrenare (2 Kw), chiar la presiuni de alimentare mai mici decît presiunea nominală (5 at. rel.).

3.3. REZULTATELE EXPERIMENTĂRILOR BROŞELOR AEROSTATICE DE RECTIFICAT INTERIOR PE MAŞINA DE RECTIFICAT RI—80

Modelele experimentale realizate (ARI — 3 — 30 şi ARI — 30 — 50) (fig. 3 şi 4) au fost concepute astfel încît să acopere un domeniu relativ larg de turaţii de lucru (între 3000 şi 50 000 rot/min), permiţînd realizarea unor viteze de tăiere de circa 45 m/s.

Caracteristicile tehnice ale acestor broşe sînt prezentate în tabela următoare :

Tabela 6

Tip broşă	ARI 3—30	ARI 30—50
Presiunea nominală, kgf/cm^2	6	6
Turaţia de regim, rot/min	3000—30 000	30 000—50 000
Încărcarea radială (max.), kgf	45	16—18
Încărcarea axială (max.), kgf	60	58
Rigiditatea radială a lagărului, kgf/μ	4,5	2,1—2,5
Rigiditatea axială a lagărului, kgf/μ	6	5,8
Debitul de aer, l/min	70—80	50—60

Broşele de rectificat interior au fost experimentate atît în condiţii de laborator, cît şi în condiţii industriale, rezultatele acestor încercări demonstrînd performanţele deosebite ce se pot obţine prin utilizarea lagărelor aerostatice. Astfel, în condiţii normale de lucru, în comparaţie cu broşe clasice pe rulmenţi (GAMFIOR) calităţile suprafeţelor prelucrate se îmbunătăţesc (rugozitatea scade de la 0,45 μ la 0,15 μ şi ondulaţiile

se micșorează de la 1,4 μ la 0,4 μ) (Fig. 13 și 14). Totodată se obține și o productivitate sporită prin reducerea ciclului de lucru cu cca 15—20%. În plus, printr-o reglare corespunzătoare a ciclului de lucru se pot obține suprafețe cu rugozitate de 0,020 μ (piatră cu granulația 80, viteza de

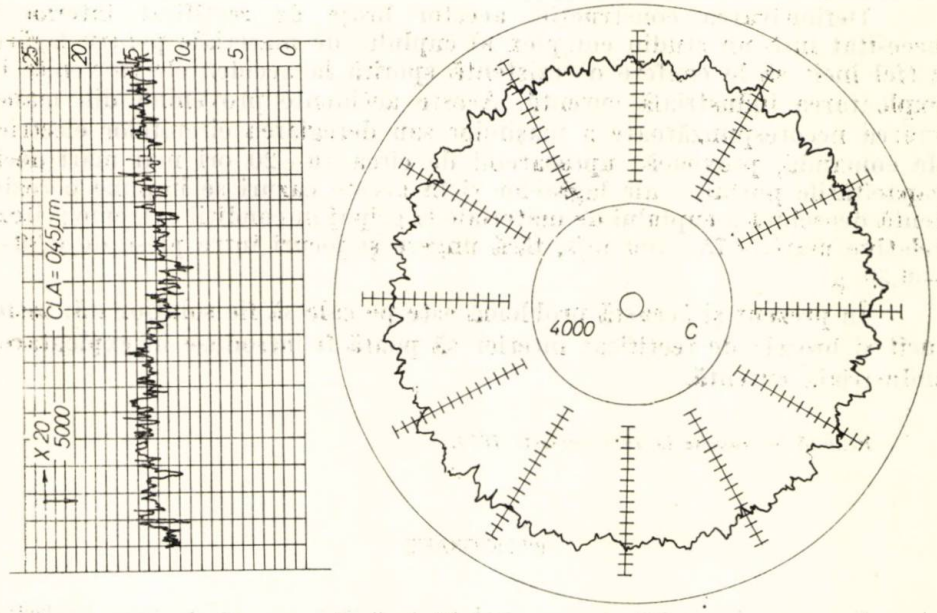


Fig. 13

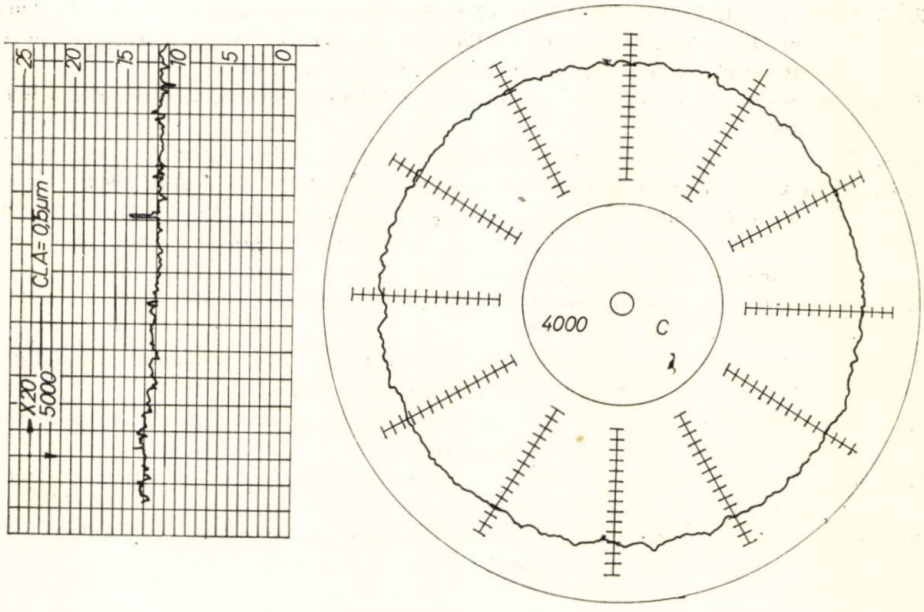


Fig. 14

tăiere 45 m/s, lichid de răcire uzual din industria de rulmenți). Această valoare a rugozității reprezintă limita superioară atinsă în condiții similare de firme cu prestigiu în construcția de mașini de rectificat (VOUMARD, STUDER etc.). De menționat că o broșă clasică cu rulmenți (GAMFIOR) în aceleași condiții nu a realizat decît o rugozitate de 0,09—0,10 μ.

Definitivarea construcției acestor broșe de rectificat interior a necesitat însă un studiu complex al cuplului de materiale pentru lagăre, astfel încît să le confere o rezistență sporită la accidentele survenite în exploatarea industrială curentă. Aceste accidente provenind din manevrarea necorespunzătoare a mașinilor sau dereglarea circuitelor electrice de comandă, provoacă suprasarcini de circa 10—20 ori mai mari decît capacitățile portante ale lagărelor și în aceste cazuri se impune o rezistență deosebită a cuplului de materiale la gripaj în condiții extreme (viteze relative mari — 75—100 m/s, fără ungere și jocuri între piese de 0,20—0,50 μ).

În prezent și această problemă este pe cale să fie soluționată, astfel încît și broșele de rectificat interior să poată fi introduse în exploatarea industrială curentă.

Primită la redacție la 10 Octombrie 1973.

BIBLIOGRAFIE

1. C. T. KEOGH, *Air bearing grinding machines prove their case*, Metalworking Production 53—54, 11.01.1967.
2. C. A. SCOLES, H. L. WUNSCH, *The use of air bearings in grinding machines*, N.E.L. Report nr. 156, 1964, Proceedings of the 5-th International Machine Tool Design and Research Conference, Birmingham University, sept. 64.
3. N. S. GRASSAM, J. W. POWELL, editors, *Gas lubricated bearings*, Butterworth, Londra, 1964.
4. S. GRAY, *Survey of Gas Bearing Applications*, Machine Design, April 25, 1968.
5. V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificația cu gaze*, București, Edit. Academiei, 1963.
6. — *Aplicații industriale ale lagărelor cu aer*, București, Edit. Academiei R.S.R., 1968.
7. — *Studiul posibilităților de aplicare a lubrificației cu gaze la mașinile de rectificat fabricate în țară*, lucrare nepublicată, IMFCA — MICM, 1970.
8. — *Realizarea unui agregat de rectificat plan pe lagăre cu aer*, Memoriu tehnic, IMFCA — UM Cugir, 1970.
9. — *Experimentarea funcționării pe mașina* RPO — 125 *a capului port-piatră pe lagăre cu aer*, Memoriu tehnic, INCREST — UM Cugir, 1971.
10. — *Calcule de dimensionare și optimizare a broșelor aerostatice pentru mașina de rectificat plan* RPO-200, Memoriu tehnic IMFCA — ICPMA, 1971.
11. — *Verificarea funcționării broșelor aerostatice pe mașina* RPO-200, Memoriu tehnic, INCREST — ICPMUA, 1973.
12. — *Calcule de dimensionare a broșelor aerostatice pentru mașina* RPO-320, Memoriu tehnic, INCREST — ICPMUA, 1973.

RECENZII

W. SQUIRE *Integration for engineers and scientists.* (Integrarea pentru ingineri și oameni de știință) Seria „Modern analytic and computațional methods in science and mathematics", Number 21, Elsevier, New York — London — Amsterdam, 1970, VII + 302 pag. 14 fig. 23,10 $.

Destinată să constituie un instrument eficient de lucru pentru studenți, inginerii proiectanți și cercetători, cartea cuprinde o extensivă trecere în revistă a metodelor de evaluare analitică și numerică a integralelor.

Lucrarea, fără să aibă structura unui curs universitar, conține fundamentele acestui capitol important al domeniului metodelor numerice. Cuprinzînd și o serie de cercetări ale autorului în metodele numerice de evaluare a integralelor, cartea oferă ample sugestii pentru dezvoltări viitoare în acest domeniu.

După o definire a cadrului general al lucrării sînt prezentate detaliat metodele analitice de evaluare a integralelor nedefinite și definite, evaluarea numerică a integralelor, cuadratura prin diferențiere și soluționarea ecuațiilor integrale.

Două anexe (nr. 2 și nr. 3) cuprind eficiente programe scrise în limbaj FORTRAN pentru evaluarea numerică a integralelor și soluționarea ecuațiilor integrale.

O particularitate remarcabilă a lucrării o constituie numeroasele exemple ilustrative, de dificultăți diferite, ca și lista lucrărilor de doctorat asupra integrării și ecuațiilor integrale, dată în anexa nr. 1.

Bibliografia foarte bogată este însoțită de note și comentarii deosebit de instructive.

Scrisă în mod clar și concis lucrarea este de un real folos tuturor celor interesați în soluționarea problemelor de evaluare a integralelor și rezolvarea ecuațiilor integrale.

D. Stere

RECENZII

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă,termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

DOINA BRĂDEANU

O METODĂ A MICILOR PERTURBAȚII PENTRU ECUAȚIA STRATULUI-LIMITĂ

Se introduce o metodă a micilor perturbații pentru ecuația lui Mises din teoria stratului-limită incompresibil de fluid vîscos. Se determină transformarea de coordonate și ecuațiile aproximațiilor de ordinele zero și unu. Se analizează problema calculului soluției inițiale, necesară în folosirea metodelor numerice.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 247—265
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

L. BRÎNDEU

STABILITATEA MIȘCĂRILOR PERIODICE ALE SISTEMULUI VIBRO-PERCUTANT CU LIMITATOR ELASTIC, AVÎND UN GRAD DE LIBERTATE

Folosind metoda directă elaborată anterior [1], [2], se studiază stabilitatea mișcărilor periodice ale sistemului vibropercutant cu caracteristica biliniară între ciocniri.
În acest scop se scriu ecuațiile în variații (9) pentru care se determină condițiile inițiale (12), de trecere (17)—(18) și finale (13) din intervalul cuprins între două ciocniri succesive.
După integrarea ecuației în variații, prin aplicarea acestor condiții, rezultă ecuațiile liniarizate în perturbații (21) și apoi ecuația caracteristică din care se obțin condițiile de stabilitate (28).

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 257—266
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CH. VASILIU

INFLUENȚA DINAMICITĂȚII AUTOMOBILULUI ASUPRA PROCESULUI DE DEPĂȘIRE

În analiza proceselor de depășire dintre autovehicule care circulă în același sens, se obișnuiește, mai ales, ca valoarea accelerației să fie considerată fie constantă, fie liniar variabilă, folosindu-se mărimile medii ale acesteia.
Deoarece accelerația dezvoltată de un automobil este, în primul rînd, dependentă de caracteristicile dinamice ale motorului cu care este echipat, rezultă că modelul matematic al procesului de depășire trebuie să țină seama de aceasta.
Analiza teoretică — prin această prismă — a procesului, conduce la obținerea unor relații care dau posibilitatea determinării unor valori pentru spațiul și timpul de depășire mult apropiate de cele reale.

St. cer. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 267—276
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE ALE FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE CU DOUĂ LINII PARALELE DE CILINDRI ȘI DOI ARBORI COTIȚI CARE SE ROTESC ÎN SENSURI CONTRARE

Pentru motoarele cu două linii de cilindri și doi arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare, se stabilește expresia momentului extern rezultant corespunzător momentelor externe produse în fiecare linie de un termen oarecare al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație. Este tratat cazul general în care planele determinate de axele cilindrilor din fiecare linie fac între ele un unghi oarecare.
Se arată că orice moment extern rezultant poate fi echilibrat, prin adoptarea unui decalaj funcțional convenabil între cilindri, în cazul cînd liniile sînt paralele. Pentru motoare cu această dispoziție a liniilor, se determină momentele externe rezultante care se echilibrează simultan, condiția necesară celui mai bun echilibraj al momentelor externe rezultante și posibilitățile de echilibrare a acestor momente oferite de repartiția uniformă a aprinderilor pe întregul motor.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 277—295
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

A. P. STOICESCU

INFLUENȚA DEBLOCĂRII DIFERENȚIALULUI ASUPRA STABILITĂȚII AUTOMOBILULUI CU DIFERENȚIAL AUTOBLOCABIL

În lucrare se studiază stabilitatea mișcării rectilinii a automobilului cu diferențial autoblocabil în cazul cînd diferențialul se deblochează. Se arată că, pentru viteze mai mici decît viteza critică corespunzătoare automobilului cu diferențial normal, mișcarea rectilinie a aceluiași automobil, dar cu diferențial autoblocabil care funcționează este stabilă. În schimb, pentru viteze mai mari decît viteza critică menționată, mișcarea automobilului al cărui diferențial autoblocabil funcționează ar putea deveni instabilă.
Se mai arată că la automobilele cu diferențial normal funcționarea acestuia n-are nici o influență asupra vitezei critice.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 297—315
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M. BUCULEI

ASUPRA TERMOELASTODINAMICII SOLIDULUI CU MASĂ VARIABILĂ

În lucrare se indică modul de soluționare a problemelor de bază ale termoelastodinamicii solidului elastic cu masă variabilă, variația masei făcîndu-se prin captarea sau disipația particulelor pe suprafața limitrofă. Se stabilește o ecuație pentru variația temperaturii datorită variației masei. Ținînd cont de legea Fourier pentru conductibilitatea termică, se determină ecuația de propagare a căldurii în solid luînd în considerație și influența variației masei. În final se prezintă o aplicație de principiu pentru cazul unei bare cilindrice de lungime finită, pe a cărei suprafață laterală are loc o disipație sau captare de masă.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 317—324
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

R. C. BOGDAN, N. MANAFI

ANALIZA CINEMATICĂ ȘI CINETOSTATICĂ A UNEI UNITĂȚI DE POMPAJ DIN INDUSTRIA PETROLIERĂ CU AJUTORUL CALCULATORULUI ELECTRONIC

Se prezintă o metodă analitică pentru determinarea la unitățile de pompaj atît a parametrilor cinematici (traiectorii, viteze, accelerații), cît și a reacțiunilor în lagărele acestora. Algoritmele prezentate tabelar și programabile pe calculatorul electronic sînt obținute în baza unor metode originale introduse de autori în analiza cinematică și cinetostatică a mecanismelor plane, respectiv metoda analizei armonice complexe și metoda vectorilor complecși. Metoda este exemplificată pentru unitatea de pompaj de fabricație românească UP-7,7—1625—1845, prezentîndu-se rezultatele obținute la calculatorul electronic.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 325—349
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CHR. PELECUDI, D. IONESCU, ADRIANA MARINESCU

ANALIZA ȘI SINTEZA STRUCTURAL GEOMETRICĂ A MECANISMELOR 3C

Se dezvoltă posibilitățile de realizare ale mecanismelor cu trei cuple cilindrice și a derivatelor acestora, elicoidale, de rotație sau translație, pe baza analizei deplasărilor și vitezelor. Se începe cu prezentarea unor proprietăți ale ecuațiilor mecanismelor spațiale și cercetînd valorile posibile ale parametrilor cinematici și geometrici se deduc condițiile de existență ale diverselor mecanisme de familii diferite.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 351—364
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M. BUCULEI, SEVASTULA MIȚIS, I. POPESCU

CONTRIBUȚII LA STUDIUL VIBRAȚIILOR MECANISMELOR PLANE DIN FAMILIA A TREIA

Lucrarea are drept scop determinarea ecuațiilor vibrațiilor transversale pentru principalele tipuri de rezemare ale elementelor sub formă de bară care intervin în construcția mecanismelor plane din familia a treia. Se consideră cazul barelor sprijinite pe trei reazeme, dintre care unul sau două reazeme sînt mobile. Se indică o metodă de calcul a mecanismelor la vibrații folosind calculatorul electronic.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 365—378
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

C. STĂNESCU, V. VISARION

STĂRI DE TENSIUNE ÎN TEORIA PLĂCILOR CURBE DE MICĂ CURBURĂ. II

În partea a doua a lucrării sînt analizate stările de tensiune care au un indice de variație nenul. După cum s-a menționat anterior ele sînt generate de anumite alterații în lungul unor curbe situate pe suprafața mediană, cum ar fi, de exemplu, porțiuni din frontiera plăcii curbe sau linii de discontinuitate ale sarcinilor aplicate pe placă

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 379—402
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. COȘEREANU, I. DEUTSCH, T. NEAMȚU, FL. SPERCHEZ

CERCETĂRI ASUPRA REZISTENȚEI ARBORELUI COTIT, STATIC NEDETERMINAT, CU LUAREA ÎN CONSIDERARE A JOCURILOR ÎN LAGĂRE

Lucrarea scoate în evidență influența jocurilor din lagăre asupra rezistenței arborelui cotit, static nedeterminat. Se prezintă o metodică de calcul ce are în vedere posibilitatea existenței jocurilor în diverse lagăre. Se deduc relațiile dintre coeficienții de influență din metoda eforturilor pentru cazul schimbării sistemului de bază. Calculul este condus cu referire și la un caz concret, din care rezultă că apariția jocurilor cauzează o micșorare importantă a coeficientului de siguranță la solicitări variabile, ceea ce poate conduce la ruperea arborelui cotit.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 403—413
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. POSEA

O METODĂ DE RECURENȚĂ PENTRU CALCULUL STABILITĂȚII CADRELOR ETAJATE

Din studiul în teoria de ordinul II a unei bare încovoiate și comprimate ce stabilesc relații de recurență pentru deplasările și eforturile unei secțiuni în funcție de deplasările și eforturile unei secțiuni precedente.
Folosirea succesivă a acestora permite determinarea deplasărilor și eforturilor de la unul din capetele barei în funcție de deplasările și eforturile capătului opus, sub aceeași formă, indiferent de tipul încărcărilor exterioare.
Relațiile stabilite sub formă matriceală au fost sistematizate într-un algoritm, ușor de transpus într-un program pentru un calculator automat atît pentru calculul de ordinul II, cît și pentru determinarea sarcinilor critice.
Procedeul general de calcul propus a fost concretizat pentru calculul cadrelor etajate cu o deschidere atît simetrice, cît și nesimetrice, care, de altfel, au o mare aplicabilitate în practică.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 415—429
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. SILION

CALCULUL DISTANȚEI OPTIME PENTRU STABILIZATORII MULTIPLI CU JOC REDUS FOLOSIȚI ÎN FORAJUL SONDELOR

În lucrare s-a stabilit o metodă de calcul ce permite determinarea directă a distanței h de la sapă la stabilizatorul superior, prin rezolvarea unei ecuații de gradul 5.
Într-o variantă simplificată această distanță se calculează cu o aproximație suficientă prin rezolvarea unei ecuații de gradul 2. Această soluție poate fi utilizată și pentru determinarea factorului de corecție, necesar unei soluții cît mai exacte a ecuației de gradul 5. În plus, lucrarea permite determinarea aproximativă a acestei distanțe, prin folosirea tabelelor.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 431—464
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

FL. DIMOFTE, ERMINA RĂDULESCU

PROGRESE ÎNREGISTRATE ÎN DOMENIUL MAȘINILOR DE RECTIFICAT CU PERFORMANȚE SUPERIOARE PRIN UTILIZAREA BROȘELOR LUBRIFICATE CU AER

Domeniul mașinilor unelte reprezintă unul dintre cele mai caracteristice cîmpuri de utilizare în care introducerea lagărelor cu aer poate conduce la creșterea performanțelor și a preciziei de lucru a mașinilor, a productivității muncii, la mărirea durabilității mașinilor etc.
Lucrarea prezintă realizările obținute în țară în această direcție, punînd în evidență particularitățile, caracteristicile și performanțele broșelor pe lagăre aerostatice.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 2, 1974, p. 465—476
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

VALENTIN I. VLAD, **Holografie**, 1973, 234 p., 15,50 lei.
D. D. SANDU, **Electronica fizică**, 1973, 516 p., 31 lei.
M. M. NIȚĂ, **Teoria zborului spațial**, 1973, 502 p., 30 lei.
MARIUS PROTOPOPESCU, **Teoria electronică a metalelor**, 1973, 366 p., 23 lei.
VLAD IONESCU, **Sisteme liniare**, 1973, 228 p., 10 lei.
V. I. NITU, **Fiabilitatea instalațiilor energetice**, 1973, 362 p., 28 lei.
BAZIL POPA, VIRGINIA ISCRULESCU, **Procese de ardere în cîmp sonor**, 1973, 265 p., 17 lei.
N. DĂNILĂ, **Centrale nucleare-electrice**, 1973, 775 p., 52 lei.
G. MOISIL, **Controlul electric al coroziunii rețelelor subterane**, 1973, 240 p., 9,75 lei.
NICOLAU EDMOND, **Radiația electromagnetică**, 1973, 231 p., 10,50 lei.
M. MIȘICU, **Încovoiere și torsiune**, 1973, 380 p., 20 lei.
ADRIANA NĂSTASE, **Utilizarea calculatoarelor în optimizarea formelor aerodinamice**, 1973, 282 p., 21,50 lei.
I. S. GHEORGHIU, AL. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. III. Mașini asincrone, 1971, 534 p., 33 lei.
B. POPA, V. CASIAN, **Teoria și calculul injectoarelor mecanice cu cameră de turbionare**, 1971, 311 p., 21 lei.
DAN PAVELESCU, **Concepții noi, calcul și aplicații în frecarea și uzarea solidelor deformabile**, 1971, 330 p., 26 lei.
N. REUS, **Tratarea simbolică a schemelor de comutație**, 1971, 270 p., 11 lei.
I. S. GHEORGHIU, ALEXANDRU S. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. IV, **mașini sincrone**, 1972, 482 p., 30 lei.
P. P. TEODORESCU, **Dinamica corpurilor liniar elastice**, 1972, 392 p., 24,50 lei.
M. MIȘICU, **Teoria mobilității elastice**, 1972, 128 p., 23,50 lei.
EDMOND NICOLAU, **Cîmpuri și unde electromagnetice**, 1972, 350 p., 21,50 lei.
C. A. VASILESCU, S. FAUR, V. PIMSNER, GH. RĂDULESCU, **Corelațiile dintre combustibilul lichid și motorul cu ardere internă**, 1972, 336 p., 23,50 lei.
CRISTIAN PELECUDI, **Teoria mecanismelor spațiale**, 1972, 512 p., 30 lei.
I. A. ADĂMUȚ, **Analiza propagării undelor electromagnetice pe linii în regim tranzitoriu**, 1972, 374 p., 25 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 2, P. 245–478, BUCUREȘTI, 1974

I. P. Informația c. 3628

43 832

Lei 40.—

F2557

3
TOMUL 33
1974

1975 FEB 26

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil,*
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct,*
Acad. I. ANTON,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. CR. MATEESCU,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. RADU VOINEA,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție.*

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuța poștală 2001, București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, București.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 33, nr. 3 1974

SUMAR

STUDII Pag

GR. IOACHIM, C. GH. POPA, Dezlocuirea ţiţeiului din medii permeabile de către apa tratată cu polimeri 481

F. MUNTEANU, Calculul curgerii amestecurilor gazoase combustibile prin frontul de flacără cu considerarea variaţiei căldurilor specifice 491

D. MILCOVEANU, Contribuţii la studiul viscozităţii fluidelor 503

V. DIACONIŢA, Asupra stării de deformare plastică plană pentru corpuri ortotrope 517

GH. MIHĂIŢĂ, Stabilitatea dinamică spaţială a barelor cu pereţi subţiri de secţiuni deschise, solicitate prin forţe axiale periodice urmăritoare 533

I. PĂSTRAV, Analogia electro-optică ca metodă auxiliară în fotoelasticimetrie. . . 563

G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU, Echilibrajul momentelor externe ale forţelor de inerţie la motoarele cu două linii opuse de cilindri şi doi arbori cotiţi care se rotesc în sensuri contrare. 569

CH. VASILIU, E. NEGRUŞ, Interacţiunea dintre pneu şi cale la solicitări laterale ale roţii 585

I. GHEGHEA, Pulsaţia debitului la pompele cu mai multe roţi dinţate 603

M. MINCĂ, Studiul interstiţiului sculă-piesă în funcţie de parametrii hidrodinamici ai electroliţilor sub presiune şi stratul-limită de electrolit necesar prelucrării electrochimice a materialelor metalice 611

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE 629

RECENZII 633

DEZLOCUIREA ȚIȚEIULUI DIN MEDII PERMEABILE DE CĂTRE APA TRATATĂ CU POLIMERI

de GR. IOACHIM și C. GH. POPA
I.P.G.G.

Lucrarea prezintă un model matematic pentru descrierea procesului de dezlocuire liniară a țițeiului din medii permeabile de către o soluție cu viscozitate mărită pe bază de polimeri.
Modelul ia în considerare faptul că apa cu viscozitate mărită pe bază de polimeri, dezlocuiește pe lîngă țiței și apa interstițială parțial sau în totalitate. Se formează astfel, în fața frontului de dezlocuire un banc de apă interstițială a cărei evoluție poate fi urmărită de-a lungul întregului proces de dezlocuire.
Modelul mai ia în considerare existența unor saturații variabile în spatele frontului de dezlocuire ca și variația concentrației de polimeri în soluția injectată datorită adsorbției, permițînd astfel o evaluare a mărimii optime a dopului injectat, astfel încît să se asigure o dezlocuire eficientă.
Modelul poate fi ușor generalizat pentru dezlocuirea în lungul unui tub de curent de secțiune variabilă, fapt care permite aplicarea teoriei tuburilor de curent constante și deci permite luarea în considerare a influenței amplasării sondelor asupra avansării frontului de dezlocuire.

În scopul asigurării surselor de energie, mărirea factorului final de recuperare a țițeiului din zăcăminte vechi și noi este considerată ca o problemă prioritară pentru toate institutele de cercetări științifice din lume, fie că țările respective au sau nu o industrie petrolieră dezvoltată. Datorită unor fenomene molecular superficiale care au loc între fazele fluidelor (țiței, apă, gaze) care curg prin mediul permeabil al rocilor colectoare și componenții minerali ai acestor roci, precum și altor cauze, numai o parte din țițeiul care saturează rocile colectoare poate fi extras. Factorul final de recuperare, care reprezintă raportul dintre volumul cumulativ total de țiței extras din zăcămînt pînă la limita economică și volumul inițial conținut în același zăcămînt (ambele exprimate în condiții de suprafață) în stadiul actual de exploatare a zăcămintelor, are o valoare medie în jurul cifrei de 30—32%.

Pentru creșterea acestui factor, în ultimii ani s-a trecut la aplicarea pe scară industrială a unor procedee noi [17] care s-au dovedit eficiente în urma unor cercetări îndelungate de laborator sau în urma experimentelor de șantier. Între acestea se numără și injecția de apă tratată cu polimeri, fluid care se caracterizează printr-o viscozitate mărită. Prin

injecția acestui fluid în stratul de țiței se obține o îmbunătățire a raportului mobilităților fluid dezlocuitor-fluid dezlocuit, ceea ce presupune o creștere a eficienței dezlocuirii la scară microscopică. În această idee, experimentele efectuate atît în laborator [1]—[4], [7], [10], [12]—[14], [16], cît și în șantier [1], [15], [17], [18], au scos în evidență rezultatele deosebite care se pot obține prin aplicarea acestei metode. În S.U.A. s-a trecut deja la extinderea aplicării la scară semiindustrială a metodei de injecție de apă cu viscozitate mărită pe bază de polimeri.

Astfel [17] în S.U.A. între anii 1964—1969 au fost inițiate 61 experiențe de șantier obținîndu-se în majoritatea cazurilor creșteri ale rezervelor recuperabile cu 5—7% față de cazul aplicării unei injecții convenționale de apă.

În U.R.S.S. [18], într-un sector al zăcămîntului Arlansk, s-a mărit factorul final de recuperare cu 6% față de valoarea maximă calculată pentru rezervele industriale.

Avînd în vedere perspectivele de extindere a aplicării acestei metode în viitor, în literatura de specialitate s-au redat cîteva modele matematice care încearcă o descriere a fenomenului dezlocuirii [4], [9], [11]. La noi în țară cercetările sînt în fază de experiment pe șantier [20], fapt care presupune necesitatea unor metode de proiectare a exploatării pe baza rezultatelor obținute prin utilizarea unor metode adecvate. Lucrarea de față vine tocmai în această idee să propună un model de dezlocuire care să dea rezultate cît mai apropiate de realitate.

1. DESCRIEREA FENOMENULUI DE DEZLOCUIRE

În cazul injectării apei convenționale în zăcămînt, problema principală care se pune este îmbunătățirea eficienței atît microscopice, cît și macroscopice a procesului de dezlocuire. Unul dintre cei mai importanți factori care intervin în această dezlocuire este [19] raportul mobilităților fluidului dezlocuitor și a celui dezlocuit. Dacă acest raport este supraunitar, dezlocuirea apare de slabă eficiență, în principal datorită unui factor de spălare mic (saturația la frontul de dezlocuire fiind mică) și datorită unei eficiențe macroscopice scăzute ca urmare a formării digitațiilor de fluid dezlocuitor în interiorul celui dezlocuit, rezultate din neomogenitățile locale ale mediului permeabil. Acest din urmă fapt conduce la obținerea unui factor de inundare scăzut prin ocolirea de către fluidul dezlocuitor a unor zone cu rezistență mai mare la curgere. În scopul îmbunătățirii acestui raport al mobilităților, înaintea injecției de apă convențională se injectează un dop format dintr-o soluție pe bază de polimeri, substanțe de greutate moleculară ridicată care au proprietatea de a fi solubile în apă, conducînd la creșterea viscozității acesteia. De fapt soluția cu polimeri (de tipul poliacrilamidei parțial hidrolizate) nu se caracterizează numai printr-o viscozitate mărită, proprietățile acesteia fiind mult mai complexe. Astfel, conform unor rezultate publicate de Brown [5] și de Mungan [2] în fața frontului de dezlocuire a soluției cu polimeri se formează un banc de apă datorat în esență dezlocuirii apei interstițiale.

Rezultate ale cercetărilor asupra comportării în mediul poros ale soluțiilor cu polimeri sînt date în [2], [7], [12], [13], [16]. De aici rezultă că viscozitatea apei este funcție de concentrația de polimeri și de natura polimerului folosit. Modificarea proprietăților reologice ale fluidului dezlocuitor a condus la ideea că în mediul poros curgerea soluției cu polimeri poate fi de tip ne-newtonian, în acest sens propunîndu-se un model adecvat de dezlocuire [8]. De fapt în toate modelele de dezlocuire propuse, în centrul problemei stă comportarea dopului cu polimeri în procesul de dezlocuire [4], [9], [10], [11]. Aceasta pentru că polimerul fiind o substanță macromoleculară, pe măsura desfășurării procesului de dezlocuire, concentrația în polimeri a dopului în special în fața frontului de dezlocuire scade, variația de concentrație în polimeri datorîndu-se în special adsorbției pe suprafața mineralelor componente ale mediului poros.

Cantitatea de polimeri adsorbită depinde de mai mulți factori, cei mai importanți fiind natura polimerului și a rocii, distribuția porilor pe dimensiuni, natura suprafeței porilor. În acest sens în [10] se arată că o parte din mediul poros rămîne neinundat de soluția cu polimeri, tocmai datorită blocării porilor de mici dimensiuni cu macromolecule de polimeri. Pe baza acestei interpretări, plecînd de la ideea că apa interstițială se găsește tocmai în porii de mici dimensiuni, se susține că dopul cu polimeri nu dezlocuiește în totalitate apa interstițială. În acest fel se dă explicație faptului că unele experimente de injecție de apă cu polimeri au arătat lipsa unei dezlocuiri a apei interstițiale din mediul poros parțial sau în totalitate [4], [15].

Față de cele expuse mai sus se poate afirma că deși rezultatele obținute pînă în prezent prin aplicarea acestei metode de îmbunătățire a factorului final de recuperare sînt bune și cu toate că, după cum se specifică în introducere, s-a trecut deja pe plan mondial la aplicarea acesteia pe scară semiindustrială, cercetările asupra lămuririi fenomenului de dezlocuire a țițeiului de către apa cu polimeri se află totuși în plină desfășurare; aceasta pentru că pe lîngă toate problemele rămase nerezolvate din cazul dezlocuirii țițeiului de către apa convențională injectată în zăcămînt (cum este de exemplu influența sondelor asupra avansării frontului de dezlocuire) mai apar o serie de probleme noi datorate necesităților de descriere în decursul procesului de dezlocuire a comportării dopului de soluție cu polimeri cu viscozitate mărită, injectat în mediul poros. Astfel, deși metoda de injecție în mediul poros a soluțiilor cu polimeri a trecut stadiul experiențelor de laborator, rezultatele practice confirmînd valabilitatea metodei, au apărut o serie de probleme care impun o intensificare în continuare atît a cercetărilor de laborator, cît și a celor teoretice.

Pe linia dezvoltării aplicării practice a metodei de mărire a factorului final de recuperare prin injecție de polimeri, se impune necesitatea elaborării unor metode care să descrie cît mai aproape de realitate comportarea acestui sistem. În acest sens în continuare se redă un model care ia în considerare evoluția principalilor factori care intervin în procesul de dezlocuire, cum sînt variația concentrației dopului injectat de soluție cu polimeri și dezlocuirea apei interstițiale, parțial sau în totalitate.

2. DEZLOCUIREA LINIARĂ

Modelul elaborat are la bază teoria de dezlocuire a lui Buckley şi Leverett [6] sub forma propusă de Welge [21]. Se consideră astfel că dezlocuirea are loc cu formarea unei zone de amestec apă-ţiţei în spatele frontului de dezlocuire (fig. 1). Fie S_{pf} saturaţia la frontul de dezlocuire

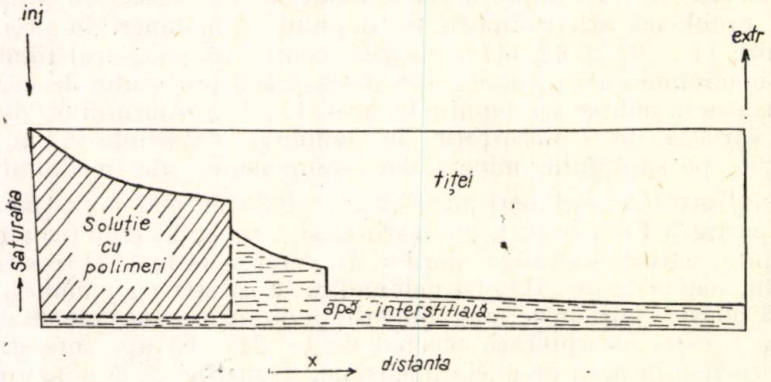


Fig. 1

al soluţiei cu polimeri, iar $\bar{S}_p$, saturaţia medie în spatele frontului de dezlocuire cu polimeri, valori deduse, conform teoriei lui Welge [21], din variaţia cu saturaţia a fracţiei de soluţie cu polimeri f_p în curent (fig. 2). Această variaţie s-a dedus presupunînd cunoscute permeabilităţile relative pentru curgerea bifazică soluţie de polimeri-ţiţei, precum şi viscozităţile soluţiei cu polimeri şi ţiţeiului.

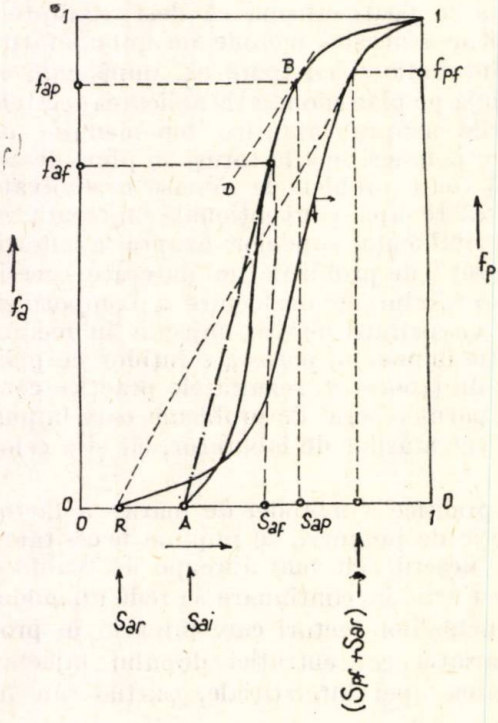


Fig. 2

Avem deci :

$$\bar{S}_p = S_{pf} + \frac{1 - f_{pf}}{\left(\frac{df_p}{dS_p}\right)_f}, \qquad (1)$$

unde

f_{pf} este fracţia de soluţie cu polimeri în curent corespunzător lui S_{pf},

df_p/ds_p — derivata acestei fracţii în raport cu saturaţia corespunzătoare aceleiaşi valori, S_{pf}.

Dacă S_{ai} este valoarea saturaţiei în apă interstiţială, iar S_{ar}

este saturație în apă interstițială nedezlocuită de soluția cu polimeri, rezultă că în fața dopului de soluție cu polimeri se formează un banc de apă care dezlocuind țițeiul se comportă conform aceleiași teorii [6], [21] (fig. 3). Saturația la frontul de dezlocuire al bancului de apă interstițială este

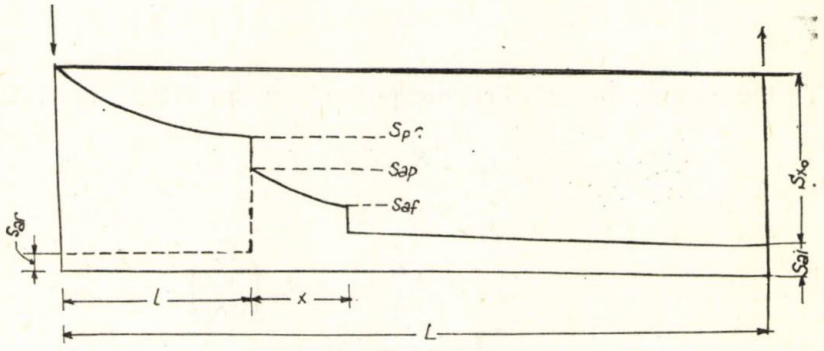


Fig. 3

S_{af}. Saturația de apă S_{ap}, la zona de contact cu dopul de polimeri nu este cunoscută. Această valoare se poate afla totuși punînd condiția de egalitate, conform teoriei Buckley-Leverett, între viteza de deplasare a frontului de dezlocuire a soluției cu polimeri și viteza de deplasare a părții posterioare a bancului de apă interstițială. În acest caz condiția se reduce la egalitatea

$$\left(\frac{\mathrm{d}f_p}{\mathrm{d}S_p}\right)_f = \frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}S_a}. \tag{2}$$

Rezultă că S_{ap} este dat de punctul în care panta curbei f_a este egală cu panta corespunzătoare punctului de saturație la front de pe curba f_p.

Odată determinat S_{ap} se poate calcula saturația medie în apă corespunzătoare bancului de apă interstițială [21]:

$$\bar{S}_a = \frac{\int S.\mathrm{d}x}{\int \mathrm{d}x}, \tag{3}$$

dar din [6] rezultă că x este proporțional cu $\mathrm{d}f_a/\mathrm{d}S_a = f'$ la debit de injecție constant.

Deci

$$\bar{S}_a = \frac{\int_1^2 S.\mathrm{d}f'}{\int_1^2 \mathrm{d}f'} \tag{4}$$

sau

$$\bar{S}_a = \frac{S.f' \Big|_1^2 - \int_1^2 f' . \mathrm{d}}{\int_1^2 \mathrm{d}f'} . \tag{5}$$

Ţinînd seama de valorile corespunzătoare limitelor (fig. 3),

$$\bar{S}_a = \frac{S_{ap} . f'_{ap} - S_{af} . f'_{af} - f_{ap} + f_{af}}{f'_{ap} - f'_{af}} \tag{6}$$

sau

$$\bar{S}_a = \frac{f_{ap} - f_{af} + S_{af} \left(\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}S_a} \right)_f - S_{ap} \left(\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}S_a} \right)_p}{\left(\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}S_a} \right)_f - \left(\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}S_a} \right)_p} . \tag{7}$$

Lungimea bancului de apă interstiţială se află scriind ecuaţia de bilanţ :

$$l.(S_{ai} - S_{ar}) = x.(\bar{S}_a - S_{ai}),$$

deci :

$$x = l. \frac{S_{ai} - S_{ar}}{\bar{S}_a - S_{ai}} , \tag{8}$$

unde l este poziţia frontului polimer—(apă+ţiţei) la un moment dat care se determină conform teoriei de dezlocuire a lui Buckley—Leverett [6] din ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{q_{\mathrm{inj}}}{F.m} . \frac{\mathrm{d}f_p}{\mathrm{d}S_p} ,$$

unde

q_{inj} este debitul de injecţie,
F — secţiunea,
m — porozitatea efectivă.

Neglijînd dispersia dar luînd în considerare adsorbţia, variaţia concentraţiei c în polimeri pentru zona dopului de soluţie injectat este dată de ecuaţia

$$- \frac{q_{\mathrm{inj}}}{F \cdot m} \frac{\partial (f_p \cdot c)}{\partial x} = \frac{\partial (S_p \cdot c)}{\partial t} + \frac{\partial c_a}{\partial t} ,$$

în care

S_p este saturaţia în soluţie cu polimeri,
f_p — fracţia de soluţie cu polimeri în curent,
c_a —concentraţia de polimeri adsorbit.

Ținînd seama de teoria lui Buckley—Leverett avem :

$$-\frac{q_{inj}}{F.m}\cdot\frac{\partial f_p}{\partial x}=\frac{\partial S_p}{\partial t} \tag{11}$$

și astfel ecuația de mai sus devine :

$$-\frac{q_{inj}}{F\cdot m}\cdot f_p\frac{\partial c}{\partial x}=S_p\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c_a}{\partial t}, \tag{12}$$

în care atît f_p, cît și S_p sînt funcții de x și t. Ecuația devine ușor rezolvabilă prin diferențe finite pentru un caz concret de dezlocuire. Se obține astfel variația concentrației în polimeri, în zona dopului injectat.

În afara zonei dopului de soluție cu polimeri, mai trebuie studiată variația concentrației la limita din față și din spatele acestui dop. Aceasta deoarece după injecția dopului de soluție cu polimeri se procedează la o injecție de apă convențională, iar în fața dopului se formează un banc de apă interstițială dezlocuită de acest dop. Efectul de variație a concentrației la ambele limite este datorat cu preponderență dispersiei.

Modificări de esență se produc însă numai la limita anterioară a dopului, la contactul cu bancul de apă interstițială dezlocuită. Astfel, dată fiind uniformizarea concentrației de polimeri, la această limită dispare pragul de saturații (fig. 1 și 3), profilul de saturație arătînd ca în figura 4.

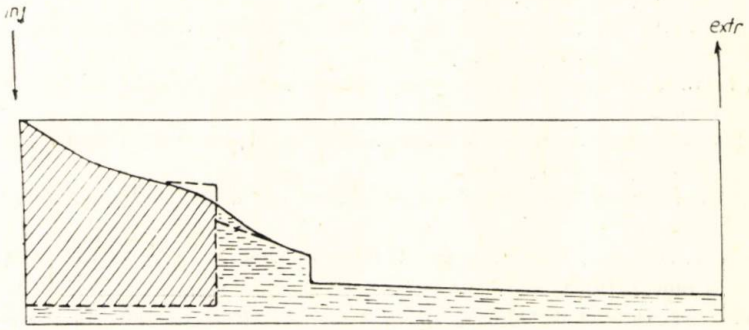


Fig. 4

3. DISCUȚII ȘI CONCLUZII

Mai sus a fost dat un model de dezlocuire a țițeiului dintr-un mediu permeabil de către o soluție cu viscozitatea mărită pe bază de polimeri. Modelul ia în considerare dezlocuirea de către soluția cu polimeri a apei interstițiale parțial sau în totalitate. Se creează totodată posibilitatea urmăririi variației de concentrație în polimeri a soluției injectate datorită adsorbției. Modelul se bazează pe teoria de dezlocuire a lui Buckley și Leverett, ceea ce a permis luarea în considerare a existenței unor satu-

rații variabile atît în zona dopului de polimeri, cît și în zona bancului de apă interstițială.

Prin luarea în considerare a adsorbției de polimeri și a saturației variabile în soluție în zona dopului cu polimeri, modelul permite o evaluare a lungimii optime a dopului injectat astfel încît să se asigure o dezlocuire eficientă. Dealtfel trebuie spus că modelul poate fi ușor generalizat la dezlocuirea în lungul unui tub de curent de secțiune variabilă, fapt care permite aplicarea cu succes în acest caz a teoriei tuburilor de curent constante propusă de Efros [22] și Higgins—Leighton [23] și deci luarea în considerare a influenței amplasării sondelor asupra avansării frontului de dezlocuire.

Modelul a mai scos în evidență faptul că la limita de separație dop de soluție cu polimeri-banc de apă interstițială, pragul de saturație dispare, fapt care explică unele păreri contradictorii din literatura de specialitate cu privire la mărimea bancului de apă interstițială.

Primită la redacție la 4 decembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. B. B. Saniford, *Laboratory and Field Studies of Water Floods Using Polymer Solutions to Increase Oil Recoveries*, J.P.T. (Aug. 1964), p. 917.
2. N. Mungan, F. W. Smith, J. L. Thomson, *Some Aspects of Polymer Floods*, J.P.T. (Sept. 1966), p. 1143.
3. D. L. Dauben, D. E. Menzie, *The Flow of Polymer Solutions Through Porous Media*, J.P.T. (Aug. 1967), p. 1065.
4. J. P. Paton, K. H. Coats, G. T. Colegrove, *Prediction of Polymer Flood Performance*, S.P.E.J. (March. 1971), p. 72.
5. W. O. Brown, *Mobility of Conate Water During a Water Flood*, Trans, A.I.M.E. (1957), vol. 210, p. 190.
6. S. E. Buckley, M. C. Leverett, *Mechanism of Fluid Displacement in Sands*, Trans. A.I.M.E. (1942), vol. 146, p. 107.
7. D. J. Pye, *Improved Secondary Recovery by Control of Water Mobility*, J.P.T. (Aug. 1946), p. 911.
8. A. Harvey, Herbert, D. E. Menzie, *Polymer Solution Flow in Porous Media*, S.P.E.J. (June 1970), p. 111.
9. P. L. Bondor, G. J. Hirasaki, M. J. Than, *Mathematical Simulation of Polymer Flooding in Complex Reservoirs*, S.P.E.J. (Oct. 1972), p. 369.
10. Dawson Rapier, Lantz Ronald B., *Inaccesible Pore Volume in Polymer Flooding*, S.P.E.J. (Oct. 1972), p. 448.
11. R. L. Jewett, G.F. Schurz, *Polymer Flooding — A Current Appraisal*, J.P.T. (June, 1970), p. 148.
12. W. Smith, Frank, *The Behavier of Partially Hydrolyzed Polyacrylamide Solutions in Porous Media* (Febr. 1970), p. 148.
13. W. B. Gogarty, *Mobility Control with Polymer Solutions*, S.P.E.J.T. (June, 1967), p. 161.
14. R. R. Jennings, J. H. Rogers, T. J. West, *Factors Influencing Mobility Control by Polymer Solutions*, J.P.T. (March. 1971), p. 391.
15. A. Jones, Merrill, *„Waterflood Mobility Control: A Case History*, J.P.T. (Sept. 1966), p. 1151.

16. N. MUNGAN, *Programmed Mobility Control in Polymer Floods*, Communication nr. A. 1. — Troisième Colloque de l'ARTFP, Juin 1968, Pau, France.
17. SCOTT JOHN, P. S. CRAWFORD, *Oil Recovery in the 1970's Key to Survival*, Petr. Eng., July 1970.
18. L. B. ANDREEV, *Rezultatele injectării experimentale în zăcământ a poliacrilamidei*, Nefteanoe Hoziastvo, *4* (1971).
19. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, București, Edit. Academiei, 1966.
20. ST. IANCULESCU și col., *Cercetarea posibilităților de folosire a poliacrilamidei în experimentele de șantier*, Arhiva ICPTG, Cîmpina, 1968.
21. H. J. WELGE, *A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive*, Trans. A.I.M.E. (1952), vol. 159, p. 91.
22. D. A. EFROS, *Dvijenie vodoneftianoi smesi v sisteme skvajin*, Trudi VNII, vîp. XII, Gostoptehizdat, Moskva, 1958.
23. R. V. HIGGINS, A.J. LEIGHTON, *A Computer Method to Calculate Two-Phase Flow in Any Irregulary Bounded Porous Medium*, J.P.T., June 1962, p. 679.

CALCULUL CURGERII AMESTECURILOR GAZOASE COMBUSTIBILE PRIN FRONTUL DE FLACĂRĂ CU CONSIDERAREA VARIAȚIEI CĂLDURILOR SPECIFICE

de F. MUNTEANU
I.M.F.C.A.

Lucrarea se ocupă de calculul parametrilor gazodinamici ai amestecurilor gazoase combustibile la trecerea printr-un front de flacără, ținînd seama de variațiile cu temperatura ale compoziției și căldurilor specifice ale gazelor arse, printr-o metodă exactă și alta aproximativă.
Pentru exemplificare se indică rezultatele calculelor făcute pentru amestecuri hidrogen-aer.

INTRODUCERE

Tratarea amestecurilor combustibile gazoase ca amestecuri de gaze ideale (avînd căldura specifică constantă atît înainte, cît și după trecerea prin frontul de flacără) a fost adoptată adeseori [1], [2] în scopul deducerii unor relații simple pentru rezolvarea problemelor de combustie. În cadrul aceleiași ipoteze se consideră că degajarea de căldură prin ardere pe unitatea de masă este o constantă caracteristică a amestecului combustibil, funcție de care se puteau calcula alte mărimi interesante. Implicit, prin aceasta se considera compoziția produselor de ardere constantă, neglijîndu-se efectele disocierii și recombinării.

Aceste ipoteze sînt, în oarecare măsură, acceptabile pentru amestecuri cu degajare de căldură prin reacție foarte mică, deci cu o creștere mică a temperaturii în urma combustiei. Pentru amestecurile combustibile cu degajare mare de căldură prin reacție, amestecuri care interesează cel mai mult în practică, relațiile și metodele de calcul deduse în aceste ipoteze devin inaplicabile [3].

Pentru calcule exacte în problemele de combustie e nevoie să se țină seama de faptul că atît compoziția, cît și căldura specifică a produselor de ardere variază cu temperatura și, într-o măsură mai mică, și cu presiunea acestora. Datorită disociației, în produsele de ardere se vor găsi în general un număr de componenți atomici și moleculari în proporții determinate de legile echilibrului chimic. Pentru arderile cu degajare

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 3, 1974, P. 491–502

mare de căldură, la care disocierea produselor de ardere devine importantă, căldura de reacţie la o temperatură oarecare de referinţă nu mai este constantă, depinzînd de temperatura gazelor arse prin intermediul participaţiilor diferiţilor componenţi. În studiul regimurilor de curgeri cu combustie în ipoteza frontului de flacără ca suprafaţă de discontinuitate (a se vedea, de exemplu, lucrările citate mai sus) poate fi necesar să se calculeze o serie de parametri ca : variaţia vitezei la trecerea prin frontul de flacără, variaţia presiunii, deviaţia curentului etc.) pentru o varietate de condiţii iniţiale ale curentului de gaze combustibile. Se poate face calculul exact, folosind valorile întabelate ale entalpiilor, constantelor de echilibru etc., dar volumul calculelor este destul de mare, chiar sub forma unui program de calculator şi este mai greu de reluat pentru fiecare caz ce poate interesa la un moment dat. Mai jos se indică rezultatele unui astfel de program de calcul pentru amestecuri hidrogen-aer în diferite situaţii iniţiale.

Pentru calcule mai rapide se pot folosi unele relaţii analitice relativ simple, deduse în ipotezele expuse la început, dar cu unele corecţii, aşa cum se va arăta în continuare.

Astfel, se pot considera, separat pentru amestecul proaspăt şi pentru produsele de ardere, căldurile specifice constante în intervale restrînse de variaţie în vecinătatea unor temperaturi de referinţă alese convenabil, la care căldurile specifice şi entalpiile sînt cunoscute, de exemplu, prin aplicarea, o singură dată, a metodei de calcul exact.

NOTAŢII :

$i = 1 \ldots N$, indicele fiecărui component chimic implicat în reacţie (N — numărul total de componenţi),

$j = 1, 2$ indice (1 pentru amestecul combustibil neras, 2 pentru gazele de ardere),

T_j este temperatura absolută a amestecului de gaze,

T_0 — temperatura de referinţă pentru amestecul combustibil de gaze,

T^* — temperatura de referinţă pentru gazele de ardere,

$Y_{i,j}$ — participaţia gravimetrică a componentului de indice „i" în amestecul proaspăt ($j = 1$), respectiv în gazele de ardere ($j = 2$),

$Y_{i,0}$ — participaţia în amestecul proaspăt la temperatura T_0,

Y_i^* — participaţia în gazele de ardere la temperatura T^*,

c_{pi} — căldura specifică la presiune constantă a componentului „i",

$h_{i,0}$ — căldura (entalpia) de formare a componentului „i" (raportată la unitatea de masă) la temperatura de referinţă T_0,

h_j — entalpia „sensibilă" pe unitatea de masă de amestec combustibil ($j = 1$), respectiv produse de ardere ($j=2$),

Q — căldura de reacţie pe unitatea de masă de amestec combustibil la temperatura de referinţă T_0,

p_j — presiunea,
ρ_j — densitatea,
a_1 — viteza sunetului în amestecul proaspăt,
u_j — viteza de curgere a gazelor,
m — numărul Mach al flăcării, $m = u_1/a_1$,
γ_j — raportul căldurilor specifice.

CALCULUL PRIN METODA APROXIMATIVĂ

Pentru un curent paralel uniform de gaz combustibil care traversează un front de flacără plan staţionar, ecuaţia de conservare a energiei între amestecul proaspăt şi gazele arse se scrie sub forma :

$$\frac{u_1^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{i,1}\left(h_{i0} + \int_{T_0}^{T_1} c_{pi}\ \mathrm{d}T\right) = \frac{u_2^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} Y_{i,2}\left(h_{i,0} + \int_{T_0}^{T_2} c_{pi}\ \mathrm{d}T\right) \quad (1)$$

sau sub forma echivalentă

$$\frac{u_1^2}{2} + h_1 + Q = \frac{u_2^2}{2} + h_2, \quad (2)$$

unde s-au folosit relaţiile de definiţie cunoscute :

$$Q = \sum_{i=1}^{N} h_{i,0}(Y_{i,1} - Y_{i,2}), \quad (3)$$

$$h_1 = \sum_{i=1}^{N} Y_{i,1} \int_{T_0}^{T_1} c_{pi}\ \mathrm{d}T, \quad (4)$$

$$h_2 = \sum_{i=1}^{N} Y_{i,2} \int_{T_0}^{T_2} c_{pi}\ \mathrm{d}T. \quad (5)$$

Adoptînd temperaturile de referinţă T_0 pentru amestecul proaspăt (pentru simplificare s-a ales chiar temperatura la care se dau entalpiile de formare) şi T^* pentru gazele de ardere, se poate scrie în mod aproximativ :

$$Q \cong h_{i,0}\,(Y_{i,0} - Y_i^*), \quad (6)$$

$$h_1 \cong c_{p0}(T_1 - T_0), \quad (7)$$

unde

$$c_{p0} \cong \left(\sum_{i=1}^{N} c_{pi}\ Y_{i,1}\right)_{T=T_0}, \quad (8)$$

$$h_2 = \sum_{i=1}^{N} Y_{i,2}\left(\int_{T_0}^{T^*} c_{pi}\ \mathrm{d}T + \int_{T^*}^{T_2} c_{pi}\ \mathrm{d}T\right) \cong h^* + c_p^*\,(T_2 - T^*), \quad (9)$$

unde

$$h^* = \sum_{i=1}^{N} Y_i^* \int_{T_0}^{T^*} c_{pi}\, \mathrm{d}T, \tag{10}$$

$$c_p^* = \left(\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}T}\right)_{T=T^*} = \sum_{i=1}^{N}\left[Y_i^*\, c_{pi} + \left(\frac{\mathrm{d}Y_{i,2}}{\mathrm{d}T}\right)_{T=T^*} \cdot \int_{T_0}^{T^*} c_{pi}\, \mathrm{d}T\right]. \tag{11}$$

După cum se poate observa din ultima relație, la calcularea căldurii specifice a amestecului de gaze arse la temperaturi mari trebuie luat în considerație efectul reacțiilor de disociere, al variației cu temperatura a participațiilor diferiților componenți.

Cu aproximațiile acceptate mai sus, ecuația (2) se transformă în :

$$\frac{u_1^2}{2} + c_{p0}\, T_1 + Q' = \frac{u_2^2}{2} + c_p^*\, T_2, \tag{12}$$

unde Q' se calculează cu relația :

$$Q' = Q - c_{p0}\, T_0 + c_p^*\, T^* - h^*. \tag{13}$$

Alegînd drept temperatură de referință T^* temperatura la care entalpia totală (căldura de formare plus entalpia sensibilă) a amestecului de gaze arse este egală cu cea a amestecului proaspăt, expresia (13) se simplifică :

$$Q' = c_p^*\, T^* - c_{p0}\, T_0. \tag{14}$$

Alegerea acestei valori pentru temperatura de referință este justificată prin faptul că reprezintă regimul teoretic de „ardere" izobară, la care viteza normală de propagare a flăcării este nulă (este vorba de fapt de curgerea în paralel a amestecului proaspăt și gazelor de ardere, separate printr-o suprafață de discontinuitate a vitezei).

Se știe că în realitate au loc deflagrațiile slabe, caracterizate prin viteză mică de propagare și scădere slabă a presiunii, adică tocmai regimurile cele mai apropiate de cel amintit mai sus.

Forma (12) a ecuației de conservare a energiei este identică cu cea utilizată în ipoteza căldurilor specifice constante [3], și care, împreună cu ecuațiile de conservare a masei și impulsului, conducea la unele relații utile pentru studiul curgerilor cu combustie.

Astfel, de exemplu, raportul densităților înainte și după flacără este dat de relația :

$$\lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}\left(1 + \frac{1}{\gamma_1 m^2}\right) - \sqrt{\left[\frac{\gamma_2 - \gamma_1 m^2}{\gamma_1 m^2(\gamma_2 + 1)}\right]^2 - \frac{2}{m^2(\gamma_2 + 1)}\left[(\gamma_2 - 1)\frac{Q'}{a_1^2} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)}\right]}. \tag{15}$$

În relația de mai sus, rapoartele căldurilor specifice γ_1 și γ_2 se calculează în mod obișnuit funcție de c_{p0} și c_p^*. Parametrul m — numărul Mach al flăcării — se presupune cunoscut pentru amestecul combustibil folosit, ca o funcție dată de temperatura și, eventual, și de alți parametri ai amestecului.

Valoarea lui m poate varia între zero și o valoare maximă m_c care rezultă din condiția de anulare a cantității de sub radical în expresia (15), anume :

$$m_c^2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 + 1)}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{Q'(\gamma_2^2 - 1)}{a_1^2} - \tag{16}$$

$$- \sqrt{\left[\frac{Q'(\gamma_2^2 - 1)}{a_1^2}\right]^2 - \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2(\gamma_1 - 1)^2} + \frac{2(\gamma_2^2 - 1)(\gamma_2^2 - \gamma_1)Q'}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)a_1^2}}.$$

În același mod se pot calcula și alți parametri ca : raportul presiunilor, deviația curentului la trecerea printr-o undă de combustie oblică etc. [3].

METODA EXACTĂ

Pentru calcule exacte este necesară cunoașterea compozițiilor la echilibru și a entalpiilor produselor de ardere la diferite temperaturi T_2. Notînd cu h_{t1} și h_{t2} entalpiile totale ale amestecului proaspăt și, respectiv, a gazelor arse, ecuația (1) se poate scrie :

$$\frac{u_1^2}{2} + h_{t1} = \frac{u_2^2}{2} + h_{t2}. \tag{17}$$

Adăugînd ecuațiile de conservare a masei și impulsului :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{18}$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \tag{19}$$

și ținînd seama și de ecuațiile de stare :

$$\frac{p_1}{\rho_1} = R_1 T_1, \quad \frac{p_2}{\rho_2} = R_2 T_2, \tag{20}$$

se poate ajunge la următoarea ecuație în ρ_1/ρ_2 :

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{2}{R_1 T_1}(h_{t2} - h_{t1} + R_1 T_1 - R_2 T_2) - \frac{R_2 T_2}{R_1 T_1} = 0, \tag{21}$$

a cărei soluție valabilă în cazul deflagrației slabe este

$$\lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2}\left(Z + \sqrt{Z^2 + 4\frac{R_2 T_2}{R_1 T_1}}\right), \tag{22}$$

unde

$$Z = \frac{R_2 T_2}{R_1 T_1} - 1 + \frac{2\,(h_{t1} - h_{t2})}{R_1 T_1}.$$

Din același sistem de ecuații se mai poate obține următoarea relație :

$$m = \frac{u_1}{a_1} = \sqrt{\frac{2(h_{t1} - h_{t2})}{\gamma_1 R_1 T_1(\lambda^2 - 1)}}. \tag{23}$$

După cum se observă, în relațiile de mai sus intervine parametrul T_2 — temperatura produselor de ardere, atît explicit, cît și implicit, prin intermediul mărimii h_{t2}; pentru fiecare valoare a temperaturii T_2 rezultă un raport al densităților ρ_1/ρ_2 și un număr Mach al flăcării, m, care e necesar pentru ca după flacără să se obțină parametrii T_2, ρ_2, P_2.

Pe lîngă relațiile (22) și (23) se mai pot folosi unele relații care nu sînt afectate de forma ecuației de conservare a energiei. Astfel, raportul presiunilor rămîne [1]

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \gamma_1(\lambda - 1)\, m^2. \tag{24}$$

În cazul undei de combustie oblice singura schimbare care intervine este înlocuirea vitezelor u_1, u_2 cu componentele lor normale la frontul de flacără. În plus, dacă se dă, de exemplu, numărul Mach, M_1, al curentului înaintea flăcării se pot calcula numărul Mach al curentului după flacără M_2 și deviația curentului prin flacără δ_f cu relațiile :

$$M_2^2 = \frac{\gamma_1 R_1 T_1\,[M_1^2 + (\lambda^2 - 1)m^2]}{\gamma_2 R_2 T_2}, \tag{25}$$

$$\operatorname{tg} \delta_f = \frac{m(\lambda - 1)\sqrt{M_1^2 - m^2}}{M_1^2 + (\lambda - 1)m^2}. \tag{26}$$

REZULTATE

Pentru exemplificare se redau mai jos rezultatele calculelor făcute pentru cîteva amestecuri la aceeași temperatură inițială $T_1 = 300°K$: un amestec sărac (5%) de hidrogen în aer, amestecul stoechiometric hidrogen-aer și amestecul stoechiometric hidrogen-oxigen. Folosind valorile întabelate [4] ale entalpiilor totale și ale constantelor de echilibru, s-au determinat compozițiile gazelor de ardere pentru o serie de tempe-

raturi T_2, după care cu relațiile (21), (22), (23) și (24) s-au calculat mărimile λ, m și P_2/P_1. Din condiția $h_{t2} = h_{t1}$ s-a determinat temperatura de referință T^*, calculîndu-se apoi Q', γ_2, cu ajutorul cărora aplicînd formula (15) s-a calculat parametrul λ prin metoda aproximativă (curbele trasate cu linie-punct în fig. 1). Pentru comparație s-a făcut calculul și cu formula

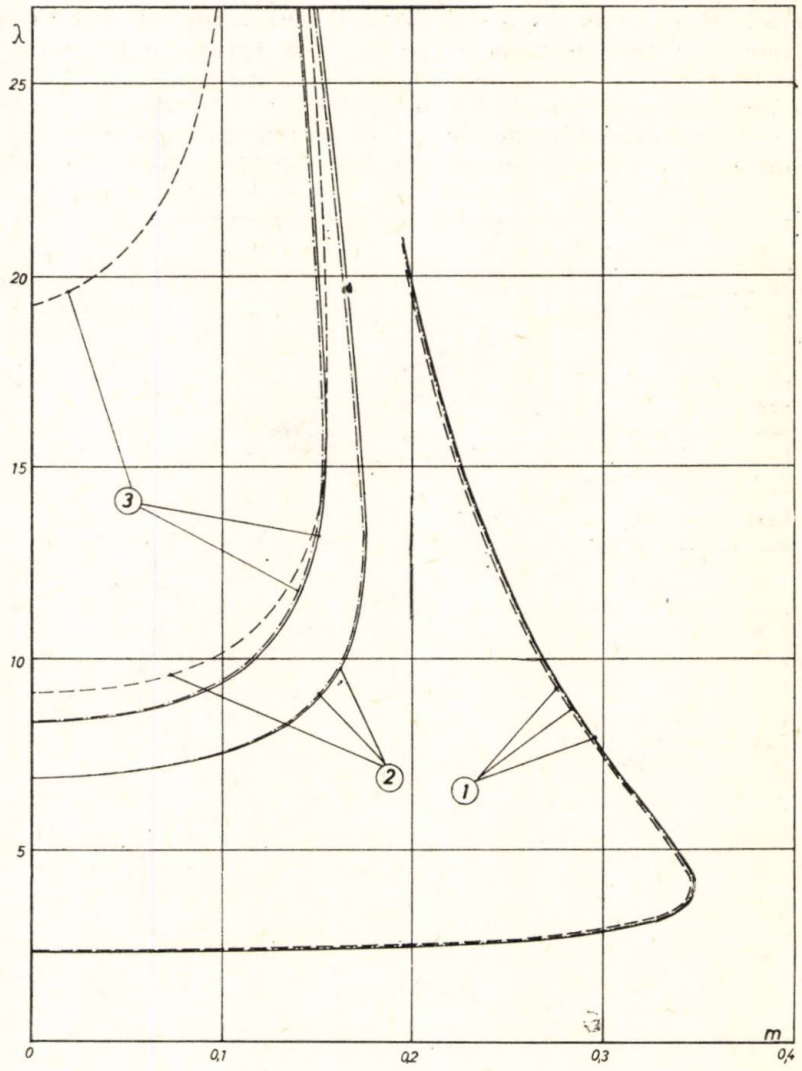


Fig. 1

① Amestec 5% H_2 în aer. ② Amestec stoechiometric H_2 — aer. ③ Amestec stoechiometric $H_2 - O_2$.

corespunzătoare la $\gamma_2 = \gamma_1$ și Q calculat pe baza valorii căldurii de reacție a hidrogenului de 57113 cal/mol, la $T = 0°K$, valoare dată în literatură [5] (curbele trasate cu linie întreruptă în fig. 1).

Se poate observa că pentru amestecul de 5% hidrogen în aer, valorile obținute în ipoteza $\gamma_2 = \gamma_1$ sînt destul de apropiate de cele calculate după relația (15) și de cele calculate prin metoda exactă, în timp ce pentru amestecurile cu degajare mare de căldură prin reacție diferențele față de calculul exact sînt destul de mari pentru valorile obținute în ipoteza $\gamma_2 = \gamma_1$, dar destul de mici pentru cele calculate după relația (15). În acest din urmă caz abaterile sînt apropiate de zero pentru valorile mici ale parametrului m (regimurile apropiate de punctul de referință).

În figura 2 sînt prezentate în funcție de m valorile parametrilor P_2/P_1, λ și T_2 rezultate din calculul exact pentru același amestec stoechiometric hidrogen-aer la temperaturi inițiale diferite — $T_1 = 300°$, $350°$ și

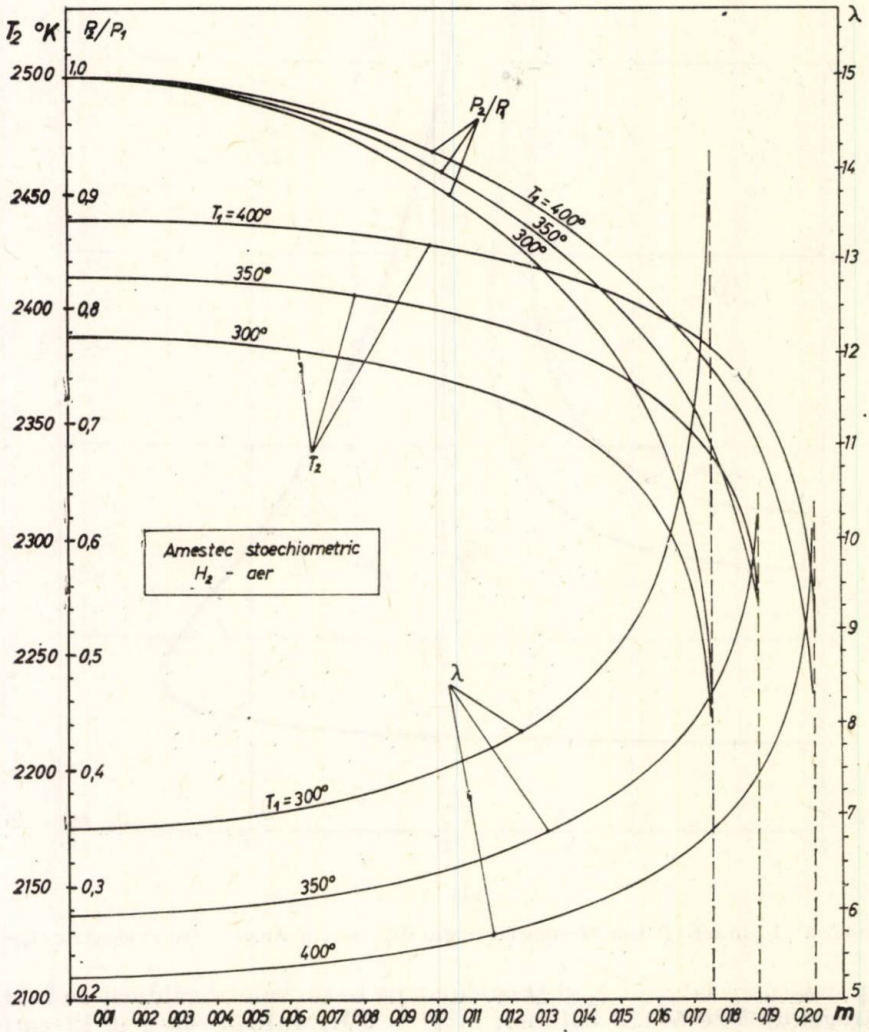
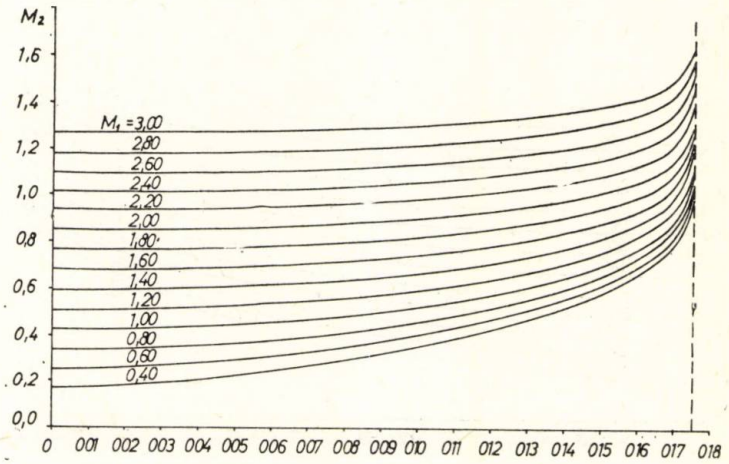


Fig. 2


M₂
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
M₁ = 3,00
2,80
2,60
2,40
2,20
2,00
1,80
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0 001 002 003 004 005 006 007 008 009 010 011 012 013 014 015 016 017 018

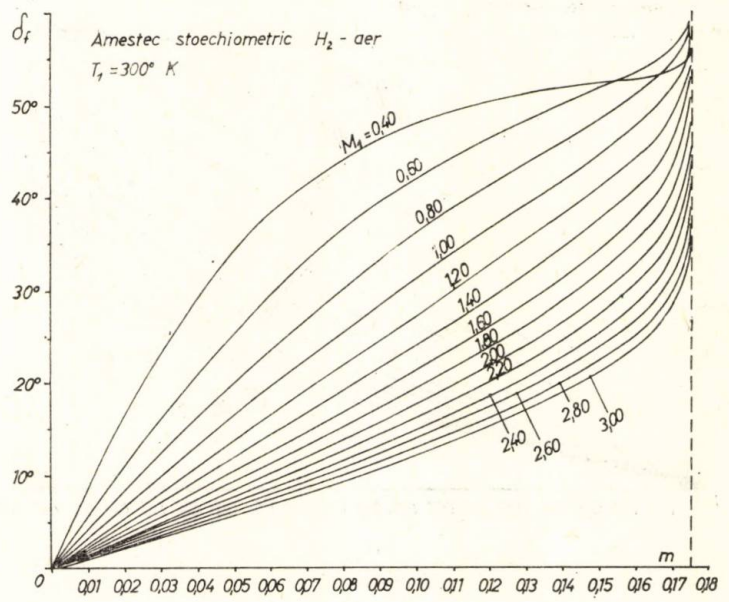
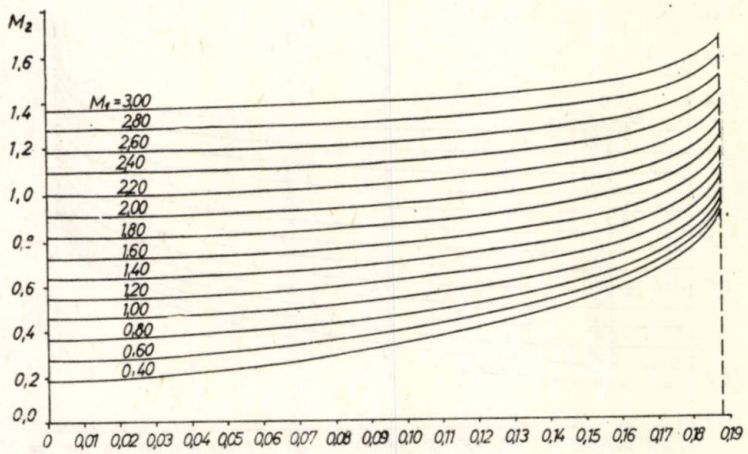

δf
Amestec stoechiometric H₂ - aer
T₁ = 300° K
50°
40°
30°
20°
10°
0
M₁ = 0,40
0,60
0,80
1,00
1,20
1,40
1,60
1,80
2,00
2,20
2,40
2,60
2,80
3,00
m
0,01 0,02 0,03 0,04 0,05 0,06 0,07 0,08 0,09 0,10 0,11 0,12 0,13 0,14 0,15 0,16 0,17 0,18

Fig. 3


M2
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
M1 = 3,00
2,80
2,60
2,40
2,20
2,00
1,80
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0 0,01 0,02 0,03 0,04 0,05 0,06 0,07 0,08 0,09 0,10 0,11 0,12 0,13 0,14 0,15 0,16 0,17 0,18 0,19

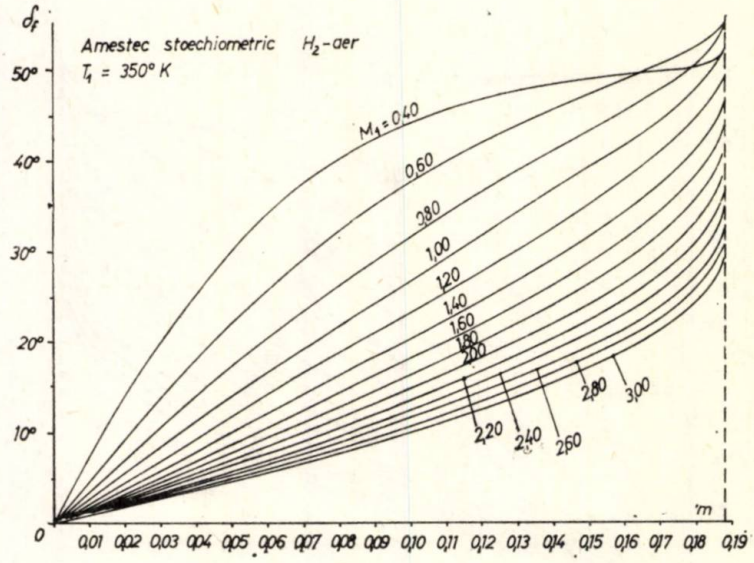

δf
Amestec stoechiometric H2-aer
T1 = 350° K
50°
40°
30°
20°
10°
0
M1 = 0,40
0,60
0,80
1,00
1,20
1,40
1,60
1,80
2,00
2,20
2,40
2,60
2,80
3,00
m
0,01 0,02 0,03 0,04 0,05 0,06 0,07 0,08 0,09 0,10 0,11 0,12 0,13 0,14 0,15 0,16 0,17 0,18 0,19

Fig. 4

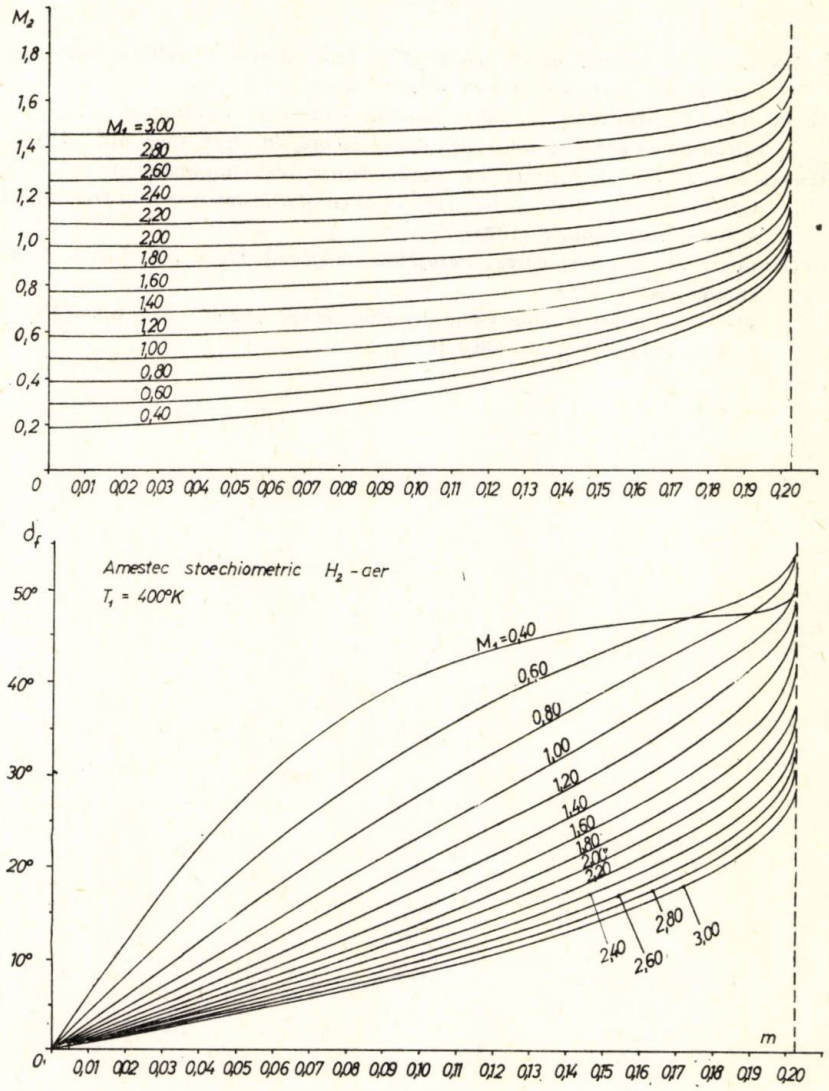


Fig. 5

400°K (s-au trasat numai ramurile curbelor corespunzătoare deflagrațiilor slabe, singurele posibile din punct de vedere gazodinamic).

Pentru cazul undei de combustie oblice, în funcție de numărul Mach al curentului înaintea flăcării în figurile 3, 4 și 5 se indică valorile deviației δ_f și ale numărului Mach M_2 după flacără pentru fiecare din temperaturile inițiale T_1 date.

Astfel de curbe trasate pentru diferite compoziții și temperaturi inițiale ale amestecului pot fi utilizate direct în rezolvarea problemelor de combustie.

Primită la redacție la 18 ianuarie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. J. F. Clarke, *Some remarks on the treatment of fully-supersonic oblique flames as gasdynamical discontinuities*, Co. A. Report Aero, *179* (1965).
2. D. Pantazopol, F. Munteanu, *Studiul local al scurgerilor însoțite de unde de șoc și de combustie cu ajutorul unui nou tip de polară*, St. cerc. mec. apl., *2* (1971).
3. D. Pantazopol, F. Munteanu, *Polara șoc-combustie (detenă-combustie) cu considerarea variației raportului căldurilor specifice al gazului la trecerea prin frontul de flacără*, St. cerc. mec. apl., *3* (1972).
4. L. K. Garkușa, G. M. Șcegolev, *Entropiinie diagrami productov sgoraniia*, Naukova Dumka, Kiev, 1968.
5. — *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, vol. III, *Fundamentals of Gasdynamics*, Princeton University Press, 1958.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL VISCOZITĂȚII FLUIDELOR

D. MILCOVEANU
Institutul de subingineri Hunedoara

Pe baza modelelor adoptate în prezent în știință și anume molecular-cinetic pentru studiul fluidelor compresibile (gaze) și al golurilor pentru studiul fluidelor incompresibile (lichide) și a procedeelor de calcul ale statisticii-matematice, respectiv distribuția lui Gibbs, au fost deduse expresiile statistice, în funcție de suma de stare Z a fluidelor, ale coeficienților de viscozitate dinamică pentru gaze și pentru lichide. La explicitarea acestor expresii s-a regăsit legea cunoscută, const. $T^{1/2}$ de variație a viscozității dinamice cu temperatura pentru gaze și legea const. $T^{1/2}$.exp. (U_a/KT), deosebită de expresiile adoptate în prezent, în cercetare și tehnică, pentru variația viscozității dinamice cu temperatura pentru lichide. Dacă temperatura devine atît de înaltă încît termenul exponențial din ultima expresie devine de ordinul unității, atunci rămîne valabilă, pentru viscozitatea lichidului foarte cald, legea const. $T^{1/2}$, adică o comportare, din punct de vedere al viscozității, identică cu a gazelor. Acest rezultat este în concordanță cu concepția actuală privind starea lichidă și starea gazoasă.

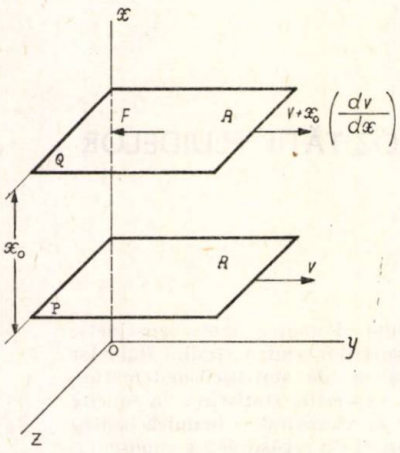
Studiul viscozității fluidelor a fost început încă de Newton în sec. XVII-lea. Amintim observația experimentală conform căreia în cazul curgerii unui fluid, porțiunile din acesta, care se află în contact direct cu o suprafață solidă în repaus, nu sînt puse în mișcare, ceea ce arată că frecarea care se opune curgerii fluidului nu apare între suprafața solidă și fluid, ci între diferitele straturi ale fluidului însuși. Această observație experimentală justifică denumirea de frecare internă dată fenomenului de viscozitate la fluidele în mișcare.

Să considerăm figura 1, în care suprafețele P și Q sînt două suprafețe materializate prin moleculele de fluid, conținute în acestea și să scriem legea empirică a lui Newton, din 1686, pentru definirea coeficientului de viscozitate a fluidului:

$$F = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}, \tag{1}$$

în care: η este coeficientul de viscozitate dinamică, A-suprafața, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ — gradientul vitezei, iar F forța de frecare vîscoasă (tangențială).

Interpretarea acestei formule se face în modul următor: pentru menţinerea vitezelor indicate în figura 1, ceea ce se traduce prin curgerea fluidelor, trebuie să se cheltuiască continuu un lucru mecanic pentru învingerea forţei de frecare F, a cărei valoare este dată de legea lui Newton.



Fig, 1

Studiile experimentale efectuate au arătat deosebiri fundamentale în comportarea coeficientului de viscozitate al gazelor şi al lichidelor în raport cu temperatura şi presiunea. Pentru aceasta s-au adoptat două modele, respectiv două mecanisme diferite şi anume: cel molecular-cinetic [3, p. 208] pentru studiul gazelor şi cel al golurilor [3, p. 718]; [5, p. 206] pentru studiul lichidelor. Ca procedeu de calcul s-a adoptat statistica matematică şi anume distribuţia după viteze a lui Maxwell pentru studiul gazelor [2, p. 509], [3, p. 225], [4, p. 199] şi distribuţia după potenţiale a lui Boltzmann pentru studiul lichidelor [5, p. 206], [4, 274].

În studiul pe care îl prezentăm am utilizat distribuţia lui Gibbs, care ne-a condus la rezultate pe care le considerăm ameliorate şi diferite de acelea cunoscute în prezent.

Distribuţia lui Gibbs realizează studiul unui sistem (subsistem) cuplat slab cu un termostat care de fapt este mediul în care evoluează sistemul studiat şi în a cărui alegere avem mari libertăţi. În consecinţă, termostatul nu are alt rol decît acela de a introduce în calcule temperatura la care se desfăşoară fenomenul. Pentru stabilirea mărimilor medii statistice şi studiul fenomenelor fizice este recomandată [6, p. 380 şi 392], [7, p. 159], [8, p. 46], distribuţia lui Gibbs.

Formulele fundamentale ale eficientei distribuţii a lui Gibbs, pentru sistemele a căror evoluţie energetică se face în mod continuu (clasic), sînt următoarele:

Funcţia de distribuţie (densitatea de probabilitate, $w\ (H)$:

$$w(H) = \frac{1}{Z} \exp. \left(-\frac{H}{KT} \right), \tag{2}$$

în care

$$Z = \int_{\Gamma} \exp. \left(-\frac{H}{KT} \right) \cdot \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\gamma} \tag{3}$$

şi reprezintă suma de stare (integrala statistică, funcţia de partiţie) a sistemului studiat; H reprezintă hamiltonianul sistemului, $\mathrm{d}\Gamma$ — hipervolumul disponibil în spaţiul fazelor, γ — hipervolumul unei celule, K — constanta universală a lui Boltzmann şi T — temperatura mediului.

Probabilitatea dw_H, ca hamiltonianul sistemului să fie cuprins în intervalul H, $H + dH$, este

$$dw_H = \frac{1}{Z} \exp.\left(-\frac{H}{KT}\right) \cdot \frac{d\Gamma}{\gamma}. \tag{4}$$

Valoarea medie statistică a unei funcții oarecare de hamiltonianul sistemului $< f(H) >$, este

$$< f(H) > = \int_{\Gamma} f(H).\ dw_H. \tag{5}$$

Cînd sistemul considerat este constituit de mai multe particule, probabilitățile referitoare la acestea se înmulțesc și atunci și integralele din expresiile de mai sus se înmulțesc, devenind astfel integrale multiple, ușor de manipulat în calcule.

1. VISCOZITATEA FLUIDELOR COMPRESIBILE (GAZE)

Modelul molecular-cinetic adoptat pentru studiul gazelor a fost introdus de Clausius și de Maxwell în 1860.

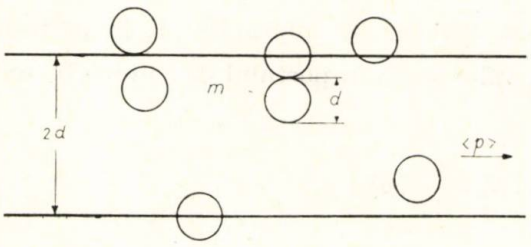


Fig. 2

Noțiunile introduse și rezultatele la care conduce aplicarea teoriei molecular-cinetice (fig. 2), la un gaz [2, p. 509], [3, p. 207], [4, p. 181] sînt următoarele:

z_1, număr mediu de ciocniri între moleculele de gaz în unitatea de timp:

$$z_1 = \pi N_0 d^2,$$

în care $N_0 = 2{,}69.10^{19}$ cm^{-3} și reprezintă numărul lui Loschmidt; d, diametrul unei molecule de gaz variabil cu temperatura:

$$d^2 = d_\infty^2\left(1 + \frac{C}{T}\right),$$

în care d_∞ este diametrul unei molecule corespunzător unei temperaturi foarte ridicate, iar C constanta lui Sutherland (anexa A);

λ, drumul liber mijlociu al unei molecule de gaz:

$$\lambda = \frac{1}{\pi N_0 d_\infty^2\left(1 + \frac{C}{T}\right)},$$

dN'/dt, numărul mediu de molecule de gaz care traversează unitatea de suprafață în unitatea de timp:

$$\frac{dN'}{dt} = \frac{1}{4m} N_0 \langle p \rangle,$$

în care $\langle p \rangle = m \langle v \rangle$, este impulsul mediu statistic al moleculelor de gaz; în cazul unor traversări din ambele părți, relația se multiplică cu doi.

Să considerăm figura 1; dacă o moleculă de gaz din planul P, într-unul din drumurile sale libere între două ciocniri, ajunge în planul Q, ea va aduce în acest plan, un impuls mai mic decît acela specific planului Q, aceasta în virtutea poziției sale de-a lungul axei ox. Invers, dacă o moleculă ajunge în aceleași condiții, din planul Q în planul P, se va aduce în acest plan, care se mișcă mai încet, un impuls mai mare decît acela specific planului P. Rezultatul acestor mișcări termice a moleculelor de gaz, va avea ca rezultat descreșterea impulsurilor moleculelor din planul Q și creșterea impulsurilor moleculelor din planul P. Acest transport de cantitate de mișcare tinde să contracareze distribuția vitezelor moleculelor, stabilită de forțele exterioare acționate.

Drumul mijlociu λ poate fi luat ca distanță medie peste care este transmis impulsul de la un plan la celălalt, adică se consideră conform figurii 1, $x_0 = \lambda$. Prin urmare, o moleculă de gaz avînd masa m, trecînd din planul Q în planul P, transportă un impuls egal cu $m\lambda \frac{dv}{dx}$; cum numărul mediu de molecule care traversează suprafața A, în unitatea de timp este $\frac{A}{2m} N_0 \langle p \rangle$, rezultă valoarea transportului de impuls în unitatea de timp:

$$\frac{1}{2} A N_0 \lambda \frac{dv}{dx} \langle p \rangle.$$

Acest schimb de impuls este echivalent cu forța de frecare vîscoasă, adică

$$F = \frac{1}{2} A N_0 \lambda \langle p \rangle \frac{dv}{dx}$$

și regăsim legea lui Newton (1); după înlocuirea lui λ și comparație cu (1), rezultă valoarea coeficientului de viscozitate dinamică a unui gaz:

$$\eta = \frac{\langle p \rangle}{2^{1/2} \pi d_\infty^2 \left(1 + \frac{C}{T}\right)}. \tag{6}$$

Dezvoltarea fizică-matematică adoptată astăzi, înlocuiește $\langle p \rangle$ cu valoarea dată de distribuția după viteze (impulsuri) a lui Maxwell și

se ajunge astfel la expresia cunoscută (anexa A) pentru valoarea coeficientului de viscozitate dinamică a gazelor.

Considerăm că din cauza curgerii gazului nu trebuie luată, într-un calcul riguros, distribuția după viteze (impulsuri) a lui Maxwell care este o distribuție de echilibru pentru agitația termică (statistică) a moleculelor de gaz.

De asemenea, trebuie considerate, într-un astfel de calcul, mișcările de rotație, de vibrație a moleculelor și deplasarea lor după direcții în afară de aceea a curgerii gazului.

Pentru aceasta, vom introduce în expresia (6) impulsul mediu statistic, definit pe baza distribuției lui Gibbs, pentru întreg ansamblul de molecule care iau parte la fenomenul de frecare internă într-un gaz în curgere.

Pentru aceasta să considerăm molecula de masă m care face un număr mare de deplasări; ea constituie un sistem (subsistem) pe care îl vom studia cu ajutorul modelului lui Gibbs. Să separăm hamiltonianul acestei molecule în doi termeni:

$$H = \frac{p^2}{2m} + H'$$

și anume: primul termen se referă la energia cinetică legată de curgerea gazului, iar cel de-al doilea termen de celelalte energii care pot afecta molecula ca: potențială, de rotație, de vibrație, de deplasări în alte direcții ș.a. Hipervolumul corespunzător hamiltonianului moleculei va fi atunci:

$$\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\Gamma'.$$

Suma de stare corespunzătoare moleculei va fi conform cu (3):

$$Z = \frac{1}{\gamma}\int_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \int_{\Gamma'} \exp\left(-\frac{H'}{KT}\right)\cdot \mathrm{d}\Gamma' \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot \mathrm{d}p. \qquad (7)$$

Ultima integrală se poate transforma în modul următor:

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot \mathrm{d}p = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot \mathrm{d}p.$$

Formula (4) ne conduce la valoarea impulsului mediu statistic al acestei molecule; după simplificări se obține expresia:

$$\langle p\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot \mathrm{d}p}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot \mathrm{d}p}\,. \qquad (8)$$

Se constată faptul că în expresia mediei statistice $\langle p \rangle$, s-au eliminat, în urma medierii, termenii legați de hamiltonianul H', de asemenea mărimea γ și volumul.

Să considerăm acum expresia sumei de stare scrisă în exprimarea:

$$Z = \frac{1}{2\gamma}\int_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \int_{\Gamma'} \exp.\left(-\frac{H'}{KT}\right)\cdot \mathrm{d}\Gamma' \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot \mathrm{d}p, \tag{9}$$

pe care să o logaritmăm și apoi să o derivăm în raport cu impulsul; se obține atunci, după simplificări, valoarea impulsului mediu statistic relativ la masa de gaz care curge:

$$\langle p \rangle = -mKT\frac{\partial(\ln Z)}{\partial p}. \tag{10}$$

Introducînd această expresie în (6) se obține

$$\eta = -\frac{mKT}{2^{1/2}\pi d_x^2\left(1+\frac{C}{T}\right)}\cdot\frac{\partial(\ln Z)}{\partial p}. \tag{11}$$

Aceasta este expresia statistică care definește coeficientul de viscozitate dinamică a unui gaz. Toate caracteristicile privind structura moleculei de gaz, ca, de exemplu, geometria, energiile de rotație și de vibrație etc. sînt conținute în exprimarea lui Z. Cum însă în expresia (11) se diferențiază logaritmul mărimii statistice Z, rezultă că astfel de caracteristici nu influențează coeficientul de viscozitate a unui gaz în curgere.

În continuare să considerăm expresia (8) care dă valoarea impulsului mediu statistic și înlocuind valorile integralelor Poisson din anexa C, se obține după simplificări:

$$\langle p \rangle = \left(\frac{2mKT}{\pi}\right)^{1/2}, \tag{12}$$

care, introdusă în (6), conduce la valoarea statistică explicită a coeficientului de viscozitate a unui gaz:

$$\eta = \frac{(mK)^{1/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2} d_x^2\left(1+\frac{C}{T}\right)}\cdot T^{1/2}, \tag{13}$$

adică legea de variație cu $T^{1/2}$ a viscozității dinamică a unui gaz și independența de presiunea gazului.

Verificarea dimensională a formulei (13) conduce la unitatea S.I. pentru viscozitatea dinamică: $\mathrm{N.S.m^{-2}}$.

Expresia (13) dedusă este comparabilă cu aceea propusă de Chapman și Ensong (anexa A).

2. VISCOZITATEA FLUIDELOR INCOMPRESIBILE (LICHIDE)

Modelul golurilor (spaţii goale, vacanţe), adoptat pentru studiul lichidelor a fost introdus de I. I. Frenkel [5, p. 206] şi de H. Eyring [3, p. 718] în 1933.

Pentru rezolvarea problemei viscozităţii lichidelor să schematizăm luînd în consideraţie modelul reprezentat în figurile 3 şi 4 şi să introducem noţiunile următoare:

δ, pasul deplasării elementare (saltul) unei molecule cînd aceasta ocupă un gol adiacent; deplasarea se poate efectua spre dreapta sau spre stînga şi după această deplasare molecula se opreşte în golul ocupat pentru mai mult timp;

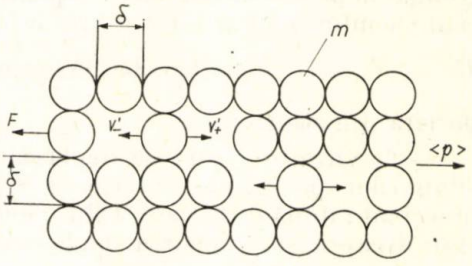


Fig. 3

U_a, energia sau lucrul mecanic care trebuie cheltuit în contra forţelor exterioare, pentru a asigura moleculei posibilitatea de a trece din poziţia iniţială într-o poziţie vecină; rezultă că mişcarea moleculei s-ar produce de-a lungul unei curbe potenţiale formată din gropi şi bariere; minimele acestei curbe corespund poziţiilor de echilibru stabil în jurul cărora molecula vibrează; potenţialul U_a se numeşte potenţial de activare şi el se datorează unor efecte exterioare şi independente de molecula care efectuează saltul, de exemplu, efectele celorlalte molecule constituind masa de lichid, pot genera o astfel de barieră de potenţial;

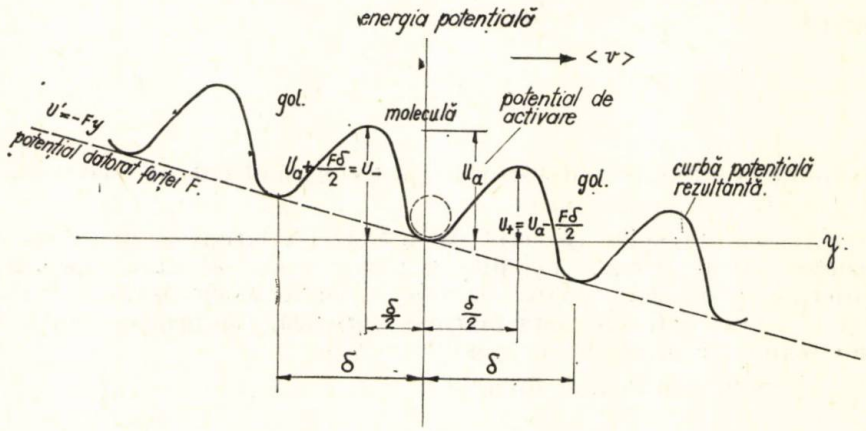


Fig. 4

F, forţa de tracţiune tangenţială (forfecare), exercitată de stratul de lichid care se deplasează datorită forţelor exterioare asupra stratului de lichid învecinat; întreg stratul nu se poate deplasa însă liber în direcţia forţei tangenţiale exterioare acţionate şi atunci molecula stratului, aflată în vecinătatea unui gol, efectuează saltul în acesta;

$U' = -Fy$, energia sau lucrul mecanic corespunzător forței tangențiale exterioare care acționează; conform figurii 4 se obțin pentru valorile care modifică barierele de potențial U_a, următoarele expresii: pentru bariera din dreapta $U'_+ = -\frac{F\delta}{2}$ și pentru bariera din stînga $U'_- = \frac{F\delta}{2}$;

$U = U_a + U'$, bariera de potențial, de natură exterioară, care trebuie depășită de o moleculă pentru a realiza un salt într-un gol adiacent; conform figurii 4 valorile celor două bariere de potențial vor fi: $U_+ = U_a - \frac{F\delta}{2}$ pentru bariera din dreapta și $U_- = U_a + \frac{F\delta}{2}$ pentru bariera din stînga;

v', viteza cu care se deplasează o moleculă de lichid, în prezența cîmpurilor potențiale exterioare U_a și U', atunci cînd ocupă un gol învecinat; după direcția saltului moleculei vom avea v'_+ pentru deplasarea spre dreapta și v'_- pentru deplasarea spre stînga;

v, viteza reală de deplasare a unei molecule în prezența cîmpurilor potențiale exterioare atunci cînd ocupă un gol învecinat; această viteză reală se exprimă ca diferența vitezelor salturilor în sensuri opuse v'_+ și v'_-, adică:

$$v = \frac{(v'_+) - (v'_-)}{2}, \tag{14}$$

cifra doi de la numitor se datorează faptului că molecula se poate deplasa spre dreapta sau spre stînga;

Z, suma de stare (funcția de partiție) relativă la molecula care efectuează saltul într-un gol adiacent; cum suma de stare reprezintă o proprietate intrinsecă a materiei, independentă de cîmpurile exterioare, U_a și U', vom defini această mărime statistică, conform formulei (3) și ținînd seama de anexa C, în modul următor:

— pentru saltul spre dreapta:

$$Z_+ = \int_{\Gamma_+} \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot\frac{d\Gamma}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\int_0^{+\delta} dy \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot$$

$$\cdot\, dp = \frac{\delta}{2\gamma}(2\pi\, mKT)^{1/2},$$

— pentru saltul spre stînga:

$$Z_- = \int_{\Gamma_-} \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot\frac{d\Gamma}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\int_0^{-\delta} dy \int_0^{-\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot$$

$$\cdot\, dp = \frac{\delta}{2\gamma}(2\pi\, mKT)^{1/2}$$

și rezultă atunci, ceea ce este conform cu definiția fizică a sumei de stare,

$$Z = Z_+ = Z_- = \frac{\delta}{2\gamma}(2\pi\ mKT)^{1/2}. \tag{15}$$

Să definim acum, conform formulei (5) și ținînd seama de anexa C, valoarea medie statistică a vitezei reale de deplasare a unei molecule în prezența cîmpurilor potențiale exterioare, atunci cînd aceasta ocupă un gol învecinat.

Luînd în considerație formula (14) vom avea:

$$< v > = \frac{1}{2}[< v'_+ > - < v'_- >], \tag{16}$$

în care

$$< v'_+ > = \frac{1}{\gamma\, mZ}\int_0^{+\delta} dy \int_0^{+\infty} p \exp\cdot\left(-\frac{p^2}{2mKT} - \frac{U_a}{KT} - \frac{F\delta}{2KT}\right)\cdot dp, \tag{17}$$

respectiv

$$< v'_+ > = \frac{KT\delta}{\gamma Z}\cdot \exp\left(-\frac{U_a}{KT}\right)\cdot \exp\left(-\frac{F\delta}{2KT}\right)\cdot \tag{18}$$

și

$$< v'_- > = \frac{1}{\gamma mZ}\int_0^{-\delta} dy \int_0^{-\infty} p \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT} - \frac{U_a}{KT} + \frac{F\delta}{2KT}\right)\cdot dp, \tag{19}$$

respectiv

$$< v'_- > = \frac{KT\delta}{\gamma Z}\cdot \exp\cdot\left(-\frac{U_a}{KT}\right)\cdot\exp\cdot\left(\frac{F\delta}{2KT}\right), \tag{20}$$

de unde

$$< v > = -\frac{KT\delta}{2\gamma Z}\exp\cdot\left(-\frac{U_a}{KT}\right)\cdot\left[\exp\left(\frac{F\delta}{2KT}\right) - \exp\left(-\frac{F\delta}{2KT}\right)\right]\cdot \tag{21}$$

Să dezvoltăm în serie, cu limitarea la primii doi termeni, paranteza mare din expresia (21); se obține atunci pentru valoarea acestei $\frac{F\delta}{KT}$; de asemenea se introduce în aceeași expresie (21) valoarea sumei de stare Z dată de (15); se obține

$$< v > = -\frac{\delta}{(2\pi\, mKT)^{1/2}}\cdot\exp\cdot\left(-\frac{U_a}{KT}\right)\cdot F \tag{22}$$

sau, într-o exprimare compactă,

$$< v > = q \cdot F, \tag{23}$$

în care

$$q = - \frac{\delta}{(2\pi\, mKT)^{1/2}} \cdot \exp \cdot \left(- \frac{U_a}{KT} \right). \tag{24}$$

Expresia (23) reprezintă legea mişcării cu frecare la fluide şi anume : viteza medie de deplasare cu frecare a moleculelor este proporţională cu forţa aplicată, coeficientul de proporţionalitate fiind mobilitatea moleculelor.

Dacă izolăm pe F, se obţine din (22) expresia :

$$F = - \frac{(2\pi\, mK)^{1/2}}{\delta^2} \cdot T^{1/2} \cdot \exp \cdot \left(\frac{U_a}{KT} \right) \cdot \delta^2 \cdot \frac{< v >}{\delta}, \tag{25}$$

care, comparată cu (1), conduce la formula de definiţie a coeficientului de viscozitate dinamică a lichidelor şi anume :

$$\eta = \frac{(2\pi\, mK)^{1/2}}{\delta^2} \cdot T^{1/2} \exp \left(\frac{U_a}{KT} \right), \tag{26}$$

adică o lege de variaţie,

$$\text{const.}\ T^{1/2} \cdot \exp \cdot \left(\frac{U_a}{KT} \right)$$

a viscozităţii dinamice a lichidelor.

Verificarea dimensională a formulei (26) conduce la unitatea S.I. pentru viscozitatea dinamică şi anume : $N.s.m^{-2}$. Expresia (26) diferă de acelea considerate în prezent în practică şi care sînt reproduse în anexa B.

Cu privire la aplicabilitatea formulei (26) vom menţiona următoarele : cu creşterea temperaturii, funcţia exp. $\frac{U_a}{KT}$ se micşorează ; în schimb funcţia const. $T^{1/2}$ creşte ; atîta vreme cît temperatura nu este prea ridicată prima funcţie $\left(\exp \cdot \frac{U_a}{KT} \right)$ este aceea care îşi imprimă caracterul în ceea ce priveşte variaţia viscozităţii unui lichid cu temperatura şi anume descreşterea viscozităţii cu creşterea temperaturii ; cînd temperatura se ridică, prima funcţie tinde către valoarea unitate şi cea de a doua funcţie (const. $T^{1/2}$) îşi imprimă caracterul în ceea ce priveşte variaţia viscozităţii unui lichid cu temperatura şi anume creşterea viscozităţii cu creşterea temperaturii întocmai ca în cazul gazelor, ceea ce rezultă din compararea cu formula (13).

Toate aceste rezultate sînt în concordanță cu formula empirică (B—2) prezentată în anexa B și de asemenea cu ipotezele privind starea lichidă la temperaturi ridicate în comparație cu starea gazoasă.

De asemenea, aceste rezultate au importante aplicații în tehnica de ungere a organelor de mașini lucrînd la temperaturi ridicate.

Prezentăm în continuare expresia statistică a coeficientului de viscozitate dinamică al lichidelor. Considerînd expresiile (16), (17) și (19), ultimele două fiind transcrise pentru limitele $-\infty$ la $+\infty$, precum și expresia sumei de stare (funcția de partiție) scrisă sub forma conform cu (15):

$$Z = \frac{\delta}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2mKT}\right)\cdot dp \tag{27}$$

și calculînd $\frac{\partial(\ln Z)}{\partial p}$, rezultă următoarea expresie;

$$< v > = \frac{\delta}{2}\cdot\exp\cdot\left(-\frac{U_a}{KT}\right)\cdot\frac{\partial\,(\ln Z)}{\partial p}\cdot F, \tag{28}$$

de unde legea lui Newton pentru frecarea viscoasă (1):

$$F = \eta.\delta^2\,\frac{< v >}{\delta},$$

în care

$$\eta = \frac{2}{\delta^2}\cdot\frac{\exp\left(\frac{U_a}{KT}\right)}{\frac{\partial\,(\ln Z)}{\partial p}} \tag{29}$$

și care reprezintă exprimarea statistică compactă a coeficientului de viscozitate dinamică a lichidelor.

În ceea ce privește dependența viscozității lichidelor de presiune, considerăm că observația [3, p. 719], [4, p. 284]: „la presiuni foarte înalte practic golurile dispar" și de asemenea [2, p. 664], [5, p. 223] faptul că potențialul de activare U_a depinde de presiune conform formulei $U_a = U_0 + pV_0$ în care pV_0 este lucrul mecanic necesar pentru formarea unui gol, iar U_0, energia cheltuită pentru îndepărtarea unei molecule pentru ca aceasta să lase un gol în urma ei, trebuie luate în considerație.

3. CONCLUZII ȘI REZULTATE

Studiul se înscrie pe linia trasată de Max Born [1, p. 737] care în conferința pentru premiul Nobel ținută în 1954 a indicat: „formularea în mod statistic a mecanicii obișnuite însăși".

Ca rezultat al introducerii distribuției lui Gibbs pentru studiul viscozității fluidelor au fost deduse expresiile statistice, în funcție de suma de stare Z a sistemului de molecule care iau parte la fenomenul

de frecare internă, formula (11) pentru viscozitatea gazelor şi formula (29) pentru aceea a lichidelor.

La explicitarea acestor expresii au fost găsite legile de variaţie a coeficienţilor de viscozitate dinamică cu temperatura : const. $T^{1/2}$ pentru gaze, formula (13) şi const. $T^{1/2}$ .exp $\left(\frac{U_a}{KT}\right)$, pentru lichide, formula (26).

Ultima lege diferă de aceea adoptată actualmente pentru studiile teoretice şi experimentările privind lichidele.

Ambele legi sînt conforme cu rezultatele experimentale şi sînt în concordanţă cu concepţiile actuale privind structura materiei la scară moleculară.

Pe baza acestor rezultate şi a metodologiei de calcul introduse, respectiv mărimea fundamentală suma de stare (funcţia de partiţie), se pot efectua în continuare studii statistice privind fenomenele fizice de difuziune, conductibilitate termică, termodifuziune, frecare internă în solide ş.a.

ANEXA A

Valoarea coeficientului de viscozitate dinamică a gazelor [1, p. 511], [3, p. 198] :

$$\eta = 0{,}333 \frac{2\sqrt{mKT}}{\pi^{3/2} d_\infty^2 \left(1 + \frac{C}{T}\right)}. \qquad (A-1)$$

Pe baze experimentale Chapman şi Enskog [2, p. 512] au ameliorat expresia (A—1) schimbînd valoarea coeficientului 0,333 în 0,499.

Tabela I

Valoarea constantei lui Sutherland

Gazul.	H_2	N_2	O_2	CO	CO_2	He	Ne	Ar	Kr	Ye
C(°)	72	104	125	100	273	20	56	142	188	252

Tabela II

Diametre moleculare

Gazul	H_2	N_2	O_2	CO	CO_2	He	Ne	Ar	Kr
d_∞ (A°)	2,18	3,16	2,96	3,80	4,60	2,0	2,34	2,86	3,18

ANEXA B

Formula lui I.I. Frenkel [5, p. 221] pentru valoarea coeficientului

de viscozitate a lichidelor :

$$\eta = \frac{2\,\tau_0\,KT}{\delta^3}\exp\cdot\left(\frac{U_a}{KT}\right)\cdot \qquad (B-1)$$

Formula experimentală a lui de Guzman — Carrancio [3, p. 723] din 1913 :

$$\eta = B\exp\left(\frac{U_a}{KT}\right)\cdot \qquad (B-2)$$

În aceste expresii simbolurile au semnificația fizică prezentată în text, iar B este o constantă specifică fiecărui lichid.

ANEXA C

Integralele lui Poisson :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\alpha x^2\right)\cdot \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}, \qquad (C-1)$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}\exp(-\alpha x^2)\cdot \mathrm{d}x = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n}\left(\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}\right)^{1/2}, \qquad (C-2)$$

$$I_{2n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}\exp(-\alpha x^2)\cdot \mathrm{d}x = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}\cdot \qquad (C-3)$$

Observație : $0! = 1$.

Primită la redacție la 23 ianuarie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. M. Born, *L'interpretation statistique de la mécanique quantique* (Conferință Nobel), Journal de Physique, **16**, *10*, (1955).
2. T. Erdey—Gruz ș.a., *Chimie Fizică teoretică* vol. I, București, Edit. tehnică, 1957.
3. W. Moorel, *Physical chemistry*, Lowe and Brydone (Printers), London, 1970.
4. D. Milcoveanu, *Curs de fizică generală*, Litografiat la Inst. de mine Petroșani, 1962.
5. I. I. Frenkel, *Introducere în teoria metalelor* (trad. l. rusă), București, Edit. tehnică, 1953.
6. A. Blanc—Lapierre, *Mécanique statistique*; Paris, Edit. Masson, 1967.
7. S. Guiașu, *Aplicații ale teoriei informației*, București, Edit. Academiei, 1968.
8. C. Kittel, *Elements de physique statistique*, Paris, Edit. Dunod. 1961.
9. D. Milcoveanu, *Interpretarea probabilistă a mărimilor lucru mecanic și cantitate de căldură*, Revista de Fizică și Chimie, *9*, p. 349—353 (1970).
10. D. Milcoveanu, *Elemente de fizică statistică*, Litografiat la Inst. de mine Petroșani, 1969, (curs).
11. V. G. Levici, *Introducere în fizică statistică* (trad. l. rusă), București, Edit. Tehnică, 1954.

ASUPRA STĂRII DE DEFORMARE PLASTICĂ PLANĂ PENTRU CORPURI ORTOTROPE

de V. DIACONIȚA
Universitatea „Al. I. Cuza", Iași

În această lucrare se studiază starea de deformare plană plastică utilizînd o condiție de plasticitate de forma celei postulate în [1]. Se arată că sistemul pentru determinarea tensiunilor este de tip hiperbolic. Se pun în evidență cîteva proprietăți ale caracteristicilor sistemului în tensiuni, care coincid cu caracteristicile sistemului pentru determinarea vitezelor. Ca și în cazul corpurilor izotrope se arată că sistemul pentru determinarea tensiunilor poate fi liniarizat.

1. INTRODUCERE

Studiul stării de deformare plastică plană a corpurilor ortotrope a constituit o preocupare pentru mulți cercetători care au utilizat în studiile lor diverse condiții de plasticitate. Am putea cita [2], [3], [4], [5]. Noi vom utiliza pentru studiul problemei o condiție de plasticitate care înlocuiește invarianța la o presiune hidrostatică cu invarianța la tensiuni de o anumită formă, care, aplicate unui cub format dintr-un material ortotrop, acesta rămîne tot cub după deformare. Această condiție de plasticitate formulată în [1] se prezintă sub forma:

$$K_{23}\left(\sigma_{22}-\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}}\sigma_{33}\right)^2+K_{31}\left(\sigma_{33}-\frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}}\sigma_{11}\right)^2+K_{12}\left(\sigma_{11}-\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)^2+$$

$$+K_{44}\sigma_{23}^2+K_{55}\sigma_{31}^2+K_{66}\sigma_{12}^2=1, \tag{1.1}$$

unde σ_{ij} sînt componentele tensorului tensiune, K_{ij} constante ce caracterizează proprietățile plastice ale corpului, iar Δ_{ii}/Δ_{jj} se exprimă cu ajutorul constantelor elastice ale corpului considerat.

T. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 3, 1974, P. 517–531

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

Relațiile dintre vitezele de deformare $\dot{\varepsilon}_{ij}$ și tensiunile σ_{ij}, admițînd postulatul lui Drucker [6], se scriu :

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \lambda\left[\left(K_{12}+\left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}}\right)^2 K_{31}\right)\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}} K_{12}\,\sigma_{22} - \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}} K_{31}\,\sigma_{33}\right],$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \lambda\left[\left(K_{23}+\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\right)^2 K_{12}\right)\sigma_{22} - \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}} K_{23}\,\sigma_{33} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}} K_{12}\,\sigma_{11}\right], \tag{1.2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{33} = \lambda\left[\left(K_{31}+\left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}}\right)^2 K_{23}\right)\sigma_{33} - \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}} K_{31}\,\sigma_{11} - \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}} K_{23}\,\sigma_{22}\right],$$

$$\dot{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2}\lambda K_{44}\sigma_{23}, \quad \dot{\varepsilon}_{31} = \frac{1}{2}\lambda K_{55}\,\sigma_{31}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\lambda K_{66}\,\sigma_{12},$$

unde λ este o funcție pozitivă.

Condiția de incompresibilitate $\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = 0$, din cauză că s-a eliminat ipoteza de invarianță a condiției de plasticitate la o presiune hidrostatică, se înlocuiește cu o relație de forma

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{22}}\dot{\varepsilon}_{33} = 0. \tag{1.3}$$

2. ECUAȚIILE DE BAZĂ ALE STĂRII DE DEFORMARE PLANĂ

Caracterizăm starea de deformare plană prin :

$$v_1 = v_1(x_1,\ x_2), \qquad v_2 = v_2(x_1,\ x_2), \qquad v_3 = 0, \tag{2.1}$$

unde cu v_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ am notat componentele vitezei. Dacă avem în vedere (2.1) deducem că $\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{31} = 0$ și deci singurele componente ale tensorului vitezelor de deformare diferite de zero sînt $\dot{\varepsilon}_{11}$, $\dot{\varepsilon}_{22}$ $\dot{\varepsilon}_{12}$, acestea fiind funcții numai de x_1 și x_2. Din (1.2) se constată că singurele componente ale tensorului de tensiune diferite de zero sînt σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{33}, care vor fi de asemenea funcții numai de x_1 și x_2. În plus, tot din (1.2), avînd în vedere că $\dot{\varepsilon}_{33} = 0$, găsim :

$$\sigma_{33} = \frac{\dfrac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}} K_{31}\,\sigma_{11} + \dfrac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}} K_{23}\,\sigma_{22}}{K_{31} + \left(\dfrac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}}\right)^2 K_{23}}. \tag{2.2}$$

Avînd în vedere cele de mai sus, condiția de plasticitate (1.1) devine:

$$(\sigma_{11} - a\sigma_{22})^2 + M^2 \sigma_{12}^2 = N^2, \tag{2.3}$$

unde

$$a = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}},$$

$$N^2 = \frac{\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\right)^2 \left[K_{31} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}} K_{23}\right]}{\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\right)^2 K_{12} K_{31} + \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\right)^2 \left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}}\right)^2 K_{12} K_{23} + K_{23} K_{31}},$$

$$M^2 = 2K_{44} N^2.$$

Relațiile dintre vitezele de deformare și tensiuni (1.2) în cazul stării de deformare plană se scriu

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{\lambda}{N^2}(\sigma_{11} - a\ \sigma_{22}),$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} = -\frac{\lambda a}{N^2}(\sigma_{11} - a\ \sigma_{22}), \tag{2.4}$$

$$\dot{\varepsilon}_{12} = \frac{\lambda M^2}{2N^2}\ \sigma_{12}.$$

Pentru determinarea celor cinci necunoscute σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, v_1 și v_2 avem la dispoziție sistemul format din:

A. Ecuațiile de echilibru care, în absența forțelor de masă, se reduc la:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \tag{2.5}$$

B. Condiția de plasticitate (2.3).

C. Ecuațiile ce se obțin din (2.4) prin eliminarea lui λ:

$$a\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0,$$

$$M^2\ \sigma_{12}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) - (1+a)\ (\sigma_{11} - a\ \sigma_{22})\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = 0. \tag{2.6}$$

Vom presupune că avem de-a face cu o problemă static determinată [3], în care caz tensiunile pot fi determinate utilizînd ecuațiile (2.3) și (2.5), apoi vitezele se determină din (2.6).

3. DETERMINAREA TENSIUNILOR

Vom lua tensiunile de o anumită formă încît condiția de plasticitate (2.3) să fie identic satisfăcută. Într-adevăr [2], se constată că

$$\sigma_{11} = p + \frac{N}{2}\cos 2\theta,$$

$$\sigma_{22} = \frac{p}{a} - \frac{N}{2a}\cos 2\theta, \tag{3.1}$$

$$\sigma_{12} = \frac{N}{M}\sin 2\theta,$$

unde p și θ sînt două funcții necunoscute de x_1 și x_2, verifică identic condiția de plasticitate. Din (3.1) se constată că

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + a\,\sigma_{22}),$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{M\sigma_{12}}{\sigma_{11} - a\,\sigma_{22}}. \tag{3.2}$$

Dacă corpul este izotrop ($a = 1$, $M = 2$), p ar reprezenta tensiunea medie, iar θ unghiul dintre prima direcție principală și Ox_1.

Pentru determinarea funcțiilor p și θ, utilizînd (2.5) și (3.1), obținem sistemul:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} - N\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{2N}{M}\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{2aN}{M}\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + N\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0. \tag{3.3}$$

Ecuațiile diferențiale ale caracteristicilor sistemului de mai sus sînt:

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{1,2} = \frac{M\sin 2\theta \pm \sqrt{M^2\sin^2 2\theta + 4a\cos^2 2\theta}}{2a\cos 2\theta}. \tag{3.4}$$

Pentru un corp ortotrop se constată [2] că $a > 0$ și în acest fel rezultă că sistemul (3.3) este de tip hiperbolic.

Se constată că caracteristicile nu sînt ortogonale ci formează între ele un unghi ψ dat de:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{a-1}\sqrt{M^2 \operatorname{tg}^2 2\theta + 4a}\,. \tag{3.5}$$

Dacă notăm cele două familii de caracteristici cu (α) respectiv (β), putem scrie ecuațiile lor diferențiale sub forma

$$\begin{aligned} (\alpha)\quad & \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}\theta_1, \quad \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{1}{2a}\left[M \operatorname{tg} 2\theta + \sqrt{M^2 \operatorname{tg}^2 2\theta + 4a}\right], \\ (\beta)\quad & \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}\theta_2, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{1}{2a}\left[M \operatorname{tg} 2\theta - \sqrt{M^2 \operatorname{tg}^2 2\theta + 4a}\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

În lungul caracteristicilor între funcțiile p și θ se dovedesc a fi adevărate relațiile

$$F(\theta) \pm p = \text{const.}, \tag{3.7}$$

unde

$$F(\theta) = \frac{N}{M}\int \sqrt{M^2 \sin^2 2\theta + 4a \cos^2 2\theta}\, d\theta. \tag{3.8}$$

Semnul (+) în (3.7) corespunde familiei (α), iar (−) familiei (β).

4. PROPRIETĂȚI ALE CARACTERISTICILOR

Am văzut în aliniatul precedent că ecuațiile celor două familii de caracteristici și relațiile în lungul lor sînt

$$\begin{aligned} (\alpha)\quad & \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}\theta_1, \qquad F(\theta) + p = \xi = \text{const.}, \\ (\beta)\quad & \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}\theta_2, \qquad F(\theta) - p = \eta = \text{const.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Caracteristicile sistemului (3.3) posedă o serie de proprietăți analoge proprietăților liniilor de lunecare.

Proprietatea 4.1. Dacă trecem de la o linie caracteristică a familiei (β) la o altă linie din aceeași familie în lungul unei linii oarecare din familia (α), atunci $F(\theta)$ și p variază cu aceeași mărime.

Demonstrație. Fie rețeaua de caracteristici ca în figura 1. Notăm cu A_{ij} punctul de intersecție al liniei caracteristice α_i cu linia β_j.

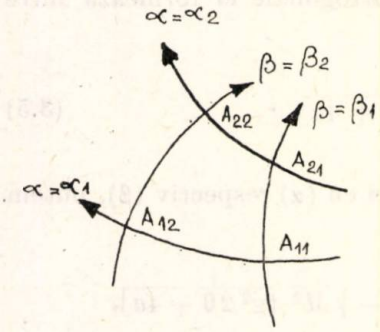


Fig. 1

Din (4.1) se constată că

$$F(\theta) = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \qquad p = \frac{1}{2}(\xi - \eta). \tag{4.2}$$

Însemnăm cu ξ_1 și ξ_2 valorile lui ξ pe linia α_1, respectiv α_2 și cu η_1, η_2 valorile lui η pe liniile β_1 și β_2.

În punctele A_{ij} valorile lui $F(\theta)$ și p vor fi :

$$F_{11} = \frac{1}{2}(\xi_1 + \eta_1),\ F_{12} = \frac{1}{2}(\xi_1 + \eta_2),\ F_{21} = \frac{1}{2}(\xi_2 + \eta_1),\ F_{22} = \frac{1}{2}(\xi_2 + \eta_2),$$

$$p_{11} = \frac{1}{2}(\xi_1 - \eta_1),\ p_{12} = \frac{1}{2}(\xi_1 - \eta_2),\ p_{21} = \frac{1}{2}(\xi_2 - \eta_1),\ p_{22} = \frac{1}{2}(\xi_2 - \eta_2). \tag{4.3}$$

De aici se constată că

$$F_{22} - F_{21} = F_{12} - F_{11} = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1),$$

$$p_{22} - p_{21} = p_{12} - p_{11} = \frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2) \tag{4.4}$$

și proprietatea enunțată este dovedită. Proprietatea 4.1 este analogă primei teoreme a lui Hencky din plasticitatea corpurilor izotrope [3].

Proprietatea 4.2. Dacă o porțiune oarecare a unei linii caracteristice este un segment de dreaptă, atunci pe ea sînt constante funcțiile p și θ precum și componentele tensiunii σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}.

Demonstrație. Fie că o porțiune din linia (α) este segment de dreaptă. Aceasta înseamnă că θ_1 este constant și deci θ și $F(\theta)$. În plus, dacă avem în vedere că pe linia (α) ξ este constant, din $F(\theta) + p = \xi$

deducem că şi funcţia p este constantă. În fine, din (3.1) rezultă imediat că componentele tensiunii sînt constante şi în felul acesta proprietatea este dovedită.

Proprietatea 4.3. Dacă într-un domeniu oarecare ambele familii de caracteristici sînt drepte, atunci în acel domeniu avem o stare uniformă de tensiune.

Demonstraţie. Utilizînd proprietatea 3.2 se deduce că funcţiile p şi θ sînt constante în domeniul considerat şi deci sînt constante componentele tensiunii. Aceasta înseamnă că în domeniu avem o stare uniformă de tensiune.

Proprietatea 4.4. Dacă o porţiune de caracteristică, să spunem din familia (α), este un segment de dreaptă, atunci toate porţiunile de caracteristici din familia (α) cuprinse între două caracteristici din familia (β) vor fi segmente de dreaptă.

Demonstraţie. Fie că porţiunea $A_{21}A_{22}$ (fig. 1) este segment de dreaptă. Pe acest segment avem $\theta_1 = \text{const}$. În baza proprietăţii 4.1 rezultă că $F_{11}(\theta) = F_{12}(\theta)$, deci $\theta_{11} = \theta_{12}$ şi deci $\theta_{1(11)} = \theta_{1(12)}$, ceea ce arată că $A_{11}A_{12}$ este tot un segment de dreaptă. În felul acesta caracteristicile din familia (β) taie segmentul de dreaptă al liniei (α) sub acelaşi unghi (schimbîndu-se doar cînd trecem de la o linie (α) la alta). Într-un astfel de domeniu, σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} sînt constante în lungul fiecărui segment de caracteristică, însă schimbîndu-se cînd trecem de la o linie (α) la alta. O astfel de stare de tensiune o numim stare simplă de tensiune. Se constată că în acest domeniu parametrul η este constant.

5. LINIARIZAREA SISTEMULUI (3.3)

Sistemul (3.3) pentru determinarea funcţiilor p şi θ poate fi liniarizat dacă în locul funcţiilor necunoscute luăm pe ξ şi η. Pentru aceasta din (4.2) avem :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{1}{2F'(\theta)}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{1}{2F'(\theta)}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right). \tag{5.1}$$

Înlocuind acum (5.1) în (3.3) şi ţinînd seama de (3.6) obţinem :

$$-a \operatorname{tg} \theta_2 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} - a \operatorname{tg} \theta_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \operatorname{tg} \theta_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = 0. \tag{5.2}$$

Înmulțind a doua ecuație din (5.2) cu a tg θ_1, apoi cu a tg θ_2 și adunînd la prima obținem sistemul

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \operatorname{tg}\theta_1 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \operatorname{tg}\theta_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = 0. \tag{5.3}$$

Fie transformarea :

$$x_1 = x_1(\xi, \eta), \tag{5.4}$$
$$x_2 = x_2(\xi, \eta),$$

cu jacobianul transformării diferit de zero,

$$\Delta(\xi, \eta) = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x_1, x_2)} = \frac{\partial \xi}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \neq 0. \tag{5.5}$$

Calculînd derivatele parțiale ale lui ξ și η în raport cu x_1 și x_2 găsim :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = \Delta \frac{\partial x_2}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_2} = -\Delta \frac{\partial x_1}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = -\Delta \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \Delta \frac{\partial x_1}{\partial \xi}; \tag{5.6}$$

Dacă ținem seama acum de (5.6), sistemul (5.3) se scrie

$$\frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \operatorname{tg}\theta_1 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} = 0,$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\theta_2 \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = 0, \tag{5.7}$$

care, evident, este un sistem liniar. Dacă utilizăm noile variabile ξ și η, ecuațiile (4.1) pot fi scrise sub forma așa-numitului sistem canonic de ecuații :

$$(\alpha) \quad \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \operatorname{tg}\theta_1 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} = 0, \qquad (\beta) \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\theta_2 \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = 0, \tag{5.8}$$
$$F(\theta) + p = \xi, \qquad F(\theta) - p = \eta.$$

Din (5.7) şi (5.8) rezultă că în cazul $\Delta \neq 0$, soluţia sistemului canonic (5.8) reprezintă soluţia sistemului în tensiuni (3.3).

6. STĂRI PARTICULARE DE TENSIUNE

Sistemul (5.8), în general vorbind, nu este echivalent cu sistemul iniţial (3.3), deoarece se pierd soluţii ce corespund cazului $\Delta(\xi, \eta) = 0$. Vom analiza aceste soluţii. Folosind (5.7) putem scrie :

$$\Delta(\xi, \eta) = (\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1)\frac{\partial \xi}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_2} = -a(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1)\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_1}. \tag{6.1}$$

Distingem trei cazuri în care $\Delta(\xi, \eta) = 0$ într-un domeniu oarecare
1° $\xi = \xi_0 = \text{const.}$, $\eta = \eta_0 = \text{const.}$,
2° $\eta = \eta_0 = \text{const.}$, ξ variabil,
3° $\xi = \xi_0 = \text{const.}$, η variabil.
Să analizăm aceste cazuri.
Cazul 1°. $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$.
Dacă avem în vedere (4.2), găsim

$$F(\theta) = \frac{1}{2}(\xi_0 + \eta_0),$$
$$p = \frac{1}{2}(\xi_0 - \eta_0). \tag{6.2}$$

De aici rezultă că funcţiile p şi θ sînt constante şi deci sînt constante componentele tensorului de tensiune. Avem în felul acesta o stare uniformă de tensiune. Într-un astfel de domeniu reţeaua de caracteristici este formată din drepte paralele.

Cazul 2°. $\eta = \eta_0$, ξ variabil.

Cum în acest caz $\eta = \eta_0$, a doua ecuaţie din (5.3) este satisfăcută, iar prima ecuaţie, dacă avem în vedere că $\xi = 2F(\theta) - \eta_0$, se poate scrie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \operatorname{tg}\theta_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0. \tag{6.3}$$

Ecuaţiile diferenţiale ale caracteristicilor acestei ecuaţii sînt :

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\operatorname{tg}\theta_1} = \frac{\mathrm{d}\theta}{0}. \tag{6.4}$$

Din (6.4) obţinem

$$\theta = c_1 \text{ (deci } \theta_1 = \text{const.)},$$
$$x_2 - x_1 \operatorname{tg}\theta_1 = c_2, \tag{6.5}$$

unde c_1 și c_2 sînt constante.

În felul acesta o familie de caracteristici este formată din drepte. Cum $p = \eta_0 + F(\theta) = \text{const.}$, rezultă că în lungul fiecărei drepte tensiunile sînt constante, adică avem o stare simplă de tensiune.

Soluția generală a ecuației (6.3) se scrie sub forma:

$$x_2 - x_1 \operatorname{tg} \theta_1 = \Phi(\theta_1). \tag{6.6}$$

Cazul 3°. Acest caz se tratează în mod analog cu cazul 2°. Ca și în cazul corpurilor izotrope [3] se poate demonstra:

Teorema 6.1. Un domeniu cu o stare uniformă de tensiune se învecinează cu un domeniu cu o stare simplă de tensiune.

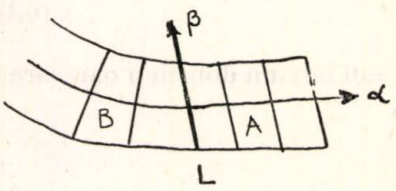


Fig. 2

Demonstrație. Fie linia L (fig. 2) frontieră a domeniului cu o stare uniformă de tensiune pe care să o considerăm linie β. Pe această linie $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ și, după proprietatea 4.4, rezultă că în domeniul vecin B toate liniile caracteristice (β) vor fi linii drepte. Cealaltă familie de caracteristici este determinată de (6.6).

7. CONDIȚII LA LIMITĂ PENTRU TENSIUNI

Fie pe conturul (C) date componentele X_n^1 și X_n^2 ale vectorului de tensiune. În baza relațiilor lui Cauchy avem

$$\begin{aligned} X_n^1 &= \sigma_{11} \cos \alpha + \sigma_{12} \sin \alpha, \\ X_n^2 &= \sigma_{12} \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha, \end{aligned} \tag{7.1}$$

unde cu α am notat unghiul făcut de normala la conturul (C) cu axa Ox_1.

Introducem mărimile:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_n &= X_n^1 \cos\alpha + a\, X_n^2 \sin\alpha, \\ \bar{\tau}_n &= - X_n^1 \sin\alpha + a\, X_n^2 \sin \alpha. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dacă $a = 1$ (corp izotrop), mărimile introduse prin (7.2) se reduc la componenta normală, respectiv tangențială, a vectorului de tensiune. Relațiile (7.2), în baza relațiilor (7.1), pot fi scrise:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_n &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + a\sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - a\,\sigma_{22}) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(1 + a)\sigma_{12} \sin 2\,\alpha, \\ \bar{\tau}_n &= -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - a\,\sigma_{22}) \sin 2\alpha + \sigma_{12}(a \cos^2\alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Ne punem problema să determinăm direcţii pe care $\bar{\sigma}_n$ şi $\bar{\tau}_n$ să aibă valori extreme şi în felul acesta vom obţine interpretări pentru funcţiile p şi θ. Punînd condiţia de extremum pentru $\bar{\sigma}_n$ $\left(\frac{d\bar{\sigma}_n}{d\alpha} = 0\right)$ obţinem :

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{(1+a)\sigma_{12}}{\sigma_{11} - a\sigma_{22}}. \tag{7.4}$$

Există două direcţii pe care $\bar{\sigma}_n$ are valori extreme, acestea fiind determinate de $\alpha = \gamma$ şi $\alpha = \gamma + 90°$.

Dacă avem în vedere (3.1), putem scrie

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{1+a}{M} \operatorname{tg} 2\theta \tag{7.5}$$

şi în felul acesta obţinem o interpretare pentru funcţia θ.

Punînd condiţia de extremum pentru $\bar{\tau}_n$ găsim :

$$\operatorname{tg} 2\gamma_1 = -\frac{\sigma_{11} - a\sigma_{22}}{(1+a)\sigma_{12}} \tag{7.6}$$

şi dacă utilizăm din nou (3.1) obţinem

$$\operatorname{tg} 2\gamma_1 = -\frac{M}{1+a} \operatorname{ctg}\theta. \tag{7.7}$$

Direcţiile pentru care $\bar{\tau}_n$ este extremum, bisectează unghiul dintre direcţiile pentru care $\bar{\sigma}_n$ este extremum. Notînd cu $\bar{\sigma}_1$ şi $\bar{\sigma}_2$ valorile extreme ale lui $\bar{\sigma}_n$, folosind (7.3) şi (7.4), obţinem :

$$\bar{\sigma}_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + a\,\sigma_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - a\,\sigma_{22})^2 + (1+a)^2\,\sigma_{12}^2}. \tag{7.8}$$

Pe direcţiile determinate de (7.4) valoarea lui $\bar{\tau}_n$ este

$$\bar{\tau}_n = \frac{a-1}{2}\sigma_{12}. \tag{7.9}$$

Calculînd valorile extreme ale lui $\bar{\tau}_n$ găsim :

$$\bar{\tau}_{1,2} = \pm(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2) + \frac{a-1}{2}\sigma_{12}. \tag{7.10}$$

Pe direcțiile definite de (7.6) avem

$$\bar{\sigma}_n = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + a\sigma_{22}) = p. \tag{7.11}$$

Am obținut astfel o interpretare pentru funcția p și anume ea reprezintă valoarea lui $\bar{\sigma}_n$ pe direcțiile pe care $\bar{\tau}_n$ este extremum. Corpul fiind presupus în stare plastică are loc deci (3.1), din (7.3) găsim :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_n &= p + \frac{N}{2}\cos 2\theta \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(1+a)\frac{N}{M}\sin 2\theta \sin 2\alpha, \\ \bar{\tau}_n &= -\frac{N}{2}\cos 2\theta \sin 2\alpha + \frac{N}{M}\sin 2\theta(a\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Dacă $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2$ (s) sînt ecuațiile conturului (C), X_n^1, X_n^2 fiind date, putem calcula pe $\bar{\sigma}_n$ (s) și $\bar{\tau}_n$ (s), încît putem socoti date pe conturul (C) $p = p(s)$, $\theta = \theta(s)$ și deci pe ξ și η.

Avînd în vedere că sistemul (3.3) este de tip hiperbolic, problemele la limită care se formulează sînt cele obișnuite pentru sisteme de ecuații hiperbolice.

8. CAZURI PARTICULARE DE CONDIȚII LA LIMITĂ PENTRU TENSIUNI

Cazul 1°. Frontiera corpului este rectilinie, paralelă cu Ox_1 și liberă de tensiuni (fig. 3). În acest caz $X_n^1 = X_n^2 = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Deducem imediat, avînd în vedere (7.2), că $\bar{\sigma}_n = \bar{\tau}_n = 0$. Aceasta înseamnă că

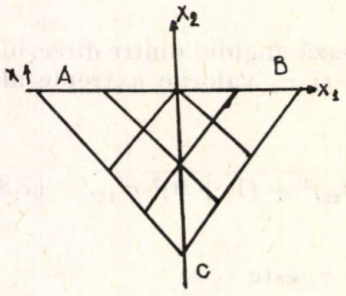


Fig. 3

$$\begin{aligned} p - \frac{N}{2}\cos 2\theta &= 0, \\ -\frac{N}{M}\sin 2\theta &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Din relațiile (8.1) găsim

$$\begin{aligned} \theta &= \pm\frac{\pi}{2} + 2K\pi, \\ p &= \mp\frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Dacă acum avem în vedere (3.1), se constată că :

$$\sigma_{11} = \pm \frac{N}{2}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \tag{8.3}$$

fapt ce arată că în vecinătatea frontierei avem o întindere sau comprimare în direcţia lui Ox_1. Caracteristicile sistemului în tensiuni (3.3) sînt drepte înclinate faţă de Ox_1 cu unghiurile θ_1 respectiv θ_2 determinate de :

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{a}}, \tag{8.4}$$

iar unghiul dintre caracteristici este

$$\operatorname{tg} 2\psi = (a - 1)\sqrt{a}. \tag{8.5}$$

Pentru acest caz particular de condiţii la limită dăm mai jos valorile unghiurilor θ_1, θ_2 şi ψ pentru diverse materiale.

Tabela 1

Material	Valorile constantelor elastice						θ_1	θ_2	ψ	a
	a_{11}	a_{22}	a_{33}	a_{23}	a_{13}	a_{12}				
Argonit	6,95	13,2	12,2	−2,38	0,43	−3,04	140°16′	39°44′	100°32′	1,4484
Lemn de fag	878	72,6	447	−33	−325	−38	115°54′	64°6′	51°48′	0,4855
α-uraniu	4,91	6,73	4,79	−2,61	0,08	−1,19	131°50′	48°10′	83°50′	0,8958

Observaţie. Unitatea de măsură pentru constantele elastice a_{ij} este 10^{-13} cm²/dyne [7].

Cazul 2°. Frontiera corpului este rectilinie, paralelă cu Ox_1 şi încărcată normal.

Avînd în vedere că în acest caz $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi $X_n^1 = 0$, deducem din (7.12) că :

$$p - \frac{N}{2}\cos 2\theta = aX_n^2,$$

$$-\frac{N}{M}\sin 2\theta = 0. \tag{8.6}$$

De aici

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} + 2K\pi,$$

$$p = aX_n^2 \mp \frac{N}{2} \tag{8.7}$$

și deci

$$\sigma_{11} = aX_n^2 \mp \frac{N}{2}, \quad \sigma_{22} = X_n^2, \quad \sigma_{12} = 0. \tag{8.8}$$

Rezultă de aici că frontiera Ox_1 reprezintă direcția pentru care $\bar{\sigma}_n$ este extremum.

9. DETERMINAREA VITEZELOR

Sistemul (2.6) pentru determinarea vitezelor, avînd în vedere (3.1), poate fi scris sub forma :

$$\begin{gathered} a\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \\ M \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) - (1+a)\cos 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) = 0. \end{gathered} \tag{9.1}$$

Adăugînd la acest sistem

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 &= \mathrm{d}v_1, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 &= \mathrm{d}v_2, \end{aligned} \tag{9.2}$$

găsim ecuațiile diferențiale ale caracteristicilor sistemului (9.1) de forma :

$$\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)_{1,2} = \frac{M \sin 2\theta \pm \sqrt{M^2 \sin^2 2\theta + 4a\cos^2 2\theta}}{2a \cos 2\theta}. \tag{9.3}$$

Comparînd (9.3) cu (3.4), se observă că caracteristicile sistemului în viteze coincid cu caracteristicile sistemului în tensiuni. În lungul caracteristicilor au loc relațiile :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v_1 + \operatorname{tg}\theta_1\,\mathrm{d}v_2 &= 0, \quad \text{pe liniile } (\alpha), \\ \mathrm{d}v_1 + \operatorname{tg}\theta_2\,\mathrm{d}v_2 &= 0, \quad \text{pe liniile } (\beta). \end{aligned} \tag{9.4}$$

Aceste relații sînt analoge relațiilor din cazul corpului izotrop [3].

Dacă într-un domeniu oarecare avem o stare uniformă de tensiune (θ = const.), găsim

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 \operatorname{tg}\theta_1 &= f(\xi), \\ v_1 + v_2 \operatorname{tg}\theta_2 &= g(\eta) \end{aligned} \tag{9.5}$$

unde $f(\xi)$ și $g(\eta)$ sînt funcții arbitrare.

Primită la redacție la 28 iulie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. C. I. Borș, *Sur la théorie de la plasticité des corps orthotropes*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sec. Sci. tech., *9* 541–543 (1966).
2. C. I. Borș, V. Diaconița, *Plastic plane deformations of orthotropes bodies*, An. șt. Univ. Iași, **XIII**, s. I a (1967), p. 123–128.
3. M. L. Kachanov, *Osnovy teorii plastichnosti*, Moskva, 1969.
4. R. Hill, *The theory of plane plastic strain for anisotropic metals*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A *198* p. 428–437 (1949).
5. V. O. Geogdjaev, *Plasticheskoe ploskoe deformirovannoe sostoianie ortotropnih sred*, Tr. Mosk. Fiz.–tehn. in-ta., 1958, vîp. I, 55–68.
6. D. C. Drucker, *Some implications of work-hardening and ideal plasticity*, Quart. Appl. Math., **7**, *2* 411–418 (1949).
7. R. F. Herman, *An introduction to applied anisotropic elasticity*, Oxford University Press, 1961.

STUDII

STABILITATEA DINAMICĂ SPAȚIALĂ A BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI DE SECȚIUNI DESCHISE, SOLICITATE PRIN FORȚE AXIALE PERIODICE URMĂRITOARE

de GH. MIHĂIȚĂ
Universitatea din Craiova

În lucrare se stabilesc ecuațiile vibrațiilor parametrice forțate de încovoiere-răsucire ale barelor cu pereți subțiri de secțiuni deschise, acționate de forțe exterioare axiale periodice urmăritoare, sub forma unui sistem cu o triplă infinitate de ecuații diferențiale de ordinul al doilea, omogene, liniare și cu coeficienți periodici.
Bazat pe teoria stabilității soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți periodici, se pun în evidență în total o triplă infinitate de domenii de instabilitate dinamică, pulsația critică a sarcinei la limitele acestor domenii reprezentînd soluțiile unor ecuații algebrice a căror coeficienți includ parametrii sistemului elastic și ai excitațiilor.

Problema vibrațiilor parametrice ale barelor elastice excitate prin forțe axiale cu variație periodică în timp este de multă vreme pusă. Monografiile existente în legătură cu stabilitatea dinamică a sistemelor elastice [1] [3] [5], se referă pe larg la această problemă, iar cercetările mai recente [4], [13] studiază stabilitatea dinamică a barelor monolite sub acțiunea forțelor periodice urmăritoare.

Literatura de specialitate existentă [1] [9] [13], se referă și la vibrațiile și stabilitatea dinamică a barelor cu pereți subțiri de secțiuni deschise considerate însă în cazuri particulare de rezemare și excitare. Astfel este considerat numai cazul mai simplu al rezemării articulate la capete și al excitării prin forțe axiale periodice de direcție fixă aplicate în capetele barelor.

În privința vibrațiilor și stabilității barelor cu pereți subțiri de secțiuni deschise sub acțiunea forțelor urmăritoare, preocupărilor cercetătorilor s-au orientat numai asupra cazurilor de forțe urmăritoare transversale [2] [3].

În lucrarea prezentă se urmărește studiul stabilității dinamice a barelor prismatice cu pereți subțiri de secțiuni deschise excitate prin forțe exterioare periodice axiale urmăritoare oarecare, modul de rezemare al barei fiind neprecizat.

ST. CERC. MEC. APL.,TOM. 33, NR.3, 1974, P. 533–561

În prima parte a lucrării, utilizînd funcțiile de influență ale deplasărilor și teoria ecuațiilor integrale cu nucleu simetric, se stabilesc ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor forțate parametrice ale barei cu pereți subțiri de secțiune deschisă constantă, acționată de forțe periodice axiale următoare, sub forma unui sistem cu o triplă infinitate de ecuații diferențiale de ordinul al doilea cu coeficienți periodici, liniare și omogene.

În partea doua a lucrării, bazată pe teoria stabilității soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți periodici [1] [6], se delimitează domeniile de instabilitate dinamică. Se obțin în total o triplă infinitate de domenii de instabilitate la a căror limită pulsația critică a excitației se determină din ecuații algebrice.

1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE VIBRAȚIILOR FORȚATE PARAMETRICE

Se consideră ca în figura 1 o bară dreaptă cu pereți subțiri de secțiune deschisă constantă avînd lungimea l și grosimea peretelui δ. Modul de rezemare al barei se presupune a fi oarecare, iar solicitarea sa

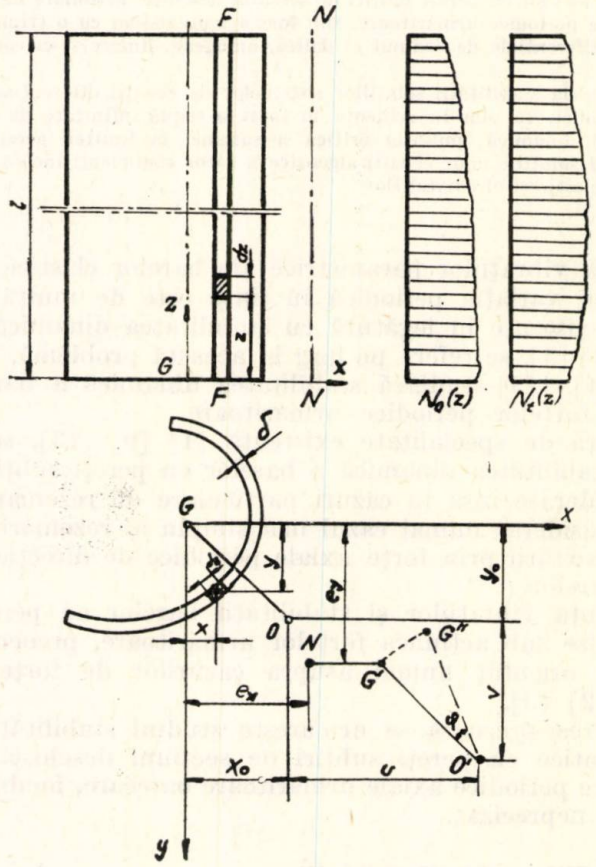


Fig. 1.

se face prin forțe externe periodice axiale oarecare, avînd fiecare cîte o componentă statică de direcție fixă și una variabilă periodic în timp, avînd direcția rotitoare odată cu fibra longitudinală a barei pe care se aplică.

Corespunzător cu aceasta, se va presupune forța axială în bară cunoscută sub forma,

$$N(z, t) = \alpha N_0(z) + \beta N_t(z)\Phi(t), \tag{1}$$

în care $N_0(z)$ și $N_t(z)$ sînt funcții caracterizînd distribuția în lungul barei a componentei statice a sarcinei excitatoare și, respectiv, a celei dinamice, $\Phi(t)$ o funcție periodică de timp,

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(t),$$

iar α și β doi parametrii.

Se raportează bara la un sistem de axe triortogonal ca în figura 1, cu axa z după axa barei, iar axele x și y după direcțiile principale de inerție ale secțiunii.

Sub acțiunea forțelor axiale periodice excitatoare, bara elastică cu pereți subțiri va executa vibrații forțate de încovoiere — răsucire. În procesul de vibrație, o secțiune transversală a barei se va deplasa în direcția axelor principale de inerție ale secțiunii x și y cu cantitățile u și, respectiv, v, se va roti în jurul centrului de răsucire O de coordonate x_0 și y_0 cu unghiul φ, iar centrul de răsucire se va deplasa în lungul axei barei cu cantitatea w.

Un punct curent al secțiunii barei, de coordonate x și y, va avea în sistemul de axe $Gxyz$ următoarele deplasări :

$$u' = u + (y_0 - y)\varphi,$$

$$v' = v - (x_0 - x)\varphi,$$

$$w' = w - \frac{\partial u}{\partial z} y - \frac{\partial v}{\partial z} x - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \omega.$$

Dacă se detașează din bară o fișie elementară FF, corespunzătoare arcului elementar ds, iar din aceasta un element dz (fig. 1), forța de inerție acționînd asupra acestuia din urmă va avea, în direcțiile axelor sistemului, componentele,

$$dF_x^i = - \rho\, dA\, dz \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u + (y_0 - y)\varphi],$$

$$dF_y^i = - \rho\, dA\, dz \frac{\partial^2}{\partial t^2} [v - (x_0 - x)\varphi], \tag{a}$$

$$dF_z^i = - \rho\, dA\, dz \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[w - \frac{\partial u}{\partial z} y - \frac{\partial v}{\partial z} x - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \omega \right],$$

$dA = \delta\, ds$ reprezentînd elementul de arie al secțiunii, iar ρ densitatea materialului barei.

În direcțiile transversale vor acționa asupra fișiei FF sarcinile externe distribuite avînd intensitățile,

$$dp_x^i = -\rho\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (y_0 - y)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right] dA,$$
$$dp_y^i = -\rho\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (x_0 - x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right] dA, \tag{b}$$

iar asupra barei întregi,

$$p_x^i = \int_A dp_x^i = -m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + y_0\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right),$$
$$p_y^i = \int_A dp_y^i = -m\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - x_0\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right), \tag{2}$$

$m = \rho A$, reprezentînd masa unității de lungime de bară.

Forța distribuită pe unitatea de lungime de bară și unitatea de lungime de arc, datorită forțelor de inerție acționînd în direcția axei barei, este, conform cu a treia relație (a),

$$p_z^i = -m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial z\,\partial t^2}\,x - \frac{\partial^3 u}{\partial z\,\partial t^2}\,y - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z\,\partial t^2}\,\omega\right). \tag{3}$$

Forțele transversale (b) dau față de axa centrelor de răsucire momentul distribuit,

$$dm_z^i = \left\{(x_0 - x)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (x_0 - x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right] - (y_0 - y)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (y_0 - y)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right]\right\}\rho\, dA$$

Pentru bara întreagă se va obține

$$m_z^i = \int_A dm_z^i = m\left(x_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - y_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r_0^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right), \tag{4}$$

r_0 fiind raza polară de inerție în raport cu centrul de răsucire,

$$r_0^2 = \frac{I_0}{A}; \qquad I_0 = I_x + I_y + (x_0^2 + y_0^2)\,A.$$

Forța axială $N(z, t)$, acționînd excentric, va produce în fibrele barei eforturi unitare normale σ de forma

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{Ne_y y}{I_x} - \frac{Ne_x}{I_y},$$

e_x și e_y fiind coordonatele excentricității axei forțelor excitatoare.

Pe suprafața elementară dA eforturile unitare σ dau o rezultantă, ale cărei componente perpendiculare pe axa deformată a barei, în direcțiile axei principale de inerție, sînt,

$$\begin{aligned} dT_x^N &= -\sigma \frac{\partial}{\partial z}[u + (y_0 - y)\varphi]\, dA, \\ dT_y^N &= -\sigma \frac{\partial}{\partial z}[v - (x_0 - x)\varphi]\, dA. \end{aligned} \tag{c}$$

Forțele externe distribuite corespunzătoare forțelor tăietoare elementare (c) sînt,

$$\begin{aligned} dp_x^N &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma \frac{\partial}{\partial z}\left[u + (y_0 - y)\varphi\right] dA\right\}, \\ dp_y^N &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma \frac{\partial}{\partial z}\left[v - (x_0 - x)\varphi\right] dA\right\}. \end{aligned} \tag{d}$$

Pentru bara întreagă se va obține,

$$\begin{aligned} p_x^N &= \int_A dp_x^N = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z, t)\left[\frac{\partial u}{\partial z} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\right\}, \\ p_y^N &= \int_A dp_y^N = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z, t)\left[\frac{\partial v}{\partial z} - (x_0 - e_x)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Forțele distribuite (d) dau față de axa centrelor de răsucire momentul distribuit,

$$\begin{aligned} dm_z^N = (y_0 - y)\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma \frac{\partial}{\partial z}[u + (y_0 - y)\varphi] dA\right\} - \\ - (x_0 - x)\frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma \frac{\partial}{\partial z}[v - (x_0 - x)\varphi]\, dA\right\}. \end{aligned}$$

Integrînd pe secțiunea transversală a barei va rezulta

$$m_z^N = \frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,t)\left[(x_0 - e_x)\frac{\partial v}{\partial z} - (y_0 - e_y)\frac{\partial u}{\partial z} - (e_y\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\right\}, \tag{6}$$

β_1 și β_2 avînd semnificațiile cunoscute [9],

$$\beta_1 = \frac{1}{I_x}\int_A y(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A - 2y_0,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{I_y}\int_A x(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A - 2x_0.$$

Forțele excitatoare fiind urmăritoare, vor avea și o componentă normală la axa barei.

Se va presupune, pentru generalitate, că forțele externe, respectiv componentele dinamice ale acestora, sînt parțial urmăritoare. Astfel, dacă rotirile axei excentrice după care acestea se aplică sînt

$$\psi_u = \frac{\partial u}{\partial z} = (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\psi_v = \frac{\partial v}{\partial z} - (x_0 - e_x)\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

asupra barei vor acționa, normal la axa deformată a sa, în plane paralele cu planele principale de inerție, forțele distribuite,

$$p_x^t(z,t) = -\varepsilon\psi_u p_t(z,t) = \varepsilon\beta\frac{\mathrm{d}N_t(z)}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\Phi(t),$$

$$p_y^t(z,t) = -\varepsilon\psi_v p_t(z,t) = \varepsilon\beta\frac{dN_t(z)}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\partial v}{\partial z} - (x_0 - e_x)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\Phi(t), \tag{7}$$

în care ε este un parametru pozitiv și subunitar.

Pentru $\varepsilon = 1$, se obține cazul forțelor „fidel urmăritoare" adică al forțelor care rămîn tangente la fibra deformată pe care se aplică, iar pentru $\varepsilon = 0$ se obține cazul forțelor de direcție fixă.

Forțele distribuite (7) produc, față de centrul de răsucire al profilului, momentul exterior distribuit,

$$m_z^t = -\varepsilon\beta\left(\frac{\mathrm{d}N_t(z)}{\mathrm{d}z}\left\{(x_0 - e)\frac{\partial v}{\partial z} - (y_0 - e_y)\frac{\partial u}{\partial z} - [(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2]\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\}\Phi(t). \tag{8}$$

Deplasările și rotirea secțiunii transversale a unei bare cu pereți subțiri de secțiune deschisă sînt date de sistemul de ecuații [9],

$$EI_y u^{IV} - q_x - \int \frac{\partial p_z}{\partial z} x\,ds = 0,$$

$$EI_x v^{IV} - q_y - \int \frac{\partial p_z}{\partial z} y\,ds = 0, \tag{9}$$

$$EI_\omega \varphi^{IV} - GI_t \varphi'' - m_z - \int \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega\,ds = 0,$$

în care q_x și q_y sînt sarcini transversale distribuite, m_z este moment de răsucire extern distribuit, iar p_z este forța distribuită pe unitatea de lungime de bară și unitatea de lungime de contur în direcția axei z.

Pentru bara în mișcare vibratorie forțele q_x și q_y rezultă prin însumarea rezultatelor parțiale date prin formulele (2), (5) și (7);

$$q_x = -m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,\,t)\left[\frac{\partial u}{\partial z} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\right\} +$$

$$+ \varepsilon\beta \frac{dN_t(t)}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\}\Phi(t),$$

$$q_y = -m\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,t)\left[\frac{\partial v}{\partial z} - (x_0 - e_x)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\right\} + \tag{10}$$

$$+ \varepsilon\beta \frac{dN_t(z)}{dz}\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\}\Phi(t),$$

m_z este reprezentat prin suma componentelor exprimate prin (4), (6) și (8);

$$m_z = m\left(x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,\,t)\left[(x_0 - e_x)\frac{\partial v}{\partial z} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - (y_0 - e_y)\frac{\partial u}{\partial z} - (e_y\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\right\} - \varepsilon\beta \frac{dN_t(z)}{dz}\left\{(x_0 - e_x)\frac{\partial v}{\partial z} -\right.$$

$$\left. - (y_0 - e_y)\frac{\partial u}{\partial z} - [(y_0 - e_y)^2 + (x_0 - e_x)^2]\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\}\Phi(t), \tag{11}$$

iar p_z este dat de expresia (3),

$$p_z = -m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial z\,\partial t^2}x - \frac{\partial^3 u}{\partial z\,\partial t^2}y - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z\,\partial t^2}\omega\right). \tag{12}$$

Dacă, pentru bara dată, funcțiile de influență ale deplasărilor și rotirii secțiunilor barei sînt $G_u(z,\eta)$, $G_v(z,\eta)$, $G_\varphi(z,\eta)$, deplasările u, v și rotirea φ în procesul de vibrație se scriu :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \int_0^l G_u(z,\eta)\left[q_x(\eta,t) + \int \frac{\partial p_z(\eta,t)}{\partial \eta}\, n\,ds\right] d\eta, \\ v(z,t) &= \int_0^l G_v(z,\eta)\left[q_y(\eta,t) + \int \frac{\partial p_z(\eta,t)}{\partial \eta}\, y\,ds\right] d\eta, \\ \varphi(z,t) &= \int_0^l G_\varphi(z,\eta)\left[m_z(\eta,t) + \int \frac{\partial p_z(\eta,t)}{\partial \eta}\,\omega\,ds\right] d\eta. \end{aligned} \tag{13}$$

Înlocuind q_x, q_y, m_z și p_z cu expresiile lor (10), (11), (12) și efectuînd integrările cerute în raport cu arcul ds, se obține,

$$\begin{aligned} &u(z,t) + \int_0^l G_u(z,\eta)\, m\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y_0\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - r_y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2 \partial t^2}\right] d\eta + \\ &+ \int_0^l G_u(z,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{N(\eta,t)\left[\frac{\partial u}{\partial \eta} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right]\right\} d\eta - \\ &- \varepsilon\beta\Phi(t)\int_0^l G_u(z,\eta)\frac{dN_t(\eta)}{d\eta}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right] d\eta = 0, \\ &v(z,t) + \int_0^l G_v(z,\eta)\, m\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - x_0\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - r_y^2\frac{\partial^4 u}{\partial \eta^2 \partial t^2}\right] d\eta + \\ &+ \int_0^l G_v(z,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{N(\eta,t)\left[\frac{\partial v}{\partial \eta} - (x_0 - e_x)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right]\right\} d\eta - \\ &- \varepsilon\beta\Phi(t)\int_0^l G_v(z,\eta)\frac{dN_t(\eta)}{d\eta}\left[\frac{\partial v}{\partial \eta} - (x_0 - e_x)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] d\eta = 0, \\ &\varphi(z,t) + \int_0^l G_\varphi(z,\eta)\, m\left[y_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + r_y^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - r_\omega^4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2 \partial t^2}\right] d\eta + \\ &+ \int_0^l G_\varphi(z,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{N(z,t)\left[(x_0 - e_x)\frac{\partial v}{\partial \eta} - (y_0 - e_y)\frac{\partial u}{\partial \eta} - \right.\right. \\ &\left.\left. - (e_y\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right]\right\} d\eta + \varepsilon\beta\Phi(t)\int_0^l G_\varphi(z,\eta)\frac{dN_t(\eta)}{d\eta}\left\{(x_0 - e_x)\frac{\partial v}{\partial \eta} - \right. \\ &\left. - (y - e_y)\frac{\partial u}{\partial \eta} - [(y_0 - e_y)^2 + (x_0 - e_x)^2]\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right\} d\eta = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

În ecuațiile (14) se dezvoltă deplasările $u(z, t)$, $v(z, t)$ și rotirea $\varphi(z, t)$ în serii de funcții după cîte un sistem fundamental complet de funcții $Z_k^u(z)$, $Z_k^v(z)$, $Z_k^\varphi(z)$, care să satisfacă condițiile la limită,

$$u(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^u(t)\, Z_k^u(z),$$

$$v(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^v(t)\, Z_k^v(z), \tag{15}$$

$$\varphi(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^\varphi(t)\, Z_k^\varphi(z),$$

amplitudinile $T_k^u(t)$, $T_k^v(t)$, $T_k^\varphi(t)$ fiind funcții de timp necunoscute.

Șirurile de funcții $Z_k^u(z)$, $Z_k^v(z)$, $Z_k^\varphi(z)$ pot fi alese în mod convenabil fie ca funcții ale vibrațiilor libere de încovoiere simplă în planele principale de inerție și de răsucire simplă satisfăcînd ecuațiile integrale omogene;

$$Z_k^u(z) - \omega_{u,k}^2 \int_0^l m G_u(z, \eta)\, Z_k^u(\eta)\, \mathrm{d}\eta = 0,$$

$$Z_k^v(z) - \omega_{v,k}^2 \int_0^l m G_v(z, \eta)\, Z_k^v(\eta)\, \mathrm{d}\eta = 0, \tag{16}$$

$$Z_k^\varphi(z) - \omega_{\varphi,k}^2 \int_0^l m r_0^2\, G_\varphi(z, \eta)\, Z_k^\varphi(\eta)\, \mathrm{d}\eta = 0,$$

cu aceleași condiții la limită ca și bara dată, fie ca funcții ale pierderii statice a stabilității datorită componentei statice $N_0(z)$ a forței axiale prin încovoiere în planele principale de inerție și prin răsucire satisfăcînd ecuațiile integrale,

$$\frac{\mathrm{d}Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z} - \alpha_{u,k} \int_0^l N_0(z)\, \frac{\partial^2 G_u(z, \eta)}{\partial z \partial \eta}\, \frac{\partial Z_k^u(\eta)}{\partial \eta}\, \mathrm{d}\eta = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z} - \alpha_{v,k} \int_0^l N_0(z)\, \frac{\partial^2 G_v(z, \eta)}{\partial z \partial \eta}\, \frac{\partial Z_k^v(\eta)}{\partial \eta}\, \mathrm{d}\eta = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} - \alpha_{\varphi,k} \int_0^l N_0(z)\, \frac{\partial^2 G_\varphi(z, \eta)}{\partial z \partial \eta}\, \frac{\partial Z_k^\varphi(\eta)}{\partial \eta}\, \mathrm{d}\eta = 0.$$

Conform ecuațiilor integrale (16) funcțiile $Z_k^u(z)$, $Z_k^v(z)$, $Z_k^\varphi(z)$ sînt funcții proprii ale nucleelor simetrice $G_u(z, \eta)$, $G_v(z, \eta)$ și $G_\varphi(z, \eta)$, bucurîndu-se de proprietatea de a fi ortogonale. Impunîndu-le în plus și condiția de normare, aceste funcții se vor folosi în calcule sub formă

ortonormată satisfăcînd relațiile

$$\int_0^l mZ_i^u(z)\, Z_k^u(z)\, dz = \delta_{ik}; \quad \int_k^l mZ_i^v(z)\, Z_k^v(z)\, dz = \delta_{ik},$$

$$\int_0^l mr_0^2 Z_i^\varphi(z)\, Z_k^\varphi(z)\, dz = \delta_{ik}. \tag{18}$$

în care

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq k, \\ 1 \text{ pentru } i = k \end{cases}$$

este simbolul lui Kroneker.

Potrivit ecuațiilor integrale (17), derivatele

$$\frac{dZ_k^u(z)}{dz}, \qquad \frac{dZ_k^v(z)}{dz}, \qquad \frac{dZ_k^\varphi(z)}{dz}$$

sînt funcții proprii ale derivatelor de ordinul al doilea ale nucleelor simetrice G_u, G_v, G_φ, și din această cauză vor fi ortogonale. Impunînd și condiția de normare, derivatele devin funcții ortonormate satisfăcînd relațiile

$$\int_0^l N_0(t) \frac{dZ_i^u(z)}{dz} \frac{dZ_k^v(z)}{dz}\, dz = \delta_{ik},$$

$$\int_0^l N_0(t) \frac{dZ_i^v(t)}{dz} \frac{dZ_k^v(t)}{dz}\, dz = \delta_{ik}, \tag{19}$$

$$\int_0^l N_0(t) \frac{dZ_i^\varphi(t)}{dz} \frac{dZ_k^\varphi(z)}{dz}\, dz = \delta_{ik}.$$

Conform unei binecunoscute teoreme din teoria ecuațiilor integrale, nucleele simetrice $G_u(z, \eta)$, $G_v(z, \eta)$, $G_\varphi(z, \eta)$ se pot dezvolta în serii pătratice după funcțiile proprii $Z_k^u(z)$, $Z_k^v(z)$ $Z_k^\varphi(z)$, soluții ale ecuațiilor integrale omogene (16) astfel:

$$G_u(z, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^u(z)\, Z_k^u(\eta)}{\omega_{u,k}^2},$$

$$G_v(z, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^v(z)\, Z_k^v(\eta)}{\omega_{v,k}^2}, \tag{20}$$

$$G_\varphi(z, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^\varphi(z)\, Z_k^\varphi(\eta)}{\omega_{\varphi,k}^2}.$$

Tot pe baza acestei teoreme, în conformitate cu ecuațiile integrale (17), se poate scrie,

$$\frac{\partial^2 G_u(t,\eta)}{\partial z\partial\eta}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{u,k}}\frac{\mathrm{d}Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}Z_k^u(\eta)}{\mathrm{d}\eta},$$

$$\frac{\partial^2 G_v(t,\eta)}{\partial z\partial\eta}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{v,k}}\frac{\mathrm{d}Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}Z_k^v(\eta)}{\mathrm{d}\eta}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 G_\varphi(t,\eta)}{\partial z\partial\eta}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{\varphi,k}}\frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(\eta)}{\mathrm{d}\eta}.$$

Integrînd și presupunînd, în conformitate cu situațiile practice, că bara are cel puțin o secțiune în care deplasările și rotirea se anulează, rezultă

$$G_u(z,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k^u(z)\,Z_k^u(\eta)}{\alpha_{u,k}},$$

$$G_v(t,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k^v(z)\,Z_k^v(\eta)}{\alpha_{\varphi,k}}, \tag{22}$$

$$G_\varphi(t,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k^\varphi(z)\,Z_k^\varphi(\eta)}{\alpha_{\varphi,k}}.$$

Dezvoltînd în ecuațiile (14) funcțiile u, v, φ, în serii infinite (15), cu funcțiile $Z_k^u(z)$, $Z_k^v(z)$, $Z_k^\varphi(z)$, soluții ale ecuațiilor integrale (16), ținînd seama de condițiile de ortonormare (18) și de dezvoltările (20) ale nucleelor, va rezulta în urma efectuării tuturor calculelor :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{ik}^{uu}\frac{\mathrm{d}^2T_k^u}{\mathrm{d}t^2}Z_i^u(z)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{ik}^{u\varphi}\frac{\mathrm{d}^2T_k^u}{\mathrm{d}t^2}Z_i^u(z)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k^uZ_k^u(z)-$$

$$-\alpha\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^{uu}T_k^uZ_i^u(z)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^{u\varphi}T_k^\varphi Z_i^u(z)\right]-$$

$$-\beta\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_{ik}^{uu}T_k^uZ_i^u(z)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_{ik}^{u\varphi}T_k^\varphi Z_i^u(z)\right]+$$

$$+\varepsilon\beta\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_{ik}^{uu}T_k^uZ_i^u(z)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}b_{ik}^{u\varphi}T_k^\varphi Z_i^u(z)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}h_{ik}^{uu}T_k^uZ_i^u(z)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}h_{ik}^{u\varphi}T_k^\varphi Z_i^u(\mathrm{t})\right]=0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{vv}\frac{\mathrm{d}^2 T_k^v}{\mathrm{d}t^2} Z_i^v(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{v\varphi}\frac{d^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} Z_i^v(z) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k^v Z_k^v(z) -$$

$$- \alpha\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{vv} T_k^\varphi Z_i^v(z) - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{v\varphi} T_k^\varphi Z_i^v(z)\right] -$$

$$- \beta\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{vv} T_k^v Z_i^v(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{v\varphi} T_k^\varphi Z_i^v(z)\right] + \tag{23}$$

$$+ \varepsilon\beta\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{vv} T_k^v Z_i^v(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{v\varphi} T_k^\varphi Z_i^v(z) +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} h_{ik}^{vv} T_k^v Z_i^v(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}^{v\varphi} T_k^\varphi Z_i^v(z)\right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{\varphi\varphi}\frac{\mathrm{d}^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} Z_i^\varphi(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{\varphi u}\frac{\mathrm{d}^2 T_k^u}{\mathrm{d}t^2} Z_\varphi^i(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{v\varphi}\frac{\mathrm{d}^2 T_k^v}{\mathrm{d}t^2} Z_i^\varphi(z) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\gamma=1}^{\infty} T_k^\varphi Z_k^\varphi(z) - \alpha\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi u} T_k^u Z_i^\varphi(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi u} T_k^u Z_i^\varphi(z) +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi v} T_k^v Z_i^\varphi(z)\right] - \beta\,\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi\varphi} T_k^\varphi Z_i^\varphi(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi u} T_k^u Z_i^\varphi(z) +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi v} T_k^v Z_i^\varphi(z)\right] + \varepsilon\beta\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\prime\varphi\varphi} T_k^\varphi Z_i^\varphi(z) +\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi u} T_k^u Z_i^\varphi(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi v} T_k^v Z_i^\varphi(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}^{\varphi\varphi} T_k^\varphi Z_i^\varphi(z) +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}^{\varphi u} T_k^u Z_i^\varphi(\mathrm{t}) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}^{\varphi v} T_k^u Z_i^\varphi(z)\right] = 0.$$

unde

$$C_{ik}^{uu} = \frac{m}{\omega_{u,i}^2}\int_0^l Z_i^u(z)\, Z_k^u(z)\,\mathrm{d}z - \frac{mr_y^2}{\omega_{u,i}^2}\int_0^l Z_i^u(\mathrm{t})\frac{\mathrm{d}^2 Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$C_{ik}^{vv} = \frac{m}{\omega_{u,i}^2}\int_2^l Z_i^v(z)\, Z_k^v(z)\,\mathrm{d}z - \frac{mr_x^2}{\omega_{v,i}^2}\int_0^l Z_i^v(z)\,\frac{\mathrm{d}^2 Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$C_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{mr_0^2}{\omega_{\varphi,i}^2}\int_0^l Z_i^\varphi(t)\; Z_k^\varphi(t)\;\mathrm{d}z - \frac{mr_\omega^4}{\omega_{\varphi,i}^2}\int_0^l Z_i^\varphi(t)\;\frac{\mathrm{d}^2 Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$C_{ik}^{u\varphi} = \frac{my_0}{\omega_{u,i}^2}\int_0^l Z_i^u(t)\, Z_k^\varphi(t)\, \mathrm{d}z,$$

$$C_{ik}^{\varphi v} = -\frac{mx_0}{\omega_{v,i}^2}\int_0^l Z_i^v(t)\, Z_k^\varphi(t)\, \mathrm{d}z,$$

$$C_{ik}^{\varphi u} = \frac{my_0}{\omega_{\varphi,i}^2}\int_0^l Z_i^\varphi(t)\, Z_k^u(t)\, \mathrm{d}z,$$

$$C_{ik}^{\varphi v} = -\frac{mx_0}{\omega_{\varphi,i}^2}\int_0^l Z_i^\varphi(t)\, Z_k^v(t)\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{uu} = \frac{1}{\omega_{u,i}^2}\int_0^l N_0(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^u(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^u(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{vv} = \frac{1}{\omega_{v,i}^2}\int_0^l N_0(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^v(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^v(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{e_y\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2}{\omega_{\varphi,i}^2}\int_0^l N_0(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z, \qquad (24)$$

$$a_{ik}^{u\varphi} = \frac{y_0 - e_y}{\omega_{u,i}^2}\int_0^l N_0(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^u(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{v\varphi} = -\frac{x_0 - e_x}{\omega_{v,i}^2}\int_0^l N_0(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^v(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{\varphi u} = \frac{y_0 - e_y}{\omega_{\varphi,i}^2}\int_0^l N_0(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^u(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{\varphi v} = -\frac{x_0 - e_x}{\omega_{\varphi,i}^2}\int_0^l N_0(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^v(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{uu} = \frac{1}{\omega_{u,i}^2}\int_0^l N_t(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^u(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^u(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{vv} = \frac{1}{\omega_{v,i}^2}\int_0^l N_t(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^v(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^v(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{e_y\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2}{\omega_{\varphi,i}^2}\int_0^l N_t(t)\, \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(t)}{\mathrm{d}z}\, \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{u\varphi} = \frac{y_0 - e_y}{\omega_{u,i}^2} \int_0^l N_t(t) \frac{\mathrm{d}Z_i^u(t)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{v\varphi} = -\frac{x_0 - e_x}{\omega_{v,i}^2} \int_0^l N_t(t) \frac{\mathrm{d}Z_i^v(t)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{\varphi u} = \frac{y_0 - e_y}{\omega_{\varphi,i}^2} \int_0^l N_j(t) \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(t)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^u(t)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{\varphi v} = -\frac{x_0 - e_x}{\omega_{\varphi,i}^2} \int_0^l N_t(t) \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(t)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^v(t)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2}{\omega_{\varphi,i}^2} \int_0^l N_t(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(t)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^v(t)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$h_{ik}^{uu} = \frac{1}{\omega_{u,i}^2} \int_0^l N_t(t)\, Z_i^u(t) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$h_{ik}^{vv} = \frac{1}{\omega_{v,i}^2} \int_0^l N_t(t)\, Z_i^v(t) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^v(t)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$h_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2}{\omega_{\varphi,i}^2} \int_0^l N_t(t)\, Z_i^\varphi(z) \frac{d^2 Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$h_{ik}^{u\varphi} = \frac{y_0 - e_y}{\omega_{u,i}^2} \int_0^l N_t(t)\, Z_i^u(t) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$h_{ik}^{v\varphi} = -\frac{x_0 - e_x}{\omega_{v,i}^2} \int_0^l N_t(t)\, Z_i^v(t) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^\varphi(t)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$h_{ik}^{\varphi u} = \frac{y_0 - e_y}{\omega_{\varphi,i}^2} \int_0^l N_t(t)\, Z_i^\varphi(t) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^u(t)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$h_{ik}^{\varphi v} = -\frac{x_0 - e_x}{\omega_{\chi,i}^2} \int_0^l N_t(t)\, Z_i^\varphi(t) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^v(t)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z.$$

Pentru satisfacerea ecuațiilor (23) trebuie să se anuleze toți coeficienții funcțiilor $Z_k^u(z)$, $Z_k^v(z)$, $Z_k^\varphi(z)$; va rezulta prin aceasta :

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{uu} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^u}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{u\varphi} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} + T_i^u - \alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{uu}\, T_k^u + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{u\varphi}\, T_k^\varphi \right) - \beta\, \Phi(t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [b_{ik}^{uu} - \varepsilon(b_{ik}^{uu} + h_{ik}^{uu})]\, T_k^u + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} [b_{ik}^{u\varphi} - \varepsilon\,(b_{ik}^{u\varphi} + h_{ik}^{u\varphi})]\, T_k^\varphi \right\} = 0, \quad i = 1,2,3,\ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{vv} \frac{d^2 T_k^v}{dt^2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{v\varphi} \frac{d^2 T_k^\varphi}{dt^2} - T_i^v - \alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{vv} T_k^u + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{v\varphi} T_k^\varphi \right) - \beta \Phi(t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [b_{ik}^{vv} - \varepsilon (b_{ik}^{vv} + h_{ik}^{vv})] T_k^v + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} [b_{ik}^{v\varphi} - \varepsilon (b_{ik}^{v\varphi} + h_{ik}^{v\varphi})] T_k^\varphi \right\} = 0, \; i = 1,2,3,\ldots, \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{\varphi\varphi} \frac{d^2 T_k^\varphi}{dt^2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{\varphi u} \frac{d^2 T_k^u}{dt^2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik}^{\varphi v} \frac{d^2 T_k^\varphi}{dt^2} + T_i^\varphi -$$

$$- \alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi\varphi} T_k^\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi u} T_k^u + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi v} T_k^v \right) - \beta \Phi(t) \{ [b_{ik}^{\varphi\varphi} -$$

$$- \varepsilon (b_{ik}^{\varphi\varphi} + h_{ik}^{\varphi\varphi})] T_k^\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} [b_{ik}^{\varphi u} - \varepsilon (b_{ik}^{\varphi u} + h_{ik}^{\varphi u})] T_k^u +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [b_{ik}^{\varphi v} - \varepsilon (b_{ik}^{\varphi v} + h_{ik}^{\varphi v})] T_k^v = 0, \; i = 1,2,3,\ldots,$$

adică un sistem cu o triplă infinitate de ecuații diferențiale liniare omogene și cu coeficienți, periodici avînd ca necunoscute funcțiile de timp $T_k^u(t)$, $T_k^v(t)$, $T_k^\varphi(t)$, sistem care se scrie restrîns sub forma,

$$C \frac{d^2 T}{dt^2} + [E - \alpha A - \beta \Phi(t) B] T = 0, \tag{26}$$

T fiind un hipervector infinit,

$$T = \left\| \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \end{matrix} \right\|, \tag{27}$$

avînd drept componente vectorii T_k ale căror componente sînt funcțiile necunoscute $T_k^u(t)$, $T_k^v(t)$, $T_k^\varphi(t)$,

$$T_k = \left\| \begin{matrix} T_k^u(t) \\ T_k^v(t) \\ T_k^\varphi(t) \end{matrix} \right\|, \tag{28}$$

C, A și B hipermatrici pătrate infinite,

$$C = \left\| \begin{matrix} C_{11} & C_{12} & \vdots \\ C_{21} & C_{22} & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{matrix} \right\|; \quad A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \vdots \\ A_{21} & A_{22} & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{matrix} \right\|; \quad B = \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & \vdots \\ B_{21} & B_{22} & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{matrix} \right\|, \tag{29}$$

ale căror elemente sînt matrice pătrate de ordinul trei,

$$C_{ik} = \begin{Vmatrix} C_{ik}^{uu} & 0 & C_{ik}^{u\varphi} \\ 0 & C_{ik}^{vu} & C_{ik}^{v\varphi} \\ C_{ik}^{\varphi u} & C_{ik}^{\varphi u} & C_{ik}^{\varphi\varphi} \end{Vmatrix}; \quad A_{ik} = \begin{Vmatrix} a_{ik}^{uu} & 0 & a_{ik}^{u\varphi} \\ 0 & a_{ik}^{vu} & a_{ik}^{v\varphi} \\ a_{ik}^{\varphi u} & a_{ik}^{\varphi u} & a_{ik}^{\varphi\varphi} \end{Vmatrix}$$

$$B_{ik} = \begin{Vmatrix} b_{ik}^{uu} - \varepsilon(b_{ik}^{uu} + h_{ik}^{uu}) & 0 & b_{ik}^{u\varphi} - \varepsilon(b_{ik}^{u\varphi} + h_{ik}^{u\varphi}) \\ 0 & b_{ik}^{vv} - \varepsilon(b_{ik}^{vv} + h_{ik}^{vv}) & b_{ik}^{v\varphi} - \varepsilon(b_{ik}^{v\varphi} + h_{ik}^{v\varphi}) \\ b_{ik}^{\varphi u} - \varepsilon(b_{ik}^{\varphi u} + h_{ik}^{\varphi u}) & b_{ik}^{\varphi v} - \varepsilon(b_{ik}^{\varphi v} + h_{ik}^{\varphi v}) & b_{ik}^{\varphi\varphi} - \varepsilon(b_{ik}^{\varphi\varphi} + h_{ik}^{\varphi\varphi}) \end{Vmatrix}, \tag{30}$$

iar E matricea unitate infinită.

Dacă se dezvoltă în ecuațiile (14) funcțiile u, v și φ în serii infinite (15) cu funcțiile $Z_k^u(z)$, $Z_k^v(z)$, $Z_k^\varphi(z)$, soluții ale ecuațiilor integrale ale pierderii statice a stabilității (17), și se urmează toate dezvoltările ca mai înainte, se obține același sistem de ecuație (26) pentru vibrațiile forțate parametrice, cu singura deosebire că pulsațiile vibrațiilor libere $\omega_{u,k}$, $\omega_{v,k}$, $\omega_{\varphi,k}$ se înlocuiesc prin parametrii critici ai sarcinilor $\alpha_{u,k}$, $\alpha_{v,k}$, $\alpha_{\varphi,k}$, iar funcțiile conținute sub semnul integrală de elementele matricelor C_{ik}, A_{ik} și B_{ik} sînt funcțiile ortonormate ale pierderii statice a stabilității în loc de funcțiile orotonormate ale vibrațiilor libere.

2. DELIMITAREA DOMENIILOR DE INSTABILITATE DINAMICĂ

Se consideră mai întîi cazul cel mai frecvent întîlnit cînd excitația este armonică, adică

$$\Phi(t) = \cos\ \theta t, \tag{31}$$

$\theta = 2\pi/\tau$ fiind pulsația excitației.

Ecuația matriceală a vibrațiilor forțate parametrice devine în acest caz,

$$C\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} + (E - \alpha A - \beta\, B\cos\ \theta t)T = 0. \tag{32}$$

După cum este cunoscut [1], [6], la limitele domeniilor de instabilitate dinamică sistemul de ecuații diferențiale (26) admite soluții periodice de perioadă egală cu perioada excitației $\Phi(t)$ și cu dublul acestei perioade, două soluții de aceeași perioadă delimitînd un domeniu de instabilitate dinamică, iar două soluții de perioade diferite un domeniu de stabilitate dinamică. În conformitate cu aceasta, se caută pentru sistemul (32), în vederea delimitării domeniilor de instabilitate dinamică, soluțiile periodice de perioadă $2\tau = 4\pi/\theta$,

$$T = \sum_{k=1,3,5,}^{\infty} \left(a_k \sin\frac{k\theta t}{2} + b_k \cos\frac{k\theta t}{2}\right), \tag{33}$$

și de perioadă $\tau = 2\pi/\theta$,

$$T = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=2,4,6,}^{\infty} \left(a_k \sin\frac{k\theta t}{2} + b_k \cos\frac{k\theta t}{2}\right), \tag{34}$$

a_k și b_k fiind hipervectori constanți.

Condiția de compatibilitate a sistemului algebric liniar și omogen în a_k și b_k ce se obține prin substituirea soluției (33) în sistemul (32)

furnizează ecuațiile algebrice de determinare a pulsației critice θ la limitele domeniilor de instabilitate 1, 3, 5.

$$\begin{vmatrix} E-\alpha A \pm \frac{1}{2}\beta B - \frac{1}{4}\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & \cdot \\ -\frac{1}{2}\beta B & E-\alpha A - \frac{9}{4}\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & \cdot \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta B & E-\alpha A - \frac{25}{4}\theta^2 C & \cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & & \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

În același mod, cu ajutorul soluției (34) se obțin ecuațiile algebrice de determinare a pulsației critice la limitele domeniilor de instabilitate 2, 4, 6...

$$\begin{vmatrix} E-\alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & \cdot \\ -\frac{1}{2}\beta B & E-\alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & \cdot \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta B & E-\alpha A - 16\theta^2 C & \cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & & \end{vmatrix} = 0, \quad (36)$$

$$\begin{vmatrix} E-\alpha A & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & 0 & \cdot \\ -\frac{1}{2}\beta B & E-\alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & \cdot \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta B & E-\alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & \cdot \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\beta B & E-\alpha A - 16\theta^2 C & \cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & & & \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

În situațiile practice de calcul, determinanții infiniți din ecuațiile pulsațiilor critice (35), (36), (37), se limitează la determinanți de ordinul n. În acest caz ecuațiile (35), (36), (37), vor fi ecuații algebrice de gradul $3n$, determinînd cu aproximație pulsațiile critice ale excitației la limitele primelor $3n$ domenii de instabilitate dinamică.

În cazul în care amplitudinea componentei variabile a sarcinii este foarte mică ($\beta \to 0$) ecuațiile pulsațiilor critice la limitele domeniilor de instabilitate dinamică devin,

$$\left|E - \alpha A - \frac{1}{4}k^2\theta^2 C\right| = 0, \; k = 1, 2, 3, \ldots \quad (38)$$

Comparînd (38) cu ecuația pulsațiilor vibrațiilor libere ale barei comprimată static prin forțele de parametru α,

$$|E - \alpha A - \omega^2 C| = 0, \tag{39}$$

va rezulta

$$\theta = \frac{2\omega}{k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

adică pulsația critică a sarcinii în acest caz este un submultiplu întreg al dublului pulsației vibrațiilor libere ale barei acționată de componenta statică a forțelor.

Granițele primelor domenii de instabilitate dinamică, domeniile principale, cele mai largi și mai importante din punct de vedere practic, se obțin cu suficientă precizie considerînd numai primul element al determinantului din ecuațiile (35) [1],

$$\left| E - \alpha A \pm \frac{1}{2}\beta B - \frac{1}{4}\theta^2 C \right| = 0. \tag{40}$$

Pulsațiile vibrațiilor de incovoiere-răsucire ale barei, încărcată static cu forțele de parametrii α și $\pm\,\beta/2$, se determină din ecuațiile,

$$\left| E - \alpha A \pm \frac{1}{2}\beta B - \omega^2_{\alpha,\ \pm\frac{1}{2}\beta} C \right| = 0. \tag{41}$$

Comparînd (40) cu (41) se deduce

$$\theta = 2\omega_{\alpha,\ \pm\frac{1}{2}\beta}, \tag{42}$$

adică pulsația critică a sarcinii la granițele domeniului principal de instabilitate dinamică este egală cu dublul pulsației vibrațiilor libere ale barei încărcată static cu sarcina avînd parametrii α, $\pm\,\frac{1}{2}\beta$.

În cazurile mai complicate de excitație, cînd funcția periodică $\Phi(t)$ nu este o variație armonică simplă, se procedează în mod cu totul asemănător pentru obținerea domeniilor de instabilitate.

Pentru funcțiile periodice $\Phi(t)$ care admit o dezvoltare de forma,

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \cos k\theta t, \tag{43}$$

ecuația stabilității dinamice va fi

$$C\frac{d^2T}{dt^2} + \left[E - \alpha A - \beta\Phi_0 B - \beta\left(\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \cos k\theta t\right)B\right]T = 0. \tag{44}$$

Căutînd pentru sistemul de ecuații diferențiale (44) soluțiile periodice de perioadă $4\pi/\theta$ și $2\pi/\theta$, sub forma (33) și (34), se ajunge la următoarele ecuații de determinare a pulsației critice la limitele domeniilor de instabilitate dinamică :

$$\begin{vmatrix} P-\Phi_0 Q \pm \frac{1}{2}\Phi_1 Q - \frac{\theta^2}{4} C & -\frac{1}{2}(\Phi_1 \pm \Phi_2)Q & -\frac{1}{2}(\Phi_2 \pm \Phi_3)Q & \cdots \\ -\frac{1}{2}(\Phi_1 \pm \Phi_2)Q & P-\Phi_0 Q \pm \frac{1}{2}\Phi_3 Q - \frac{9\theta^2}{4} C & -\frac{1}{2}(\Phi_1 \pm \Phi_4)Q & \cdots \\ -\frac{1}{2}(\Phi_2 \pm \Phi_3)Q & -\frac{1}{2}(\Phi_1 \pm \Phi_4)Q & P-\Phi_0 Q \pm \frac{1}{2}\Phi_5 Q - \frac{25\theta^2}{4} C & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0, \qquad (45)$$

$$\begin{vmatrix} P-\Phi_0 Q + \frac{1}{2}\Phi_2 Q - \theta^2 C & -\frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_3)Q & -\frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1)Q & \cdots \\ -\frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_5)Q & P-\Phi_0 Q + \frac{1}{2}\Phi_4\theta - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_5)Q & \cdots \\ -\frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_4)Q & -\frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_5)Q & P-\Phi_0 Q + \frac{1}{2}\Phi_5 Q - 16\,\theta^2 C & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (46)$$

$$\begin{vmatrix} P-\frac{1}{2}\Phi_0 Q & -\frac{1}{2}\Phi_1 Q & -\frac{1}{2}\Phi_2 Q & -\frac{1}{2}\Phi_3 Q & \cdots \\ -\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_3)Q & P-\Phi_0 Q - \frac{1}{2}\Phi_2 Q - \theta^2 C & -\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_3)Q & -\frac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_4)Q & \cdots \\ -\frac{1}{2}\Phi_4 Q & -\frac{1}{2}\Phi_1 + \Phi_3)Q & P-\Phi_0 Q - \frac{1}{2}\Phi_4 Q - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_5)Q & \cdots \\ -\frac{1}{2}\Phi_4 Q & -\frac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_4)Q & -\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_5)Q & P-\Phi_0 Q - \frac{1}{2}\Phi_5 Q - 16\theta^2 C & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0, \quad (47)$$

în care

$$P = E - \alpha A\,; \qquad Q = \beta B. \tag{48}$$

Neglijînd într-o primă aproximație influența armonicelor și reținînd în ecuațiile (45), (46) și (47) numai elementele după diagonală, acestea se scriu sub forma,

$$\left| P - \Phi_0 Q \pm \frac{1}{2}\Phi_k Q - \frac{k^2\theta^2}{4} C \right| = 0,$$

sau

$$\left| E - \alpha A - \beta\Phi_0 B \pm \frac{1}{2}\beta\Phi_k B - \frac{k^2\theta^2}{4} C \right| = 0. \tag{49}$$

Se observă după ecuația (49), că în prima aproximație, fiecare domeniu de instabilitate depinde numai de o singură armonică din dezvoltarea în serie Fourier a sarcinii excitatoare. Pulsația sarcinii externe la limita domeniilor de instabilitate se determină în acest caz sub forma

$$\theta = \frac{2\omega_k}{k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{50}$$

unde ω reprezintă pulsația vibrațiilor de încovoiere-răsucire ale barei încărcată static cu componența corespunzătoare armonicei respective de parametru $\pm 1/2\ \beta$.

Analizînd ecuațiile (41) împreună cu relația (42) se constată că lărgimea domeniilor de instabilitate dinamică crește pe măsura creșterii parametrului β, adică a amplitudinii componentei variabile a forțelor.

Componenta statică a sacrcinii, după cum rezultă din ecuațiile (41), nu influențează lărgimea domeniilor de instabilitate dinamică, variația componentei statice realizînd doar o translație a domeniilor de instabilitate în hiperspațiul parametrilor sistemului elastic și excitației.

Rezultă pe baza celor de mai înainte că în sistemul de coordonate al frecvenței și amplitudinii excitației, există pentru bara analizată o infinitate triplă de domenii de instabilitate avînd forma de V, cu vîrful pe axa frecvențelor în puncte marcînd frecvențe egale cu submultipli întregi ai dublului frecvențelor vibrațiilor libere ale barei acționată de componentele statice ale forțelor.

Pentru a analiza influența caracterului următor al forțelor excitatoare asupra lărgimii domeniilor de instabilitate dinamică este suficient să se observe că în cazul excitării prin forțe de direcție fixă trebuie să se facă $\varepsilon = 0$ în matricele B_{ik} (30). Notînd cu ω' pulsația vibrațiilor barei acționată static prin forțele de direcție fixă de parametrii α, $\pm\ \beta/2$, este ușor de văzut că

$$\omega_{\alpha,\ +\beta/2} > \omega'_{\alpha,\ +\beta/2},$$

$$\omega_{\alpha,\ -\beta/2} < \omega'_{\alpha,\ -\beta/2},$$

și în acest fel efectul urmăritor al forțelor se traduce în îngustarea domeniilor de instabilitate dinamică.

Domeniile de instabilitate în cazul forțelor urmăritoare, se vor suprapune deci peste domeniile de instabilitate corespunzătoare forțelor de direcție fixă, fiind ceva mai înguste decît acestea.

În condiții statice lucrurile se petrec asemănător, barele flambînd mai greu sub acțiunea forțelor urmăritoare decît sub acțiunea forțelor de direcție fixă [3].

3. EXEMPLU DE CALCUL

Se va analiza, sub formă de exemplu, delimitarea domeniilor de instabilitate dinamică în cazul barei cu pereți subțiri excitată parametric de forța total urmăritoare $F(t)$ acționînd axial — centric în capătul liber (fig. 2) și variind armonic în timp,

$$F_{(t)} = F_0 \cos \theta t. \tag{51}$$

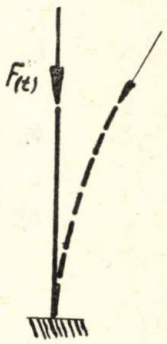


Fig. 2.

Se presupune totodată că bara admite planul xoz ca plan de simetrie ceea ce implică $y_0 = 0$

Domeniile principale de instabilitate se delimitează cu ajutorul ecuațiilor (40) în care trebuie să se facă $\alpha = 0$ și $\varepsilon = 1$

$$\left| E \pm \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0. \tag{52}$$

Pentru bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt, funcțiile pierderii statice a stabilității prin încovoiere în planele principale de inerție și prin răsucire separat sînt,

$$\begin{aligned} Z_k^u(t) &= C_u \left(1 - \cos \frac{k\pi z}{2l}\right), \qquad k = 1, 3, 5, \ldots, \\ Z_k^v(t) &= C_v \left(1 - \cos \frac{k\pi z}{2l}\right), \qquad k = 1, 3, 5, \ldots, \\ Z_k^h(t) &= C_\varphi \left(1 - \cos \frac{k\pi z}{2l}\right), \qquad k = 1, 3, 5, \ldots, \end{aligned} \tag{53}$$

C_u, C_v, C_φ fiind constante oarecare.

Considerînd în locul forțelor critice F_{kcr}^u, $F_{k,cr}^v$, $F_{k,cr}^\varphi$ parametrii critici $\alpha_{u,k}$, $\alpha_{v,k}$, $\alpha_{\varphi,k}$, în relațiile de normare (19) trebuie să se ia $N_0 = 1$.

Se scriu funcțiile pierderii statice a stabilității sub formă ortonormată, revenind totodată la numere naturale întregi pare și impare pentru k

$$\begin{aligned} Z_k^u(t) &= \frac{2\sqrt{2l}}{(2k-1)\pi} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi z}{2l}\right], \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \\ Z_k^v(t) &= \frac{2\sqrt{2l}}{(2k-1)\pi} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi z}{2l}\right], \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \\ Z_k^\varphi(z) &= \frac{2\sqrt{2l}}{(2k-1)\pi r_0} \left[1 - \cos \frac{(2k-1)\pi z}{2l}\right], \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned} \tag{54}$$

Cu acestea elementele hipermatricilor B și C din ecuațiile (52) obținute prin efectuarea integrărilor conform cu relațiile (24) în care $N_t = 1$, vor fi

$$b_{ik}^{uu} = \frac{8l^2}{(2k-1)^2\pi^2 EI_y}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \qquad i = k,$$

$$b_{ik}^{uu} = \frac{(-1)^k 16l^2}{\pi^2(2i-1)^2 EI_y}, \qquad i = k,$$

$$b_{ik}^{vv} = \frac{8l^2}{(2k-1)^2\pi^2 EI_n}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \qquad i = k,$$

$$b_{ik}^{vv} = \frac{(-1)16l^2}{\pi^2(2i-1)^2 EI_n}, \qquad i \neq k,$$

$$b_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{4l^2(r_0^2 - x_0^2 - y_0^2)}{4l^2 GI_t + (2k-1)^2\pi^2 EI_\omega} +$$

$$+ \frac{4l^2(x_0^2 + y_0^2)}{4l^2 GI_t + (2k-1)^2\pi^2 ET_\omega}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^2}{2k-1}\right], \qquad i = k,$$

$$b_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{(-1)^k 16l^2(x_0^2 + y_0^2)}{\pi^2(2i-1)[4l^2 GI_t + (2i-1)^2\pi^2 EI_\omega]}, \qquad i \neq k,$$

$$b_{ik}^{u\varphi} = 0, \qquad i = k;\ i \neq k$$

$$b_{ik}^{v\varphi} = -\frac{8l^2 x_0}{(2k-1)^2\pi^2 r_0 EI_n}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \qquad i = k,$$

$$b_{ik}^{v\varphi} = -\frac{(-1)^k 16l^2 x_0}{\pi^2(2i-1)^2 r_0 EI_n}, \qquad i \neq k,$$

$$b_{ik}^{\varphi u} = 0, \qquad i = k;\ i \neq k,$$

$$b_{ik}^{\varphi v} = -\frac{8l^2 x_0 r_0}{4l^2 GI_t + (2k-1)^2\pi^2 EI_\omega}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \quad i = k,$$

$$b_{ik}^{\varphi v} = -\frac{(-1)^k 16l^2 x_0 r_0}{(2i-1)\pi\,[4l^2 DGI_t + (2i-1)^2\pi^2 EI_\omega}, \quad i \neq k,$$

$$c_{ik}^{uu} = \frac{32ml^4}{(2k-1)^4\pi^4 EI_g}\left[\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right] - \frac{8ml^2 r^2}{(2k-1)^2\pi^2 EI_g}\left[\frac{1}{2} +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \quad i = k,$$

$$c_{ik}^{uu} = \frac{32ml_g}{(2i-1)^3(2k-1)\pi^4 EI_g}\left[1 + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)}{2i-1} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right] -$$

$$- \frac{(-1)^k 16ml^2 r^2}{\pi^2(2i-1)^3 EI_g}. \quad i \neq k, \qquad (55)$$

$$c_{ik}^{vv} = \frac{32ml^4}{(2k-1)^4\pi^4 EI_n}\left[\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right] - \frac{8ml^2r^2}{(2k-1)^2\pi^2 EI_n}\left[\frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \quad i = k,$$

$$c_{ik}^{vv} = \frac{32ml^4}{(2i-1)^3(2k-1)\pi^2 EI_n}\left[1 + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2i-1} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right] -$$

$$- \frac{(-1)^k/6ml^2r_n^2}{\pi(2i-1)^3 EI_n}, \quad i \neq k,$$

$$c_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{32ml^4r_0^2}{(2k-1)^2\pi^2[4l^2GI_t + \pi^2(2k-2)^2 EI_\omega]}\left[\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{(-1)^k}{2k-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{8ml^2r4l_\omega^4}{4l^2GI_t + (2k-1)^2 4El_\omega}\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right]\right., \quad i = k,$$

$$c_{ik}^{\varphi\varphi} = \frac{32iml^4r^2}{\pi^2(2i-1)(2k_5-1)[4l^2GI_t + \pi^2(2i-2)^2 EI_\omega]}\left[1 + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2i-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1} - \frac{(-1)^k/6ml^2r^2}{\pi(2i-1)[4l^2GI_t + \pi^2(2i-1)^2 EI_\omega]}\right., \quad i \neq k,$$

$$c_{ik}^{v\varphi} = 0, \quad i = k; \quad i = k,$$

$$c_{ik}^{v\varphi} = -\frac{32ml^4x_0}{(2k-1)^4\pi^2 r_0 EI}\left[\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \quad i = k, \qquad (55)$$

$$c_{ik}^{v\varphi} = -\frac{32ml^2x_0}{(2i-1)(2k-1)\pi^4 r_0 EI_n}\left[1 + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2i-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \quad i \neq k,$$

$$c_{ik}^{\varphi u} = 0, \quad i = k, \quad i \neq k,$$

$$c_{ik}^{\varphi v} = -\frac{2ml^4r_0r_0x_0}{(2k-1)^2\pi^2[4l^2GI_t + \pi^2(2k-1)^2 EI_\omega}\left[\frac{3}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{4}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], \quad i = k,$$

$$c_{ik}^{\varphi v} = -\frac{32ml^4r_0x_0}{(2i-1)(2k-1)\pi^2[4l^2GI_t + \pi^2(2i-1)^2 EI_\omega}\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2i-1} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right]. \quad i \neq k.$$

Cu limitarea dezvoltărilor (15) la primii doi termeni ai seriilor infinite, ecuațiile (52) ale domeniilor principale de instabilitate devin,

$$
\begin{vmatrix}
1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{uu} - & & & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{uu} & & \\
\quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{uu} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{vv} - & 2 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{vv} - & 0 & & \\
 & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{vv} & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{vv} & & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{vv} \\
0 & \pm \frac{1}{2} b_{11}^{\varphi v} - & 1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{\varphi\varphi} - & 0 & & \\
 & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{\varphi v} & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{\varphi\varphi} & & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{\varphi\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{\varphi\varphi} \\
-\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{uu} & 0 & 0 & 1 \pm \frac{1}{2} b_{22}^{vv} - & 0 & 0 \\
 & & & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{vv} & & \\
 & & & & 1 \pm \frac{1}{2} b_{12}^{vv} - & \pm \frac{1}{2} b_{22}^{\varphi\varphi} - \\
0 & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{\varphi\varphi} & 0 & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{vv} & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{\varphi\varphi} \\
 & & & & \pm \frac{1}{2} b_{22}^{\varphi v} - & 1 \pm \frac{1}{2} b_{22}^{\varphi\varphi} - \\
0 & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{\varphi v} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{\varphi\varphi} & 0 & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{\varphi v} & \quad -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{\varphi\varphi}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (56)
$$

După cîteva permutări de linii și coloane în determinantul din ecuațiile (56) se ajunge la forma

$$
\begin{vmatrix}
1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{uu} - & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{4}\theta^2 C_{21}^{uu} & -\frac{1}{4}\theta^2 C_{22}^{uu} & & & & \\
 & 1 \pm \frac{1}{2} b_{22}^{uu} - & & & & \\
-\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{uu} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{uu} & & & & \\
\hline
 & & 1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{vv} - & \pm \frac{1}{2} b_1^{v\varphi} - & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{v\varphi} \\
0 & 0 & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{v\varphi} & & \\
 & & \pm \frac{1}{2} b_{11}^{v\varphi} - & 1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{\varphi\varphi} - & & \\
0 & 0 & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{v\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{v\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{v\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{\varphi\varphi} \\
\hline
 & & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{v\varphi} & 1 \pm \frac{1}{2} b_{22}^{vv} - & \pm \frac{1}{2} b_{22}^{v\varphi} - \\
0 & 0 & & & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{v\varphi} \\
 & & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{v\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{v\varphi} & \pm \frac{1}{2} b_{22}^{v\varphi} - & 1 \pm \frac{1}{2} b_{22}^{\varphi\varphi} - \\
0 & 0 & & & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{v\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{\varphi\varphi}
\end{vmatrix} = 0, \quad (57)
$$

din care derivă două tipuri independente de ecuații :

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{uu} - \frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{uu} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{uu} \\ -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{uu} & 1 \pm \frac{1}{2} b_{22}^{uu} - \frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{uu} \end{vmatrix} = 0, \tag{58}$$

$$\begin{vmatrix} 1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{vv} - & \pm \frac{1}{2} b_{11}^{v\varphi} - & & \\ -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{v\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{v\varphi} \\ \pm \frac{1}{2} b_{11}^{\varphi v} - & 1 \pm \frac{1}{2} b_{11}^{\varphi\varphi} - & & \\ -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{\varphi v} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{11}^{\varphi\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{\varphi v} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{12}^{\varphi\varphi} \\ & & 1 \pm \frac{1}{2} b_{22}^{vv} - & \pm \frac{1}{2} b_{22}^{v\varphi} - \\ -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{v\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{vv} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{v\varphi} \\ & & \pm \frac{1}{2} b_{22}^{\varphi v} - & 1 \pm \frac{1}{2} b_{22}^{\varphi\varphi} \\ -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{\varphi v} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{21}^{\varphi\varphi} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{\varphi v} & -\frac{1}{4}\theta^2 c_{22}^{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = 0. \tag{59}$$

Ecuațiile (58) determină pulsațiile critice ale excitației la limitele domeniilor de instabilitate dinamică pentru vibrațiile de încovoiere simplă în planul de simetrie. Ecuațiile sînt algebrice de gradul al doilea datorită limitărilor la primii doi termeni în dezvoltările (15). Se obțin în general ecuații de ordinul n considerînd mai mulți termeni ai seriilor infinite (15) și astfel, pentru vibrațiile de încovoiere simplă în planul, de simetrie, se vor determina n domenii principale de instabilitate dinamică.

Conform formulelor (55) elementele determinantului din ecuațiile (58) vor fi

$$b_{11}^{uu} = -\frac{1{,}0928\ F_0 l^2}{\pi^2 EI_y}; \qquad b_{22}^{uu} = \frac{0{,}6328\ F_0 l^2}{\pi^2 EI_y},$$

$$c_{11}^{uu} = \left(7{,}254 + 10{,}8\,\frac{r_y^2}{l^2}\right)\frac{ml^4}{\pi^4 EI_y},$$

$$c_{22}^{uu} = \left(0{,}7584 - 56{,}4\,\frac{r_y^2}{l^2}\right)\frac{ml^4}{\pi^4 EI_y},$$

$$c_{12}^{uu} = \left(0{,}615 - 50{,}4\,\frac{r_y^2}{l^2}\right)\frac{ml^4}{\pi^4 EI_y},$$

$$c_{21}^{uu} = \left(0{,}615 + 16{,}75\,\frac{r_y^2}{l^2}\right)\frac{ml^4}{\pi^4 EI_y}.$$

Introducînd rapoartele adimensionale

$$p = \frac{ml^4\theta^2}{4\pi^2 EI_y}; \qquad q = \frac{4F_0 l^2}{\pi^2 EI_y}, \tag{60}$$

și neglijînd într-o primă aproximație raportul mic r_y^2/l^2, ecuațiile (58) se vor scrie

$$1{,}32\ p^2 - (8{,}0156 \pm 0{,}182\ q)p + 1 \pm 0{,}058q + 0{,}0042q^2 = 0. \tag{61}$$

În figura 3 s-au reprezentat limitele primelor două domenii de instabilitate dinamică determinate aproximativ cu ecuațiile (61), domeniile de instabilitate fiind cele hașurate. Punctat s-au reprezentat și limitele domeniilor corespunzătoare cazului cînd forța excitatoare ar păstra direcția fixă. Cazul din urmă se obține cu ușurință din precedentul făcînd $\varepsilon = 0$. Se modifică în acest caz elementele corespunzătoare ale hipermatricei B devenind,

$$b_{11}^{uu} = \frac{4l^2 F_0}{\pi^2 EI_y}; \qquad b_{22}^{uu} = \frac{4l^2 F_0}{9\pi^2 EI_y},$$

iar ecuațiile algebrice, pe baza cărora s-au trasat curbele punctate, devin,

$$1{,}32p^2 - (8{,}0156 \pm 7{,}636\,q)\ p + 1 \pm 0{,}055\ q + 0{,}0278\,q^2 = 0. \tag{62}$$

Ecuațiile (59), algebrice și de gradul $2n$, determină pulsațiile critice ale excitației pentru vibrațiile de încovoiere în plan perpendicular pe planul de simetrie al barei cu răsucire simultană.

Calculînd și aici elementele determinante conform cu relațiile (55), notînd,

$$\frac{4F_0l^2}{\pi^2EI_x}=q\,;\qquad \frac{ml^4\theta^2}{4\pi^2EI_x}=p\,;\qquad \frac{\pi^2EI_x}{4l^2}=F_v\,;$$
$$\frac{1}{r_0^2}\left(GI_t+\frac{\pi^2EI\omega}{4l^2}\right)=F_\varphi, \tag{63}$$

neglijînd în prima aproximație rapoartele r_x^2/l^2 și $r^4/l^2r_0^5$ și considerînd numai primii termeni ai dezvoltărilor (15) se obține

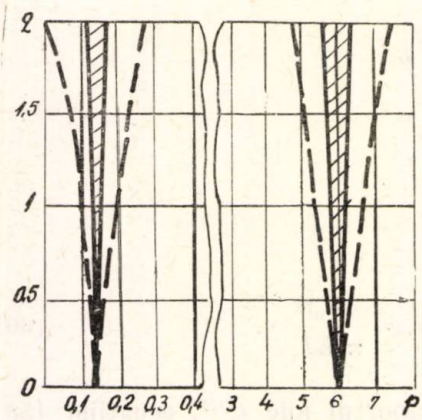


Fig. 3.

$$0{,}542\left(1-\frac{x_0^2}{r_0^2}\right)\frac{F_v}{F_\varphi}p^2-0{,}736\left[1+\frac{F_v}{F_\varphi}\pm\right.$$
$$\left.\pm\left(0{,}364-1{,}1366\,\frac{x_0^2}{r_0^2}\right)\frac{F_v}{F_\varphi}q\right]p+1-$$
$$-\left[\pm 0{,}1366-\left(\pm 0{,}5-0{,}136\,\frac{F_v}{F_\varphi}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(1-1{,}2732\,\frac{x_0^2}{r_0^2}\right)\frac{F_v}{F_\varphi}\right]q-$$
$$-0{,}0185\,\frac{F_v}{F_\varphi}\,\frac{x_0^2}{r_0^2}\,q^2=0. \tag{64}$$

Dînd valori constante rapoartelor x_0/r_0 și F_v/F_φ se obțin cu ajutorul ecuațiilor (64) familii de domenii în coordonate adimensionale p și q asemănătoare celor din figura 3.

Primită la redacție la 5 aprilie 1972

BIBLIOGRAFIE

1. Bolotin V. V., *Dinamicescaia ustoicivosti uprughih sistem*, Moscova, Gostehizdat 1956.
2. Bolotin V. V., *O colebania i ustoicivosti sterjnei nahodiașcihsia pod deistviem neconservativnih sil*, Izd-vo, Akad. Nauk. S.S.S.S.R.—1959.
3. Bolotin V. V., *Non conservative Problems of the Theory of Elastic Stability Pergamon Press*, Oxford, London, New York, 1963.
4. Dzygadko Z., Solarz L., *On nonautonoms vibrations of a selfexcited sistem with tangential force*, Vibration Problems, R. P. Polonă, **11**, 2 (1970).
5. Hermann G., Bungay R. W., *On the stability of elastic sistem subjected the nonconservative forces*, J. Appl. Mech. **31** (1964).
6. Iacubovici V. A., Strajinskii V. M., *Lineinie diferențialnie uravnenia s periodiceskimi coeficiențami i ih prilojenia*, Izd-vo Nauka Moscva, 1972.

7. Mohamed M. O. , *Pastroienie oblastei neustoicivosti toncostenih sterjnei, zagrujenih prodolinimi periodiceskimi silami*, *Vestnic Moscovscovo Universiteta*, Matematica, Mehanica, *5* (1970).
8. Panovco I. G. Gubanova I. I., *Ustoicivosti i colebania uprughih sistem*, Moscva Izd-vo Nauka 1967.
9. Petre A, Atanasiu M., *Bare cu pereți subțiri*, București, Edit. tehnică, 1960.
10. Petre A., *Teoria aeroelasticității*, Statica, București, Editura Academiei, 1966.
11. Porter B., *Stability criteria for linear dynamical systems*, Mechanic, Engineering Monographs 1, Olivier Boyd-Edimburgh and London, 1967.
12. Porter B., *The stability of systems governed by a special forms of Hill's equation*, Int. J. Mech. Sci., *4*, 413 (1962).
13. Tveniasvili D. H., Haramischin V. V., *Dinamicescaia ustoicivosti shematizirovanoi consoli pri deistvii sledeșcei pulsiruiuscei nagruzchi*, Pricladnaia Mehanica, **IV**, 11.
14. Vlasov V. Z., *Toncostenie sterjini*, Moscva, GIFML, 1959.

ANALOGIA ELECTRO-OPTICĂ CA METODĂ AUXILIARĂ ÎN FOTOELASTICIMETRIE

de I. PĂSTRAV

Se prezintă modul de determinare a sumei tensiunilor principale prin metoda analogiei electro-optice.

1) *Introducere.* Analogia electrică este utilizată de multă vreme [1] pentru determinarea sumei tensiunilor principale în problemele studiate prin fotoelasticimetrie. Metoda are dezavantajul că liniile de egală sumă a tensiunilor principale (izopachele) trebuie să se traseze punct cu punct.

În articolul [2] se arată modul de rezolvare a ecuațiilor tip Laplace prin analogia electro-optică, cu aplicații în hidrodinamică și studiul transmiterii căldurii prin conducție.

În cele ce urmează se prezintă modul în care se poate aplica metoda la determinarea sumei tensiunilor principale în problemele de elasticitate plană. Spre deosebire de cazul analogiei electrice, analogia electro-optică are avantajul că se obțin direct izopachele așa cum prin metoda fotoelastică se obțin izocromatele. Evident, cunoscînd suma tensiunilor principale, din izopache, și diferența lor, din izocromate, se pot determina tensiunile principale în orice punct al piesei studiate.

Posibilitatea folosirii analogiei electro-optice pentru determinarea sumei tensiunilor principale (ca și a analogiei electrice) rezidă în faptul cunoscut, că suma tensiunilor principale satisface ecuația lui Laplace [1],

$$\nabla^2(\sigma_1 + \sigma_2) = 0. \tag{1}$$

Întrucît metoda analogiei electro-optice este foarte puțin cunoscută, este necesară o scurtă prezentare. Se știe că soluțiile unor compuși organici devin birefringente într-un cîmp electric. Studiate într-un polariscop liniar se pot pune în evidență izoclinele și izocromatele care în acest caz corespund punctelor în care gradientul tensiunii este constant. Relația între ordinul izocromatei și gradientul de tensiune se determină

experimental, prin etalonare. Se pune problema modelării diferitelor solicitări; acest lucru este posibil dacă se ţine seama de condiţiile de contur. Astfel, în cazul solicitării axiale simple se pune condiţia

$$\text{grad } V = C(\sigma_1 + \sigma_2) = \text{const.}, \tag{2}$$

care se realizează practic prin plasarea a doi electrozi în secţiunile de capăt ale modelului, alimentaţi de la o sursă de curent alternativ cu tensiunea V.

2. *Studiul tensiunilor într-o platbandă cu crestături laterale, solicitată la întindere.* Pentru determinarea diferenţei tensiunilor principale ($\sigma_1 - \sigma_2$) s-a confecţionat un model din Araldit avînd dimensiunile din figura 1 (grosimea 5,83 mm) şi a fost solicitat la întindere cu o forţă de 117 daN. Izocromatele se pot vedea în figura 2, ordinul maxim, la baza crestăturii fiind $k = 7{,}6$. Etalonarea materialului s-a făcut pe o epruvetă solicitată la încovoiere pură şi a rezultat pentru constanta fotoelastică a modelului valoarea $\sigma_0 = 26{,}6$ daN/cm^2. Modelul pentru analogia electro-optică a fost o cuvă din stiplex avînd dimensiunile în plan din figura 1 şi adîncimea de 25 mm. Ca electrolit s-a folosit o soluţie de colorant galben, cunoscut sub denumirea comercială de Milling Yellow NGS, în apă distilată, cu o concentraţie de 1,5%.

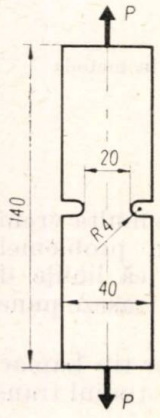


Fig. 1

Electrozii au fost plasaţi, cum s-a mai arătat, în secţiunile de capete şi au fost alimentaţi cu o tensiune de 75 V. Curbele de extincţie reprezintă în acest caz chiar izopachele (fig. 3). Ordinul maxim al franjei a rezultat 5.

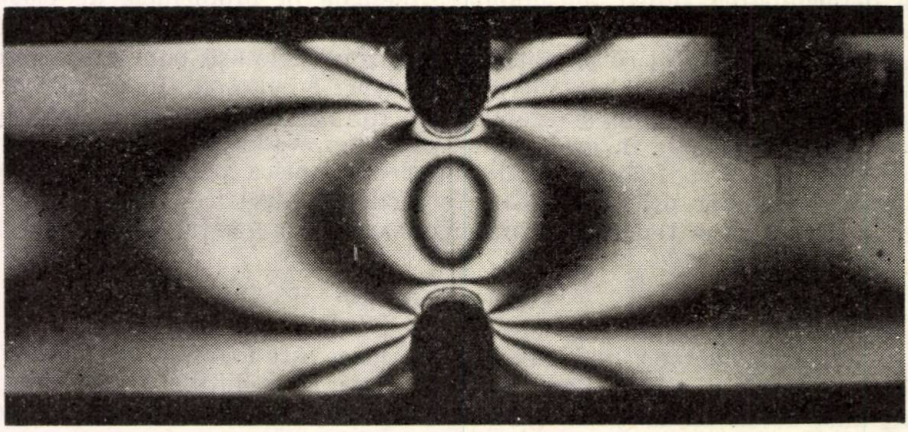


Fig. 2

Pentru etalonarea soluţiei s-a folosit o cuvă avînd forma de sector de cerc, cu electrozii plasaţi pe feţele radiale, adîncimea cuvei fiind tot de 25 mm (fig. 4).

Gradientul de tensiune în lungul unei curbe de extincţie se poate calcula prin împărţirea tensiunii aplicate electrozilor cu lungimea arcului de cerc corespunzător. Curba de etalonare nu este liniară aşa cum se vede din figura 5, de asemenea ea este influenţată de temperatura soluţiei în sensul scăderii sensibilităţii optice cu creşterea temperaturii.

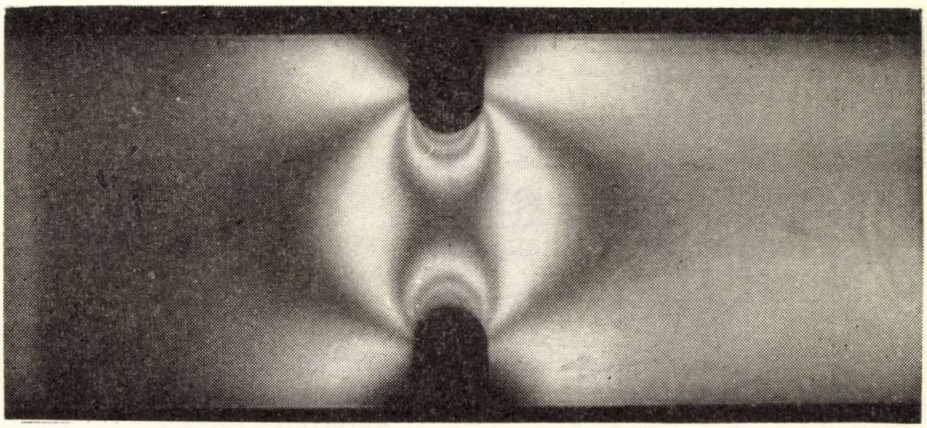


Fig. 3

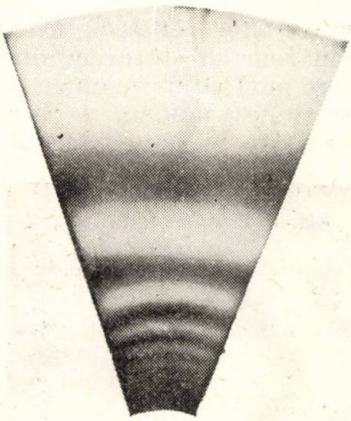


Fig. 4

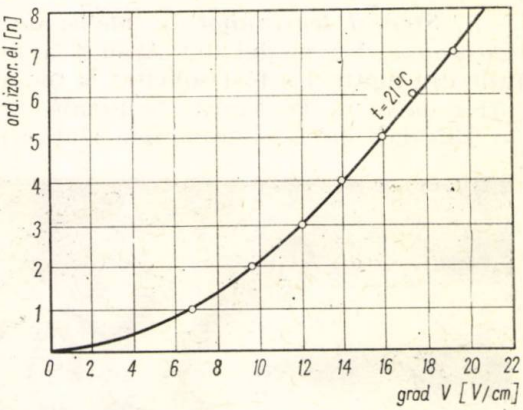


Fig. 5

Pe baza curbelor de extincţie din figura 3 şi a curbei de etalonare din figura 5 s-a trasat curba $(\sigma_1 + \sigma_2)$ în secţiunea minimă a epruvetei, pînă la axa de simetrie (fig. 6).

Curba diferenţei tensiunilor principale $(\sigma_1 - \sigma_2)$ s-a trasat ţinînd seama de izocromatele din figura 2, prin alegerea convenabilă a scării şi anume din condiţia că pe conturul neîncărcat al modelului una din tensiunile principale fiind nulă, suma tensiunilor principale este egală cu diferenţa lor.

Cu ajutorul celor două curbe s-au calculat și s-au trasat curbele σ_1 și σ_2.

Cu semnul plus s-au notat valorile σ_1 calculate cu relația dată de Neuber [3]

$$\sigma_u = \frac{A}{h^2} \operatorname{ch} u \cos v \left(2 + \frac{\cos^2 v_0 - \cos^2 v}{h^2}\right), \tag{3}$$

unde

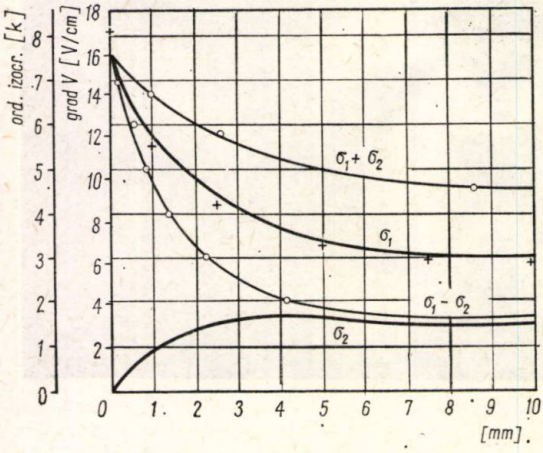


Fig. 6

$$A = \sigma_n \frac{\sin v_0}{v_0 + \sin v_0 \cos v_0},$$

$$\sigma_n = \frac{P}{2ad},$$

$$h^2 = \operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v.$$

Abaterea maximă a valorilor σ_1, determinate experimental, față de cele calculate cu formula (3) este de 6,4% și se datorește faptului că valorile $\sigma_1 + \sigma_2$, respectiv $\sigma_1 - \sigma_2$ s-au determinat, la baza crestăturii, prin extrapolare.

3. *Studiul tensiunilor în platbanda cu crestături laterale, solicitată la încovoiere.* Un model din Araldit avînd în zona crestăturilor dimensiunile din figura 1 a fost solicitat la încovoiere pură cu un moment max. de 51,1 daNcm. Tensiunea nominală în secțiunea minimă a rezultat $\sigma_n = 135$ daN/cm². Izocromatele sînt reprezentate în figura 7, ordinul

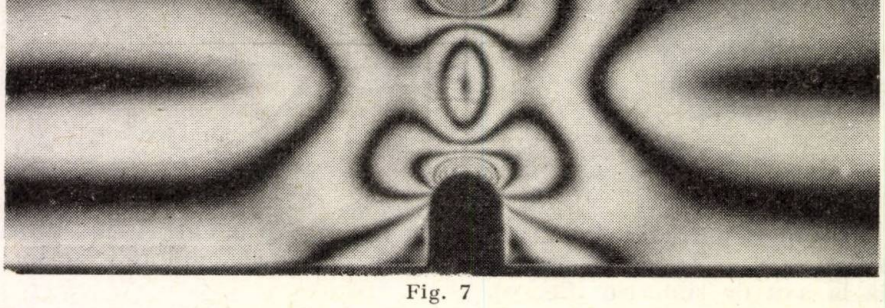


Fig. 7

maxim, la baza crestăturii fiind $K = 8{,}3$. Constanta fotoelastică a modelului a fost $\sigma_0 = 26{,}6$ daN/cm².

Pentru determinarea sumei tensiunilor principale s-au utilizat curbele de extincție din figura 3.

În cazul încovoierii pure gradientul sumei tensiunilor principale este constant deci se poate scrie relația

$$\text{grad } V = C \text{ grad } (\sigma_1 + \sigma_2). \tag{4}$$

Valorile obținute din figura 3 sînt deci proporționale cu gradientul sumei tensiunilor principale. Pentru a afla suma tensiunilor principale se integrează curba gradientului tensiunilor principale ținînd seama și că ele sînt nule în fibra neutră.

În figura 8 este reprezentată curba $(\sigma_1 + \sigma_2)$ rezultată prin integrarea grafică a curbei grad V. De asemenea, s-a trasat curba $(\sigma_1 - \sigma_2)$ pe baza izocromatelor din figura 7, ținînd din nou seama de faptul că pe conturul modelului suma tensiunilor principale este egală cu diferența lor. Au rezultat curbele σ_1 și σ_2. Pentru verificarea metodei s-au calculat valorile σ_1 cu formula dată de Neuber pentru încovoiere [3]

$$\sigma_1 = \frac{A}{h^2} \sin 2v \left(-4 + \right. \tag{5}$$

$$\left. + \frac{\cos 2v - \cos 2v_0}{h^2} \right),$$

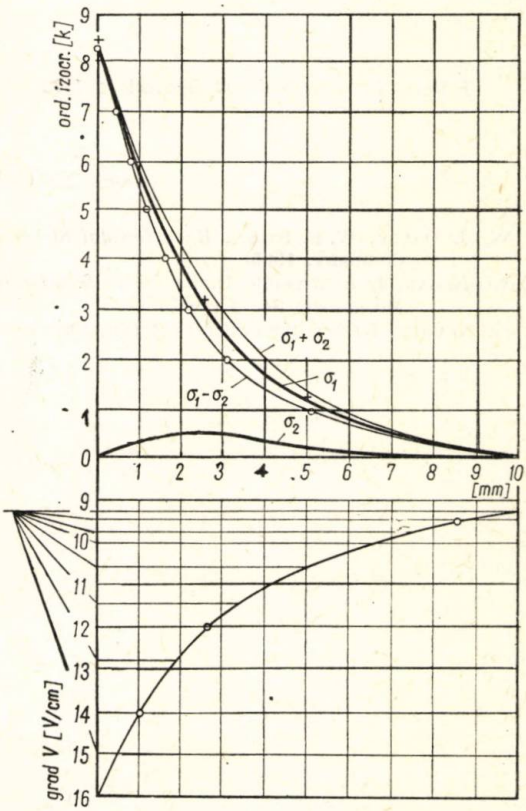


Fig. 8

unde

$$A = -\sigma_n \frac{\sin^2 v_0}{3(\sin 2v_0 - 2v_0 \cos 2v_0)},$$

$$\sigma_n = \frac{3M}{2a^2 d}$$

și s-au reprezentat pe figura 8 cu semnul plus. Abaterea maximă a valorilor calculate cu relația (5) față de valorile experimentale este de 4,65 %.

4. *Concluzii.* Metoda propusă pentru determinarea sumei tensiunilor principale, folosind analogia electro-optică, este simplă, dă un tablou complet al stării de tensiune în model, putînd fi utilizată, în combinație

cu metoda fotoelastică, la rezolvarea problemelor de elasticitate plană, precizia rezultatelor încadrîndu-se în limitele admise în cazul metodelor experimentale.

Primită la redacție la 12 septembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. W. J. Dally, W. F. Riley, *Experimental Stress Analysis*, New York, Mc Graw Hill Book Company, 1965.
2. R.O'Regan, *An Electrooptic Analog for the Solution of the Laplace Equation*, Journal of Applied Mechanics, **34**, 2 (1967).
3. H. Neuber, *Kerbspannungslehre*, Berlin, Springer-Verlag, 1958.

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE ALE FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE CU DOUĂ LINII OPUSE DE CILINDRI ȘI DOI ARBORI COTIȚI CARE SE ROTESC ÎN SENSURI CONTRARE

de G. BĂRĂNESCU și GH. ZĂTREANU
Institutul politehnic București

Pentru motoarele cu două linii opuse de cilindri și doi arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare, se analizează posibilitățile de echilibrare a momentului extern corespunzător oricărui termen al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.
Se mai stabilesc momentele externe care se echilibrează simultan, condiția necesară celui mai bun echilibraj al momentelor externe și posibilitățile de echilibrare a acestora oferite de reparitiția uniformă a aprinderilor pe ansamblul motorului.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că problema echilibrajului momentelor externe ale forțelor de inerție la motoarele cu două linii de cilindri și doi arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare admite soluții interesante cînd liniile de cilindri sînt paralele sau opuse. Pentru prima din aceste variante, problema a fost cercetată în detaliu tot în [1].

Prezenta lucrare tratează echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație la motoarele cu două linii opuse de cilindri și doi arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare. Echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație nu constituie o preocupare directă, întrucît acest echilibraj este asigurat de orice soluție care realizează echilibrajul momentului extern al termenilor de ordinul întîi ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

Se admite că cei doi arbori cotiți sînt identici, cu distanțe egale între manivelele consecutive, și că axele lor de rotație sînt paralele. Viteza unghiulară ω a arborilor cotiți este considerată variabilă. Se presupune că aprinderile alternează de la o linie la alta, în fiecare linie aprinderile fiind uniform repartizate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 3, 1974, P. 569–583

Se utilizează următoarele notații: 1, 2, 3... $\frac{i}{2}$ — numerele de ordine ale cilindrilor consecutivi din fiecare linie, și ale manivelelor respective, începînd de la una din extremitățile motorului; I, II, III, ...K, ... $\frac{i}{2}$ — numerele de ordine ale aprinderilor consecutive din fiecare linie, numerele I fiind date aprinderilor din cilindrii 1; s și d — indici ai numerelor precedente și ai altor notații precizate mai jos, desemnînd linia din stînga și, respectiv, din dreapta în raport cu un observator care privește motorul de la extremitatea unde se află cilindrii 1.

Conform notațiilor precedente, alternarea aprinderilor dintr-o linie în cealaltă corespunde cuplajului $I_s \rightarrow K_d$ al aprinderilor (aprinderea I_s este urmată de aprinderea K_d). Dacă ζ este decalajul unghiular dintre aprinderile I_s și K_d, cuplajului $I_s \rightarrow K_d$ îi corespunde decalajul $\psi - \zeta$ între arborii cotiți, unde

$$\psi = (K_d - 1)\frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}} \tag{1}$$

este unghiul cu care arborele cotit din dreapta ar fi rotit în sensul său de rotație pentru declanșarea simultană a aprinderilor I_s și K_d, τ fiind numărul de timpi [2].

Se convine ca momentul extern care revine ansamblului motorului, corespunzător momentelor externe produse în fiecare linie de termenii de ordinul p ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, să fie numit moment rezultant de ordinul p.

Se folosește interpretarea de către vectorii T_{p_ν} și T_{p_τ}, definiți în [3], a termenului de ordinul p al forței de inerție a maselor cu mișcare de translație dintr-un cilindru. Se notează cu M_{p_ν} și M_{p_τ} vectorii care reprezintă momentele produse în fiecare linie respectiv de vectorii T_{p_ν} și T_{p_τ} din linia considerată; ca și aceștia din urmă, vectorii M_{p_ν} și M_{p_τ} sînt permanent perpendiculari între ei și se rotesc în sensul de rotație al arborelui cotit respectiv cu viteza unghiulară $p\omega$. Datorită identității tuturor mecanismelor bielă-manivelă, vectorii de același tip din cele două linii sînt egali în același moment de timp ($M_{p_{\nu_s}} = M_{p_{\nu_d}} = M_{p_\nu}$; $M_{p_{\tau_s}} = M_{p_{\tau_d}} = M_{p_\tau}$).

După cum s-a arătat în [1], metoda de cercetare a echilibrajului momentului rezultant de ordinul p poate ține seama pentru fiecare linie fie de vectorul M_{p_ν}, fie de vectorul M_{p_τ}. Adoptînd aceeași metodă, se alege vectorul M_{p_ν}, desemnat pentru simplificarea scrierii prin notația M_p. Se mai fac notațiile: H — planul care conține axele de rotație ale arborilor cotiți și este paralel cu planele determinate de axele cilindrilor din fiecare linie[1]; $\mathfrak{M}_p$ — momentul extern considerat în fiecare linie

[1]) Cînd mecanismele bielă-manivelă sînt axate, cele trei plane se confundă.

conform metodei de cercetare adoptate, egal cu proiecția vectorului M_p din linia aleasă pe planul normal la planul H. Drept sens pozitiv al momentului $\mathfrak{M}_p$ este considerat sensul unui burghiu manevrat de o persoană care are în dreapta cilindrul numărul 1.

Se alege ca origine momentul de timp în care manivela 1_s se află în poziția corespunzătoare punctului mort interior. Se notează cu θ unghiul pe care vectorul M_{p_s} îl face în acest moment cu semiaxa $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_s}$, măsurat în sensul de rotație al arborelui cotit din stînga; acest sens este considerat sens pozitiv pentru măsurarea oricărui unghi. Unghiul θ, reprezentînd o constantă corespunzătoare ordinului p, este numit în continuare unghi la origine.

Cu aceste precizări, se deduce amplitudinea momentului rezultant de ordinul p [1]

$$A_p = 2M_p \sin\left(\theta - p\frac{\psi - \zeta}{2}\right). \tag{2}$$

2. ECHILIBRAREA MOMENTELOR REZULTANTE LA MOTOARELE CU DOUĂ LINII OPUSE DE CILINDRI

2.1. CONDIȚII DE ECHILIBRARE A MOMENTULUI REZULTANT DE UN ORDIN OARECARE

Se analizează posibilitățile de echilibrare a momentului rezultant de un anumit ordin p_0. Avînd în vedere expresia (2), aceste posibilități reclamă îndeplinirea condiției

$$\sin\left(\theta_0 - p_0\frac{\psi - \zeta}{2}\right) = 0,$$

adică

$$\theta_0 - p_0\frac{\psi - \zeta}{2} = \pm\,\lambda_0\pi, \tag{3}$$

unde θ_0 este unghiul la origine corespunzător ordinului p_0, iar factorul λ_0 poate lua numai anumite valori întregi, determinate mai jos.

Considerînd un anumit motor, se precizează totodată unghiul θ_0, care depinde de numărul de cilindri și de dispunerea manivelelor arborilor cotiți, și este supus condiției

$$0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

În consecință, valorile posibile ale factorului λ_0 sînt dictate de cuplajul aprinderilor aplicat la motorul ales, adică de mărimea unghiurilor ζ și ψ.

Unghiul ζ aparține domeniului

$$0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}, \tag{5}$$

ale cărui limite corespund cazurilor particulare $I_s K_d$ și $I_s(K_d + 1)$ de cuplaj al aprinderilor, în care aprinderea I_s este simultană cu aprinderea K_d, respectiv cu aprinderea $K_d + 1$.

În legătură cu unghiul ψ se disting două alternative ($K_d > 1$ și $K_d = 1$).

1) Pentru $K_d > 1$, se deduce din (1) $\psi \geqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$ și deci, ținînd seamă de (5), rezultă

$$\psi - \zeta \geqslant 0. \tag{6}$$

Cînd $K_d = 2$ și $\zeta = \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$, condiția (6) devine

$$\psi - \zeta = 0, \tag{7}$$

ceea ce corespunde cuplajului $I_s I_d$ al aprinderilor. Deoarece s-a presupus că aprinderile alternează între linii, trebuie considerate în alternativa examinată numai valorile [2]

$$\psi - \zeta > 0. \tag{8}$$

Ținînd seama de condiția (8), relația (3) poate lua forma

$$\zeta = \psi - \frac{2}{p_0}(\theta_0 + \lambda_0\pi); \tag{9}$$

introducînd în (9) valoarea unghiului ψ dată de formula (1) și avînd în vedere condiția (5), se deduce

$$(K_d - 2)\frac{\tau p_0}{i} - \frac{\theta_0}{\pi} \leqslant \lambda_0 \leqslant (K_d - 1)\frac{\tau p_0}{i} - \frac{\theta_0}{\pi}. \tag{10}$$

În consecință, echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 poate fi obținută în alternativa $K_d > 1$ dacă acest ordin și unghiul θ_0 care îi corespunde asigură existența unor valori întregi conținute de domeniul (10); valorile λ_0 astfel precizate se introduc în formula (9) pentru a determina unghiurile ζ ce caracterizează soluțiile de echilibrare.

Pentru orice motor se poate preciza cel puțin o soluție de echilibrare, adică o soluție care să asigure în permanență egalitatea momentelor $\mathfrak{M}_{p_0}$ din cele două linii și totodată opoziția lor de fază. Deoarece arborii cotiți

[2]) Introducînd în (3) condiția (7) în locul condiției (8), se obține $\theta_0 = \lambda_0\pi$, unde sînt posibile numai valorile $\lambda_0 = 0$ și $\lambda_0 = 1$, fiindcă θ_0 aparține domeniului (4); cuplajul $I_s I_d$ asigură deci echilibrarea momentelor rezultante ale căror ordine comportă unghiurile la origine $\theta_0 = 0$ și $\theta_0 = \pi$.

se rotesc în sensuri contrare, o astfel de soluție presupune că vectorii M_{p_0} ai celor două linii ocupă în orice moment de timp poziții simetrice față de planul H [3].

Pentru anumite ordine p_0 se pot preciza mai multe soluții de echilibrare. Astfel, întrucît diferența dintre valorile externe ale domeniului (10) este $\frac{\tau p_0}{i}$, fiecărui K_d supraunitar îi corespunde cel puțin o soluție cînd $\frac{\tau p_0}{i} \geqslant 1$, deci cînd $p_0 \geqslant \frac{i}{\tau}$ [4].

O cale particulară de cercetare a problemei echilibrării momentului rezultant de ordinul p_0 în alternativa $K_d > 1$ ține seama că, pentru

$$\theta_0 > \lambda_0 \pi, \tag{11}$$

condiția (8) este respectată și cînd relația (3) ia forma

$$\zeta = \psi - \frac{2}{p_0}(\theta_0 - \lambda_0 \pi). \tag{12}$$

În afară de condiția (11), unghiul θ_0 mai îndeplinește și condiția generală (4), ceea ce înseamnă că sînt posibile numai valorile $\lambda_0 = 0$ și $\lambda_0 = 1$. Pentru aceste valori, din (12) se obține

$$\zeta = \psi - 2\frac{0_0}{p_0} \tag{13}$$

și, respectiv,

$$\zeta = \psi - \frac{2}{p_0}(\theta_0 - \pi). \tag{14}$$

Introducînd expresia (1) a unghiului ψ în relațiile (13) și (14) și avînd în vedere că unghiul ζ nu poate depăși limitele (5), rezultă

$$1 + \frac{i}{\tau p_0} \cdot \frac{\theta_0}{\pi} \leqslant K_d \leqslant 2 + \frac{i}{\tau p_0} \cdot \frac{\theta_0}{\pi}, \tag{15}$$

respectiv

$$1 + \frac{i}{\tau p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} - 1\right) \leqslant K_d \leqslant 2 + \frac{i}{\tau p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} - 1\right). \tag{16}$$

---

[3]) O asemenea soluție se realizează în cazul cuplajului $I_s I_d$ al aprinderilor pentru momentele rezultante ale căror ordine sînt asociate cu unghiurile la origine $\theta_0 = 0$ și $\theta_0 = \pi$.

[4]) Conform celor arătate în lucrarea [1], cele μ soluții aferente în acest caz aceluiași K_d sînt distincte cînd limitele domeniului (10) sînt numere fracționare. Numărul de soluții distincte se micșorează la $\mu - 1$ dacă una din limitele domeniului (10) ia o valoare întreagă, și la $\mu - 2$ dacă ambele limite sînt numere întregi.

Astfel, în funcție de plasarea unghiului θ_0 în domeniul

$$0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi \tag{17}$$

sau în domeniul

$$\pi < \theta_0 \leqslant 2\pi, \tag{18}$$

echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este asigurată de decalajul ζ precizat de (13), respectiv (14); în (13) și (14) se folosesc numerele K_d cuprinse respectiv în intervalele (15) și (16).

Deoarece diferența dintre limitele intervalului (15) sau (16) este egală cu unitatea, limitele fiecărui interval sînt fie numere fracționare, fie numere întregi. Dacă se realizează prima posibilitate, fiecare interval conține un singur număr K_d, deci formula (13) sau (14) desemnează o soluție unică. Dacă se realizează a doua posibilitate, limitei inferioare K_d^* îi corespunde unghiul $\zeta = 0$, adică soluția cu aprinderile I_s și K_d^* simultane, iar limita superioară $K_d^* + 1$ precizează unghiul $\zeta = \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$ (egal cu unghiul dintre două aprinderi consecutive din aceeași linie), deci tot soluția $I_s K_d^*$. Astfel, calea particulară prezentată conduce întotdeauna la o singură soluție de echilibrare a momentului rezultant de ordinul p_0.

2) În alternativa $K_d = 1$, $\psi = 0$, deci relația (3) devine

$$\zeta = \frac{2}{p_0}(\lambda_0\pi - \theta_0). \tag{19}$$

Din (19) și (5) se constată următoarele

a) Întrucît $\zeta \geqslant 0$, este necesar ca $\theta_0 \leqslant \lambda_0\pi$, adică sînt posibile valorile $\lambda_0 = 1$ și $\lambda_0 = 2$, fiindcă θ_0 este supus și condiției (4). Pentru aceste valori, din (19) se obține

$$\zeta = \frac{2}{p_0}(\pi - \theta_0), \tag{20}$$

respectiv

$$\zeta = \frac{2}{p_0}(2\pi - \theta_0). \tag{21}$$

b) Deoarece $\zeta \leqslant \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}}$, relația (20) este valabilă cînd

$$\frac{\tau p_0}{i} + \frac{\theta_0}{\pi} \geqslant 1, \tag{22}$$

iar relaţia (21) se aplică dacă

$$\frac{\tau p_0}{i} + \frac{\theta_0}{\pi} \geqslant 2. \tag{23}$$

Ca urmare, momentul rezultant de ordinul p_0 poate fi echilibrat prin soluţia corespunzătoare alternativei $K_d = 1$ dacă sînt respectate simultan condiţiile (17) şi (22), sau condiţiile (18) şi (23). Unghiul ζ ce caracterizează această soluţie se determină din formula (20), respectiv (21).

★

Dacă se echilibrează momentul rezultant de ordinul p_0, prin alegerea unui decalaj ζ corespunzător, se măresc unele momente rezultante care rămîn neechilibrate. Introducînd relaţia (3) în expresia (2), se constată că amplitudinea acestor momente este

$$A_p = 2 M_p \sin\left[\frac{2\theta_0}{\pi} - \frac{2p}{p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} \mp \lambda_0\right)\right]\frac{\pi}{2}: \tag{24}$$

Pentru

$$\frac{2\theta_0}{\pi} - \frac{2p}{p_0}\left(\frac{\theta_0}{\pi} \mp \lambda_0\right) = \pm(2\nu - 1), (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

din (24) se obţine $|A_p| = 2M_p$, ceea ce înseamnă că momentele rezultante ale căror ordine îndeplinesc condiţia

$$p = \frac{2\theta_0 \mp (2\nu - 1)\pi}{2(\theta_0 \mp \lambda_0\pi)} p_0$$

devin maxime cînd se echilibrează momentul rezultant de ordinl p_0.

2.2. DETERMINAREA MOMENTELOR REZULTANTE CARE SE ECHILIBREAZĂ SIMULTAN

Se presupune că echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este asigurată prin alegerea unui decalaj ζ corespunzător. Este posibil ca acelaşi decalaj ζ să antreneze şi echilibrarea altor momente rezultante, de două categorii: momente rezultante ale căror ordine p_0^* sînt asociate tot cu unghiul la origine θ_0 şi momente rezultante ale căror ordine p comportă un alt unghi la origine $\theta \neq \theta_0$.

Dacă se utilizează alternativa $K_d > 1$ pentru echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0, ordinele p^* şi p sînt supuse, respectiv, con-

dițiilor

$$\frac{\theta_0 + \xi_1\pi}{p_0^*} = \frac{\theta_0 + \lambda_0\pi}{p_0}, \tag{25}$$

în care ξ_1 este un număr întreg, și

$$\frac{\theta + \lambda\pi}{p} = \frac{\theta_0 + \lambda_0\pi}{p_0}, \tag{26}$$

unde λ se deduce prin considerarea domeniului (10) pentru ordinele p și unghiul θ care le corespunde; într-adevăr, introducînd în (9) relația (25) sau relația (26), se obține tot decalajul ζ ales. Dacă echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este asigurată în alternativa $K_d = 1$, decalajul ζ fiind calculat cu formula (19), ordinele p_0^* și p îndeplinesc respectiv egalitățile

$$\frac{\xi_2\pi - \theta_0}{p_0^*} = \frac{\lambda_0\pi - \theta_0}{p_0}$$

și

$$\frac{\rho\pi - \theta}{p} = \frac{\lambda_0\pi - \theta_0}{p_0},$$

în care ξ_2 și ρ sînt numere întregi, fiindcă membrul drept al fiecăreia din aceste egalități are tocmai valoarea ζ adoptată.

În privința ordinelor p_0^* și p se pot face următoarele precizări:

a) Deoarece θ_0 este unghiul la origine asociat atît ordinului p_0, cît și ordinelor p_0^*, vectorii $M_{p_0^*}$ ai liniei de cilindri din stînga se află în fază cu vectorul M_{p_0} din această linie în momentul de timp ales ca origine. Dacă manivela 1_d se află în poziția corespunzătoare punctului mort interior în acest moment de timp, vectorii $M_{p_0^*}$ din dreapta sînt și ei atunci în fază cu vectorul M_{p_0} din dreapta; în momentul considerat direcția unică a vectorilor $M_{p_0^*}$ și M_{p_0} dintr-o linie este paralelă cu direcția unică a vectorilor $M_{p_0^*}$ și M_{p_0} din cealaltă linie, sensul vectorilor dintr-o linie fiind opus sensului vectorilor din cealaltă linie. Această dispunere corespunde cuplajului I_sI_d al aprinderilor și este arătată în figura 1*a*, unde poziția necesară a manivelelor 1_s și 1_d este precizată de unghiul α_i.

Dacă arborele cotit din dreapta este rotit cu unghiul $-(\psi - \zeta)$ față de poziția sa precedentă, pentru a realiza cuplajul $I_s \to K_d$ în alternativa $K_d > 1$, vectorul M_{p_0} din dreapta este rotit față de poziția sa inițială cu unghiul $-p_0(\psi - \zeta)$; în acest fel este obținută echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0. Rotirea efectuată de arborele cotit din dreapta asigură și echilibrarea momentelor rezultante de ordinele p_0^* dacă rotirile corespunzătoare ale vectorilor $M_{p_0^*}$ din dreapta aduc acești vectori din nou în fază cu vectorul M_{p_0} din dreapta (fig. 1*b*), deci cînd este îndepli-

nită condiția

$$p_0^*(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\sigma\pi,$$

unde σ este un număr întreg.

Cînd arborele cotit din dreapta este rotit cu unghiul ζ, pentru a trece de la cuplajul I_sI_d la cuplajul $I_s \to I_d$, rotirile corespunzătoare ale

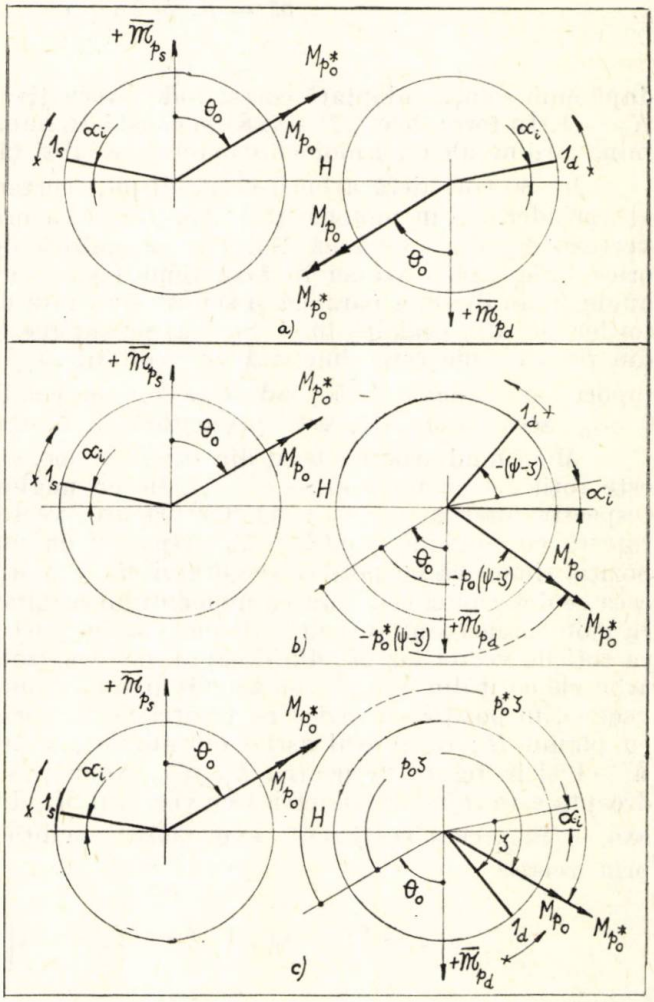


Fig. 1. — Soluțiile de echilibrare a momentelor rezultante de ordinele p_0^* simultan cu momentul rezultant de ordinul p_0.

vectorilor $M_{p_0^*}$ și M_{p_0} din dreapta se încheie cu o nouă coincidență de fază a acestor vectori (fig. 1*c*), asigurînd echilibrarea momentelor rezultante de ordinele p_0^*, dacă se realizează egalitatea

$$p_0^*\zeta = p_0\zeta + 2\sigma\pi.$$

Astfel, echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 antrenează și echilibrarea momentelor rezultante de ordinele

$$p_0^* = p_0 + 2\sigma \frac{\pi}{\psi - \zeta}, \tag{27}$$

sau de ordinele

$$p_0^* = p_0 + 2\sigma \frac{\pi}{\zeta}, \tag{28}$$

după cum soluția adoptată corespunde alternativei $K_d > 1$ sau alternativei $K_d = 1$. În formulele (27) și (28) se consideră numai valorile σ care determină ordine ale unor momente externe ce subzistă în fiecare linie.

b) Se consideră arborii cotiți dispuși corespunzător cuplajului $I_s I_d$ al aprinderilor, în momentul de timp ales ca origine. În acest moment vectorii M_{p_0} din cele două linii sînt în opoziție de fază; vectorii M_p din orice linie, aflați atunci în fază fiindcă sînt cu toții asociați aceluiași unghi θ, au direcția paralelă și sensul opus față de direcția și sensul vectorilor M_p din cealaltă linie. Se mai presupune că poziția vectorilor M_p din fiecare linie este simetrică cu vectorul M_{p_0} din linia respectivă, în raport cu semiaxa $+\overline{\mathfrak{M}}_p$, adică se impune condiția $\theta = 2\pi - \theta_0$; pentru $\theta > \theta_0$, această situație este prezentată în figura 2*a*.

Menținînd arborele cotit din stînga pe loc, arborele cotit din dreapta este rotit fie cu unghiul $-(\psi - \zeta)$, fie cu unghiul ζ (alternativa $K_d > 1$ respectiv alternativa $K_d = 1$). Ca urmare, vectorul M_{p_0} din dreapta se rotește cu unghiul $-p_0(\psi - \zeta)$, respectiv cu unghiul $p_0\zeta$, ajungînd în poziția simetrică cu poziția vectorului M_{p_0} din stînga, față de planul H, ceea ce determină echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0. Pentru ca momentele rezultante de ordinele p să fie și ele echilibrate, este necesar ca rotirile vectorilor M_p din dreapta, corespunzătoare rotirii efectuate de arborele cotit din dreapta, să asigure o nouă coincidență de fază a acestor vectori, în poziția simetrică cu poziția vectorilor M_p din stînga în raport cu planul H; rezultatul astfel obținut este arătat în figura 2*b*, pentru $K_d > 1$ și în figura 2*c* pentru $K_d = 1$. Noua poziție a vectorilor M_p din dreapta este totodată simetrică cu vectorul M_{p_0} din dreapta, față de semiaxa $+\overline{\mathfrak{M}}_{p_d}$, ceea ce permite exprimarea condiției de echilibrare căutate prin relația

$$p(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\chi'\pi + 4\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right). \tag{29}$$

cînd $K_d > 1$ și prin relația

$$p\zeta = p_0\zeta + 2\chi'\pi - 4\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \tag{30}$$

cînd $K_d = 1$, χ' fiind un număr întreg.

Dacă se menţin ipotezele acceptate şi se reface acelaşi raţionament în cazul $\theta < \theta_0$, se deduce pentru cele două alternative

$$p(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\chi'\pi + 4\left(\frac{3\pi}{2} - \theta_0\right), \tag{31}$$

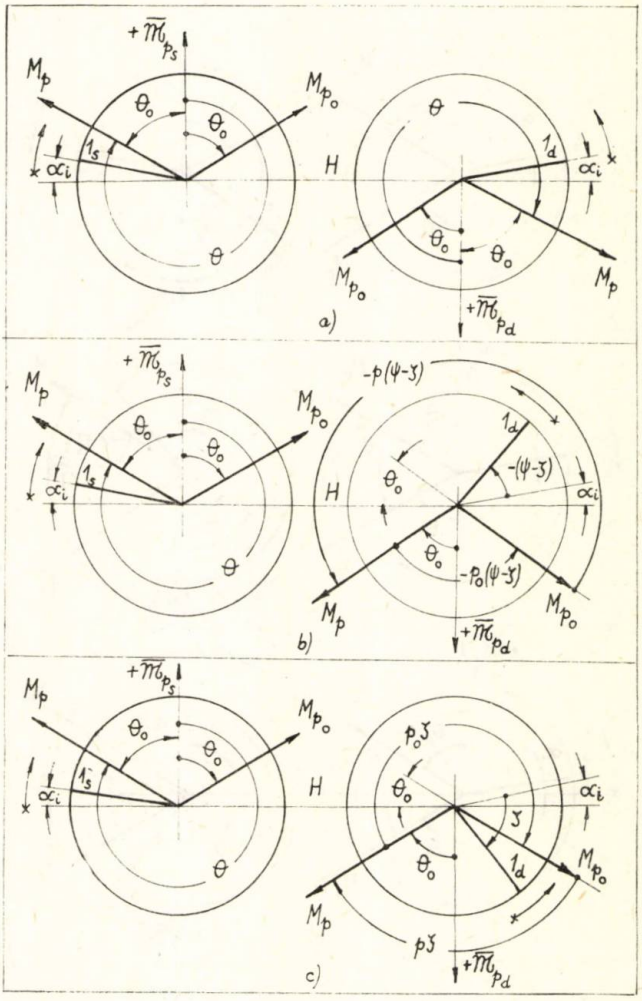


Fig. 2. — Soluţii de echilibrare a momentelor rezultante de ordinele p simultan cu momentul rezultant de ordinul p_0, cînd poziţia vectorilor M_p este simetrică cu vectorul M_{p_0} faţă de semiaxa $+\overline{\mathfrak{M}}_p$.

respectiv

$$p\zeta = p_0\zeta + 2\chi'\pi - 4\left(\frac{3\pi}{2} - \theta_0\right). \tag{32}$$

Considerînd că arborii cotiţi au aceeaşi dispunere iniţială, dar presupunînd că simetria dintre poziţia vectorilor M_p din fiecare linie şi vectorul M_{p_0} al liniei respective se realizează în raport cu semiaxa $-\overline{\mathfrak{M}}_p$,

se obţine relaţia (29), ori relaţia (31) cînd $K_d > 1$, după cum $\theta > \theta_0$ sau $\theta < \theta_0$; alternativa $K_d = 1$ comportă condiţia (30) cînd $\theta > \theta_0$ şi condiţia (32) cînd $\theta < \theta_0$.

Dacă se acceptă că dispunerea iniţială a arborilor cotiţi, corespunzătoare cuplajului $I_s I_d$ al aprinderilor, este asociată cu plasarea vectorilor M_p şi M_{p_0} în spaţiul dintre planele $\mathfrak{M}_{p_s}$ şi $\mathfrak{M}_{p_d}$, sau în afara acestui spaţiu,

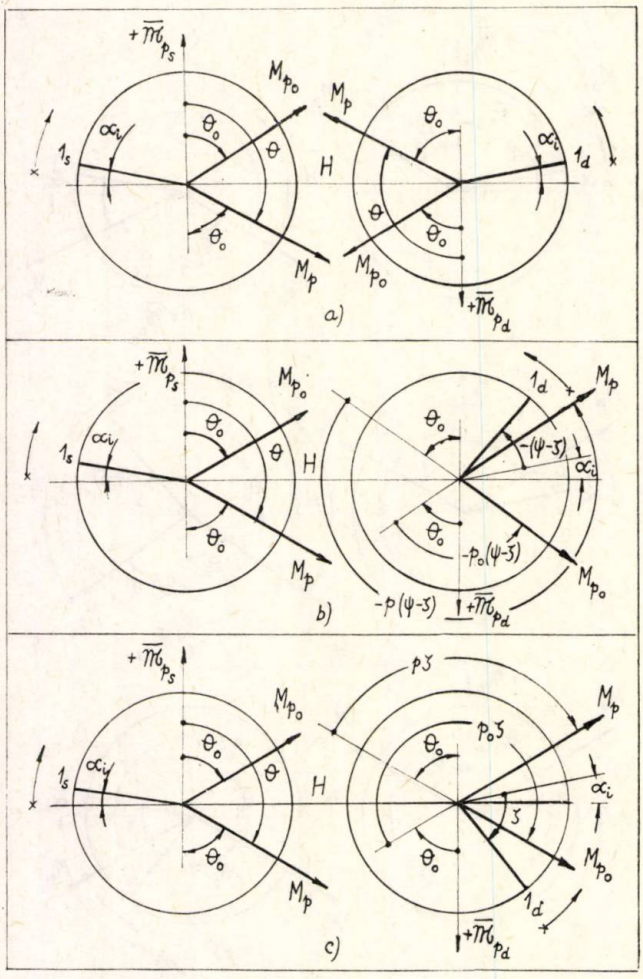


Fig. 3. — Soluţii de echilibrare a momentelor rezultante de ordinele p simultan cu momentul rezultant de ordinul p_0, cînd poziţia vectorilor M_p este simetrică cu vectorul M_{p_0} faţă de planul H.

şi că poziţia vectorilor M_p dintr-o linie este atunci simetrică cu vectorul M_{p_0} din acea linie faţă de planul H, se ajunge la una din relaţiile (29) sau (31) cînd $K_d > 1$, respectiv la una din relaţiile (30) sau (32) cînd $K_d = 1$. De pildă, cînd $\theta > \theta_0$ şi vectorii M_p şi M_{p_0} se află iniţial în spaţiul dintre planele $\mathfrak{M}_{p_s}$ şi $\mathfrak{M}_{p_d}$ (fig. 3) se obţine relaţia (29) pentru $K_d > 1$, respectiv relaţia (30) pentru $K_d = 1$.

Deoarece relaţiile (29) şi (31) exprimă deplasări unghiulare şi diferă între ele printr-un multiplu de 2π, în locul lor se poate propune o relaţie

unică, unde toţi multiplii de 2π să fie concentraţi într-un singur termen. Avînd avantajul că permite o apreciere unitară a tuturor cazurilor aferente alternativei $K_d > 1$, această relaţie este

$$p(\psi - \zeta) = p_0(\psi - \zeta) + 2\chi\pi - 4\theta_0.$$

În acelaşi mod rezultă că formula

$$p\zeta = p_0\zeta + 2\chi\pi + 4\theta_0$$

este totdeauna aplicabilă pentru alternativa $K_d = 1$. În consecinţă, se constată că, o dată cu echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0, se mai echilibrează şi momentele rezultante de ordinele

$$p = p_0 + 2\frac{\chi\pi - 2\theta_0}{\psi - \zeta} \tag{33}$$

dacă se aplică alternativa $K_d > 1$, respectiv momentele rezultante de ordinele

$$p = p_0 + 2\frac{\chi\pi + 2\theta_0}{\zeta} \tag{34}$$

dacă se utilizează alternativa $K_d = 1$; în orice linie, unghiul θ corespunzător ordinelor (33) sau (34) asigură simetria poziţiei vectorilor M_p cu vectorul M_{p_0}, fie în raport cu planul $\mathfrak{M}_p$ al liniei respective, fie în raport cu planul H, cînd arborii cotiţi sînt dispuşi conform cuplajului $I_s I_d$ al aprinderilor în momentul de timp ales ca origine. Numerele χ din (33) şi (34) trebuie alese în aşa fel încît să conducă la ordine ale unor momente externe care subzistă în fiecare linie.

2.3. CONDIŢIA CARE ASIGURĂ CEL MAI BUN ECHILIBRAJ AL MOMENTELOR REZULTANTE

Pentru a obţine cel mai bun echilibraj al momentelor rezultante, este necesar să se adopte decalajul funcţional dintre liniile de cilindri potrivit condiţiei de echilibrare a momentului rezultant de ordinul cel mai mic. Această practică ţine seamă că momentul rezultant de ordinul cel mai mic are, de regulă, cea mai mare amplitudine şi că amplitudinile momentelor rezultante echilibrate în acelaşi timp sînt maximale, întrucît formulele (27) şi (33), respectiv (28) şi (37), conduc la ordine minimale cînd $p_0 = p_{\min}$.

2.4. POSIBILITĂŢILE DE ECHILIBRARE A MOMENTELOR REZULTANTE OFERITE DE REPARTIŢIA UNIFORMĂ A APRINDERILOR PENTRU ANSAMBLUL MOTORULUI

Dacă echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 este asigurată prin repartiţia uniformă a aprinderilor pentru ansamblul motorului, adică prin decalajul

$$\zeta = \frac{\tau\pi}{i} \tag{35}$$

între aprinderile I_s și K_d, se obține o comportare favorabilă din punct de vedere dinamic a motorului.

Cînd unghiul θ_0 aparține domeniului (17), o posibilitate de îndeplinire a acestei condiții în alternativa $K_d > 1$ se concretizează identificînd formulele (13) și (35); rezultă astfel necesitatea existenței unui număr K_d care să îndeplinească egalitatea

$$K_d = \frac{3}{2} + \frac{i}{\tau} \cdot \frac{\theta_0}{\pi p_0}.$$

Cînd θ_0 se află în domeniul (18) și se utilizează tot alternativa $K_d > 1$, condiția pe care trebuie s-o respecte numărul K_d, dedusă prin identificarea relațiilor (14) și (35), este

$$K_d = \frac{3}{2} + \frac{i}{\tau} \cdot \frac{\theta_0 - \pi}{\pi p_0}.$$

În alternativa $K_d = 1$, posibilitatea ca repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul motorului să antreneze echilibrarea momentului rezultant de ordinul p_0 se evidențiază cu ajutorul relațiilor (20) și (21). Identificînd aceste relații cu formula (35), rezultă că ordinul p_0 și unghiul θ_0 care îi corespunde trebuie să satisfacă egalitatea

$$\frac{1 - \frac{\theta_0}{\pi}}{p_0} = \frac{\tau}{2i}$$

dacă θ_0 este cuprins în intervalul (17), respectiv egalitatea

$$\frac{2 - \frac{\theta_0}{\pi}}{p_0} = \frac{\tau}{2i}$$

dacă θ_0 aparține intervalului (18).

Comportarea dinamică optimă ar rezulta cînd repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul motorului ar caracteriza una dintre soluțiile de echilibrare a momentului rezultant de ordinul p_{min}; această soluție ar fi evident preferabilă. Dacă nu există o astfel de soluție, se adoptă fie cuplajul aprinderilor care asigură echilibrajul optim, fie repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul motorului, acceptînd un echilibraj mai slab.

3. CONCLUZII

Momentul rezultant de orice ordin poate fi echilibrat la orice motor cu două linii opuse de cilindri și doi arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare, prin asigurarea unui decalaj funcțional adecvat între cilindrii motorului.

Deoarece orice soluție de echilibrare a momentului rezultant de un ordin dat conduce și la echilibrarea unor momente rezultante de alte ordine, cel mai bun echilibraj corespunde decalajului funcțional care antrenează echilibrarea momentului rezultant de ordinul cel mai mic.

Anumite momente rezultante se echilibrează cînd se utilizează repartiția uniformă a aprinderilor pe întregul motor.

Primită la redacție la 11 august 1973

BIBLIOGRAFIE

1. G. BĂRĂNESCU, GH ZĂTREANU, *Echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție la motoarele cu două linii paralele de cilindri și doi arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare*, St. cerc. mec., apl., 2 (1974).
2. G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU, *Îmbunătățirea echilibrajului momentelor forțelor de inerție prin plasarea cilindrilor în două linii prevăzute fiecare cu un arbore cotit*, St. cerc. mec. apl., *5* (1969).
3. G. BĂRĂNESCU, *Interpretări vectoriale ale forței de inerție a maselor cu mișcare de translație aferente echipajului mobil al cilindrului unui motor cu ardere internă, cu considerarea variației vitezei unghiulare de rotație a arboretului cotit*, St. cerc. mec. apl., *6* (1960).

INTERACȚIUNEA DINTRE PNEU ȘI CALE LA SOLICITĂRI LATERALE ALE ROȚII

de CH. VASILIU și E. NEGRUȘ
Institutul politehnic București

Complexitatea interacțiunii dintre pneu și cale la solicitări laterale, precum și influența acesteia asupra automobilului în mișcare au făcut necesară elaborarea unor modele matematice cu ajutorul cărora să se determine elementele dinamice, care apar în pata de contact dintre pneu și cale și prin aceasta să se controleze fenomenul.
Compararea rezultatelor obținute pe calculator cu cele experimentale a condus la concluzia că modelul matematic propus în lucrare poate fi utilizat cu succes în rezolvarea unor probleme importante din dinamica automobilului.

1. RULAREA ROȚII CU PNEU, SOLICITATĂ TRANSVERSAL

Datorită elasticității transversale a pneului — sub acțiunea unei forțe laterale F_y, mai mică decît valoarea forței de aderență $\varphi \cdot G_r$ a roții, astfel ca pneul să nu poată aluneca transversal (derapa) — planul

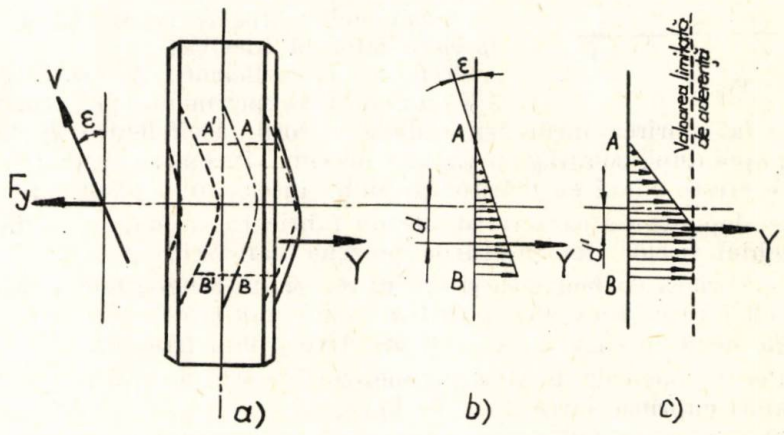


Fig. 1

median al roții se va deplasa lateral față de centrul petei de contact (fig. 1*a*), iar roata va rula pe direcția V, înclinată față de planul său median cu unghiul de derivă ε.

Elementele de pe suprafața pneului, care intră în zona de contact cu calea, sînt mai puțin deformate decît cele care ies din această zonă, astfel că în ipoteza unor presiuni de contact constante și a unei pete de contact de lățime constantă — reacțiunile transversale elementare vor fi distribuite după un triunghi (fig. 1*b*); reacțiunea rezultantă transversală Y va avea punctul de aplicație deplasat spre înapoi cu distanța d față de proiecția pe cale a centrului roții, dînd naștere momentului stabilizator:

$$M_{st} = Y \cdot d = F_y \cdot d. \tag{1}$$

Odată cu mărirea forței transversale F_y, reacțiunile transversale elementare cresc pînă ce ating valoarea limitată de aderența transversală, după care apar alunecări laterale locale între pneu și cale, diagrama de distribuție căpătînd aspectul din figura 1*c*. Odată cu aceasta, poziția reacțiunii Y se deplasează, apropiindu-se de centrul suprafeței de contact, micșorînd astfel valoarea momentului stabilizator.

Pentru un anumit tip de pneu, o anumită valoare a presiunii interioare și o anumită încărcare radială a roții, dependența dintre unghiul de derivă ε și forța transversală F_y se poate determina experimental și are forma curbelor din figura 2.

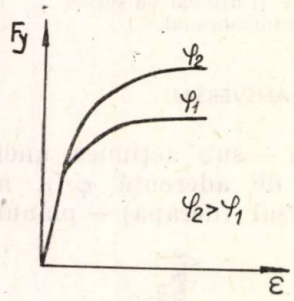


Fig. 2

La început unghiul ε crește proporțional cu F_y, apoi din ce în ce mai mult, pînă la atingerea valorii aderenței ($F_y = \varphi \cdot G_r$), cînd se produce deraparea.

Pentru partea liniară a curbei, avem

$$F_y = K \cdot \varepsilon, \tag{2}$$

în care

K este coeficientul de rezistență al pneului la deviere laterală (derivă).

Referitor la coeficientul de rezistență la derivă K s-au stabilit experimental [1] următoarele:

— la sporirea încărcării radiale a roții, coeficientul K mai întîi crește, apoi după ce atinge o valoare maximă, începe să scadă;

— crește odată cu mărirea presiunii interioare a pneului;

— depinde de caracteristicile de fabricație a pneului și în special de unghiul firelor din țesăturile pînzelor carcasei;

— variază cu mărimea și sensul reacțiunii tangențiale a căii asupra roții; cînd reacțiunea este pozitivă (roată motoare) coeficientul K este mai mic decît în cazul reacțiunii negative (roată frînată).

Pentru pneurile de autoturisme, coeficientul de rezistență la derivă are valori cuprinse între 25...75 kgf/grad.

Momentul stabilizator crește odată cu unghiul de derivă pînă în momentul apariției alunecării transversale a elementelor pneului, după care începe să scadă. Cînd alunecarea transversală cuprinde în întregime toate elementele pneului în contact cu calea, momentul stabilizator devine nul, deoarece rezultanta reacțiunilor transversale trece prin centrul de contact.

La automobilele moderne se folosesc pneuri radiale, care au coeficientul de rezistență la derivă mare. Pentru presiunea aerului joasă și încărcarea radială sporită a pneurilor de direcție, acestora le revine un moment stabilizator mare, însă în același timp se mărește și efortul necesar pentru virarea roților. Din aceste motive, în prezent, există tendința de a micșora și uneori chiar a reduce la zero unghiul de înclinare longitudinală a pivotului, în care caz momentul stabilizator este obținut pe seama elasticității laterale a pneurilor. Efectul de stabilizare datorită elasticității pneurilor este influențat de existența forțelor tangențiale din suprafața de contact.

În timpul frînării roților de direcție momentul stabilizator se micșorează, iar maniabilitatea se înrăutățește.

Pentru anumite corelații între unghiurile de înclinare a pivotului, unghiurile de cădere și mărimea forțelor de frînare se poate întîmpla ca momentul stabilizator $M_{st} < 0$ și astfel acesta să tindă să vireze roțile și mai mult. De aceea, la alegerea repartizării pe osii a momentelor de frînare, trebuie avută în vedere înrăutățirea maniabilității automobilului la frînare și, la caz de nevoie, trebuie micșorat momentul de frînare pe roțile de direcție, comparativ cu valoarea optimă care asigură intensitatea maximă a frînării.

În cazul roților de direcție motoare momentul stabilizator crește, deoarece suma momentelor date de forțele de tracțiune ale celor două roți motoare este întotdeauna pozitivă.

2. MODELAREA INTERACȚIUNII DINTRE PNEU ȘI CALE

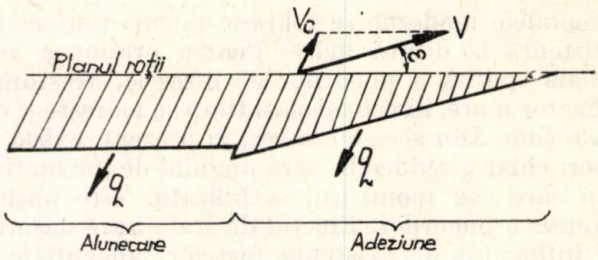
În literatura de specialitate se întîlnesc numeroase lucrări de cercetare în care sînt prezentate diferite modele teoretice privitoare la rularea pneului elastic. Cele mai multe sînt orientate spre determinarea reacțiunii pneului în funcție de unghiul de derivă, de viteză și de alți parametri [2]—[4], definind astfel anumite aspecte ale mecanicii pneului de automobil. Nu sînt însă uneori remarcate aspecte importante, ca fenomenele complexe ale contactului elastic dintre pneu și drum, factorii care guvernează frecarea dintre suprafețele de contact și reacția pneului atunci cînd se suprapun alunecarea longitudinală și alunecarea transversală.

Sînt și unele lucrări, în care se ține seama de efectul interacțiunii dintre alunecările longitudinală și transversală [5], se ia în considerare o valoare mai mare pentru coeficientul de aderență decît cel pentru frecare [6], sau altele [7] în care elasticitatea pneului este remarcată printr-o serie de elemente elastice ce fac legătura dintre o carcasă rigidă a pneului și calea de rulare, distribuția presiunii fiind considerată constantă.

Considerăm însă că anumite îmbunătățiri aduse acestor modele pot lărgi mult domeniul lor de utilizare, păstrîndu-se avantajul simplității relațiilor matematice, care descriu fenomenul rulării pneului.

În completarea modelului Dugoff ș.a. [7], între cele două zone ale suprafeței de contact (adeziune progresivă și alunecare uniformă) se adaugă o zonă de tranziție, în care are loc o trecere gradată de la adeziune la alunecare (fig. 3).

MODELUL INIȚIAL



MODELUL MODIFICAT

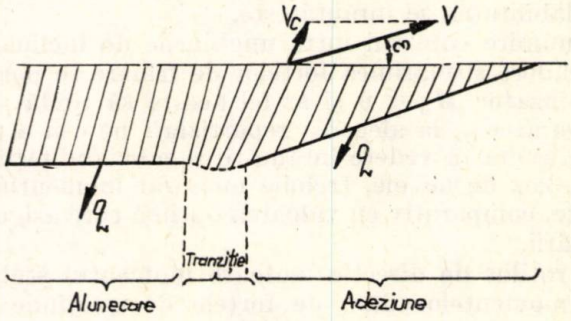


Fig. 3

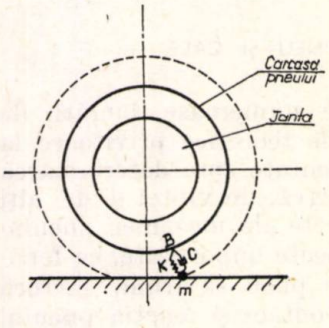
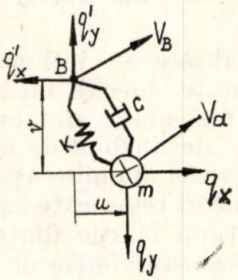


Fig. 4



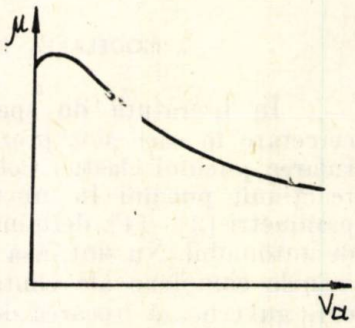


Fig. 5

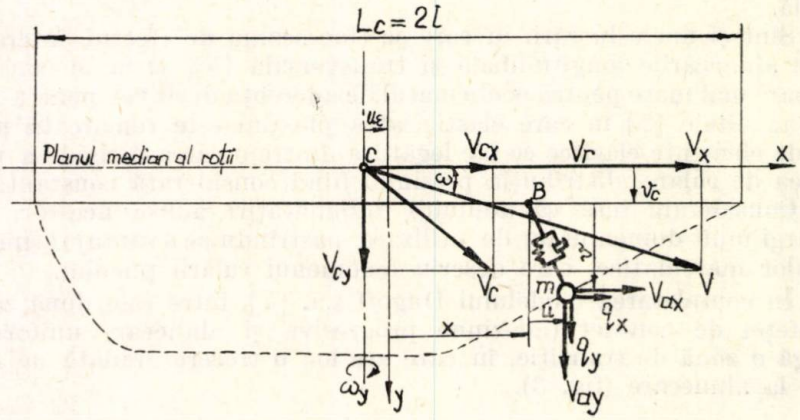


Fig. 6

Modelul propus pentru studiul forțelor longitudinale și transversale din pata de contact dintre pneu și cale*) (fig. 4) constă din carcasa rigidă a pneului prevăzută cu o serie de elemente elastice prin care are loc contactul cu drumul; dintre aceste elemente, unul va fi urmărit pe durata trecerii prin zona de contact. Pentru cazul cînd mișcarea pneului este uniformă, deformațiile și forțele tăietoare în lungul axei OX din planul median al roții sînt constante în timp, deci forța totală și momentul care acționează în pata de contact dintre drum și pneu, în decursul trecerii unui element elastic prin zona de contact, se pot calcula prin integrare. Sub influența alunecărilor longitudinale și transversale, elementul de pneu, avînd valori diferite ale rigidității transversală și longitudinală suferă o succesiune de deformări complexe, iar datorită coeficientului de frecare descrescător (fig. 5) mișcarea sa devine instabilă, reflectîndu-se prin fenomenul „Slip-stick", observat adeseori în practică. Elementul elastic de pneu prezintă atît masă, necesară pentru a defini mișcarea oscilatorie, cît și proprietăți de amortizare, pentru stabilizarea mișcării.

Baza elementului elastic de pneu este punctul B, prin care acesta este fixat de carcasa rigidă (fig. 6). Acest punct se mișcă într-un plan paralel cu planul median al roții, care este deplasat lateral cu distanța v_c, corespunzător deformației laterale uniforme a carcasei pneului. În afară de aceasta, centrul de presiune al petei de contact mai poate avea o deplasare longitudinală u_c, datorită acțiunii forțelor de tracțiune sau de frînare. Influența acestor deplasări a petei de contact se reflectă în valoarea momentului rezultat în jurul axei verticale, care trece prin centrul roții. Deformația uniformă a carcasei este considerată constantă, pe toată durata trecerii elementului elastic prin zona de contact.

Considerînd că centrul roții se deplasează cu viteza V, care face unghiul ε cu planul vertical median al roții, componenta transversală a vitezei va fi

$$V_y = V_{cy} = V \cdot \sin \varepsilon, \tag{3}$$

iar componenta longitudinală:

$$V_x = V \cdot \cos \varepsilon. \tag{4}$$

Pneul rotindu-se cu viteza unghiulară ω_y, viteza periferică a pneului (viteza de rulare) va fi definită de relația

$$V_r = r_r \cdot |\omega_y|, \tag{5}$$

în care r_r este raza de rulare a pneului.

În consecință, viteza de alunecare longitudinală este

$$V_{cx} = V_x - V_r. \tag{6}$$

Se introduc doi parametri, care definesc starea de alunecare în timpul rulării în linie dreaptă, și anume:

*) Modelul a fost elaborat de un colectiv de cercetători de la Highway Safety Research Institute, Michigan—U.S.A., condus de P. Faucher, din care a făcut parte și dr. ing. Eugen Negruș.

— alunecarea longitudinală :

$$a_x = \frac{V_{cx}}{V_x} = 1 - \frac{\omega_y}{\omega_{y_0}}, \tag{7}$$

— alunecarea transversală :

$$a_y = \frac{V_{cy}}{V_x} = \operatorname{tg} \varepsilon. \tag{8}$$

Dacă se consideră cazul general, mai apare o alunecare în jurul axei verticale z, datorită vitezei unghiulare ω_z, iar punctul B al elementului elastic (fig. 4 și 6) va avea, în acest caz, următoarele componente ale vitezei :

$$V_{Bx} = V_{cx} - v_c \cdot \omega_z, \tag{9}$$

$$V_{By} = V_{cy} + (x + u_c) \cdot \omega_z. \tag{10}$$

Viteza de alunecare a punctului de contact (în raport cu drumul) este dată de relațiile :

$$V_{ax} = V_{cx} - (v_c + v)\omega_z + \dot{u}, \tag{11}$$

$$V_{ay} = V_{cy} + (x + u_c + u)\omega_z + \dot{v}. \tag{12}$$

Pentru regimurile de mișcare cu perioadă mare, termenul în ω_z poate fi neglijat, astfel că în cele ce urmează se va neglija influența vitezei de rotație în jurul axului vertical, ecuațiile pentru vitezele de alunecare a punctului de contact devenind :

$$V_{ax} = V_{cx} + \dot{u}, \tag{13}$$

$$V_{ay} = V_{cy} + \dot{v}. \tag{14}$$

Elementul elastic se mișcă prin zona de contact cu o viteză medie egală cu viteza de rulare V_r. Notînd lungimea petei de contact $L_c = 2\,l$, intervalul de timp în care elementul elastic parcurge întreaga zonă de contact este dat de relația

$$t = \frac{L_c}{V_r}. \tag{15}$$

Deoarece, cînd roata este blocată, durata de parcurgere a zonei de contact tinde către infinit, simularea analogică a fenomenului se va limita la valori subunitare ale alunecării longitudinale ($a_x < 1$).

Considerînd elementele elastice studiate dispuse la intervale egale cu lungimea petei de contact, timpul la care elementul i părăsește contactul este :

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t, \tag{16}$$

unde Δt este durata de parcurgere a zonei de contact de către elementul i.

Coordonata x a bazei elementului (punctul B) este determinată de

$$x = \frac{1}{2} \cdot L_c - V_r(t - t_{i-1}). \tag{17}$$

Elementul elastic are rigiditățile k_x și k_y și coeficienții de armortizare c_x și c_y, pe direcțiile x și respectiv y, iar la extremitatea elementului se consideră concentrată masa m. Valorile k_x, k_y, c_x, c_y și m se iau raportate la unitatea de lungime a circumferinței pneului.Componentele forței tăietoare din pata de contact, q_x și q_y și distribuția presiunii de contact pe verticală se consideră, de asemenea, raportate la unitatea de lungime a circumferinței pneului.

Ținînd seama de cele arătate, ecuațiile de mișcare ale elementului de pneu vor fi :

$$m\ddot{u} + c_x\dot{u} + k_x u = q_x, \tag{18}$$

$$m\ddot{v} + c_y\dot{v} + k_y v = q_y. \tag{19}$$

Condițiile inițiale de deformare și intervalul de timp de la care are loc modificarea stării de deformare a elementului de pneu se presupun egale cu zero.

Cînd forța tăietoare rezultantă acționează în sens opus vitezei de alunecare avem :

$$q_x = -q \cdot \frac{V_{ax}}{V_a}, \tag{20}$$

$$q_y = q \cdot \frac{V_{ay}}{V_a}. \tag{21}$$

cu

$$V_a^2 = V_{ax}^2 + V_{ay}^2. \tag{22}$$

Ca urmare a legii variației coeficientului de frecare adoptată mai înainte (fig. 5), putem scrie :

$$q = \mu \cdot q_z, \tag{23}$$

în care

$$\mu = \mu(V_a), \tag{24}$$

$$q_z = q_z(x). \tag{25}$$

Distribuția verticală a presiunii poate fi considerată ca o funcție a sarcinii verticale pe pneu (F_z).

Forțele și momentul care acționează asupra carcasei pneului se calculează prin integrarea componentelor forțelor interne pe unitatea de lungime (forțele din arc și amortizor; fig. 4)

$$q'_x = c_x\dot{u} + k_x u, \tag{26}$$

$$q'_y = c_y\dot{v} + k_y v. \tag{27}$$

Mărimile q'_x și q'_y pot fi obținute cu ajutorul unui circuit analogic a cărui schemă simplificată este reprezentată în figura 7.

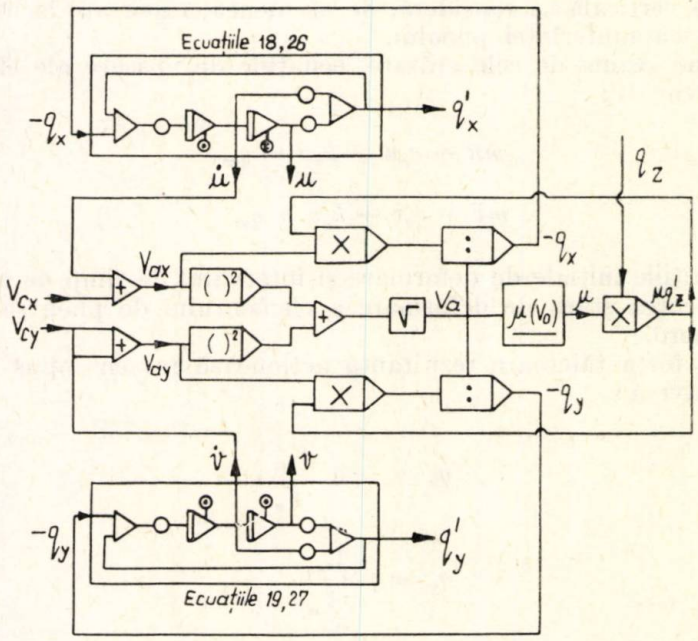


Fig. 7

Forțele longitudinală și laterală, cît și momentul care acționează asupra pneului, se determină cu ajutorul relațiilor:

$$F_x = \int_{-l}^{l} q'_x \, \mathrm{d}x = V_r \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} q'_x \, \mathrm{d}t, \tag{28}$$

$$F_y = \int_{-l}^{l} q'_y \, \mathrm{d}x = V_r \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} q'_y \, \mathrm{d}t, \tag{29}$$

$$M_z = V_r \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} [(x + u_c + u)\, q'_y - (v_c + v) q'_x \,] \cdot \mathrm{d}t. \tag{30}$$

Deplasările efective uniforme ale carcasei pneului sînt definite cu ajutorul relațiilor :

$$u_c = \alpha_x \cdot \frac{F_x}{K_x}, \tag{31}$$

$$v_c = \alpha_y \cdot \frac{F_y}{K_y}, \tag{32}$$

în care

K_x, K_y sînt rigiditățile longitudinală și, respectiv, transversală ale carcasei ;

α_x, α_y — coeficienți care definesc proporția din deformările longitudinală și transversală ale pneului în raport cu janta, care se iau efectiv în calcul.

Ținînd seama de relațiile (31) și (32) ecuația momentului se poate scrie sub forma :

$$M_z = V_r \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} [(x+u)q'_y - v \cdot q'_x] \cdot \mathrm{d}t + \left(\frac{\alpha_x}{k_x} - \frac{\alpha_y}{k_y}\right) \cdot F_x \cdot F_y. \tag{33}$$

3. SIMULAREA PE CALCULATOR A PNEULUI ELASTIC

Studiul modelului de pneu a fost efectuat pe un calculator electronic hibrid (ADA și IBM 1800).

În figura 8 este reprezentată schema analogică simplificată, pentru generarea forțelor și momentului. Mărimile care se introduc ca „input" sînt generate de programul digital, fie care rezultat al unei matrice de „input" fie prin condițiile instantanee ale simulării mișcării întregului

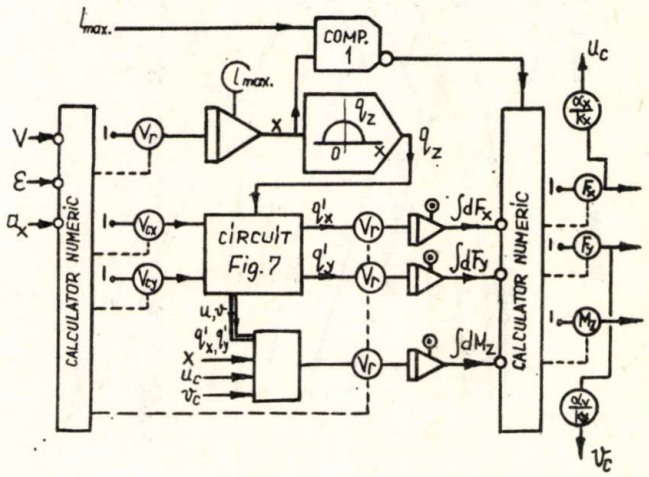


Fig. 8

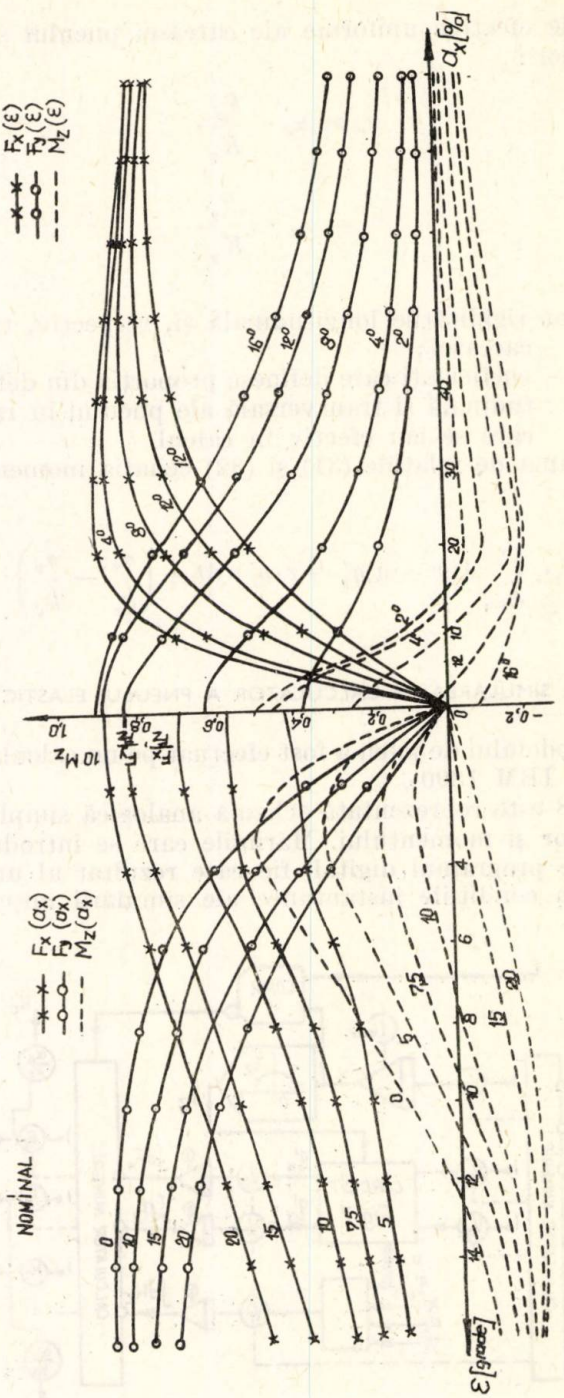


Fig. 9

automobil. De îndată ce comparatorul 1 sesizează că $x = -l_{max}$, cursa elementului de pneu prin pata de contact este terminată și calculatorul analog comandă calculatorul digital, menținîndu-l în poziție de așteptare. Mărimile integrate obținute la ieșirea din calculatorul analog sînt introduse în convertoarele analog-digital (CAD) împreună cu noile valori ale parametrilor V, ε și a_x. Valorile F_x, F_y și M_z cît și mărimile care urmează a fi introduse în calculator ca „input" sînt imprimate pe bandă magnetică sau direct tipărite, iar valorile calculate pentru V_r, V_{cx} și V_{cy} sînt introduse în convertoarele digital-analog (CDA). După aceasta, condițiile inițiale și condițiile de operare pentru calculatorul analog sînt rechemate după ce fiecare rulare următoare a calculatorului se declanșează.

În figura 9 se prezintă rezultatele obținute prin simularea pe calculator a interacțiunii dintre pneu și cale, pentru valorile nominale ale parametrilor.

4. STUDIUL PARAMETRIC AL MODELULUI DE PNEU

În vederea determinării influenței legilor de variație a parametrilor de calcul asupra rezultatelor obținute cu modelul de pneu s-a efectuat un studiu parametric utilizînd o tehnică de baleeare a matricelor cuprinzînd datele inițiale ce urmează a fi introduse în calculator ca variabile de „input". Cîmpurile de tracțiune au fost generate cu ajutorul a două variabile independente : alunecarea a_x și unghiul de derivă ε.

S-au executat circa 60 de rulări pe calculator, cuprinzînd astfel toate schimbările parametrilor inițiali. Pentru fiecare rulare s-au executat aproximativ zece reglaje potențiometrice corespunzătoare combinației $a_x - \varepsilon$ avute în vedere. Toate aceste operații au fost mult simplificate prin folosirea calculatorului electronic hibrid.

Pentru rezolvarea, pe calculator, a ecuațiilor de mișcare ale pneului a fost necesară transformarea tuturor mărimilor dimensionale în mărimi adimensionale. În acest scop s-a introdus noțiunea de încărcare verticală medie pe unitatea de lungime a petei de contact :

$$q_{z_0} = \frac{|F_z|}{L_c}, \tag{34}$$

în care

$|F_z|$ este încărcarea verticală a pneului, iar L_c este lungimea petei de contact.

De asemenea, se adoptă drept viteză de referință,

$$V_0 = 22 \text{ m/s} = 80 \text{ km/h}.$$

Folosind mărimile arătate mai sus, se pot defini următoarele mărimi adimensionale :

— încărcarea verticală/unitatea de lungime : $\bar{q}_z = \frac{q_z}{q_{z0}}$,

— încărcarea orizontală/unitatea de lungime : $\bar{q}_H = \frac{q_H}{q_{z0}}$,

— viteza de alunecare : $\bar{V}_a = \frac{V_a}{V_0}$,

— timpul : $t = \frac{V_0 \cdot t}{L_c}$,

— deformația longitudinală : $\bar{u} = \frac{u}{L_c}$,

— deformația laterală : $\bar{v} = \frac{v}{L_c}$,

— coordonata longitudinală : $\bar{x} = \frac{x}{L_c}$,

— forța laterală totală : $\bar{F}_y = \frac{F_y}{|F_z|}$,

— forța longitudinală totală : $\bar{F}_x = \frac{F_x}{|F_z|}$,

— momentul de stabilizare : $\bar{M}_z = \frac{M_z}{(L_c \cdot |F_z|)}$,

— masa, pe unitate de lungime : $\bar{m} = \frac{m \cdot V_0^2}{(q_{z0} \cdot L_c)}$,

— rigiditatea, pe unitatea de lungime : $\bar{k}_{x,y} = \frac{k_{x,y} \cdot L_c}{q_{z0}}$,

— rigiditatea carcasei, pneului : $\bar{K}_{x,y} = \frac{K_{x,y} \, L_c}{|F_z|}$.

În calcule cît și în circuitele calculatorului electronic, barele de deasupra notațiilor vor fi omise.

Studiul parametric pe calculator s-a efectuat modificînd parametrii pe baza schemei prezentate mai jos :

Parametrii modificați	Parametrii constanți	Parametrii modificați		
Rigiditatea pneului	V_{nom}, $q_{z\,nom}$, μ_{nom}	k_{nom}	$\frac{1}{2}k_{nom}$	$2k_{nom}$
		K_{nom}	$\frac{1}{2}K_{nom}$	$2K_{nom}$
		μ_0	A	B
		1,0	0	0
Coeficientul de frecare	V_{nom}, $q_{z\,nom}$	1,0	0,5	0
$\mu = \mu_0(1 - A \cdot V_a + B \cdot V_a^2)$	k_{nom}, K_{nom}	1,0	0,5	0
		0,5	0,5	0
		0,5	2,0	2,0
Încărcarea pe verticală a pneului, F_z	V_{nom}, μ_{nom}, k_{nom}, K_{nom}	$F_{z\,nom}$	$\frac{1}{2}F_{znom}$	$2F_{znom}$

După cum este cunoscut, modificarea încărcării verticale a pneului atrage după sine modificarea lungimii petei de contact și distribuția presiunii dintre pneu și drum. La studiul parametric efectuat, pentru determinarea corelației dintre modificarea încărcării verticale și lungimea petei de contact s-au folosit date obținute pe cale experimentală, iar pentru variația presiunii specifice în lungul suprafeței de contact s-au avut în vedere curbele prezentate în figura 10.

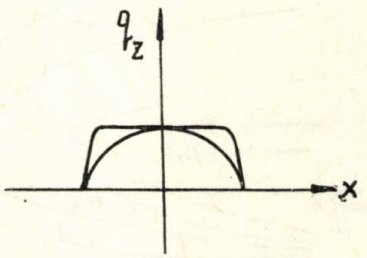


Fig. 10

Rezultatele studiului parametric sînt prezentate în figurile 11,12 și 13, pentru parametrii : $V = 80$ km/h ; $k_y = 25\ q_{z0}/L_c$; $k_x = 20\ q_{z0}/L_c$; $c_x = c_y = 2\ q_{z0}/V_0$; $m = 0{,}1\ q_{z0} \cdot L_c/V_0^2$; $K_x = 11\ q_{z0}$; $K_y = 14\ q_{z0}$; $a_x = 0{,}25$; $a_y = 0{,}8$; $q_{z\max} = 1{,}25\ q_{z0}$.

După cum se observă (fig. 12) modificarea legii de variație a coeficientului de frecare influențează în special asupra caracteristicilor curbelor F_x și F_y în zona de alunecare intensă. Acest fenomen a fost constatat și experimental la încercările efectuate pe drum umed [8].

Influența formei curbei de distribuție a presiunii de contact (fig. 13) se manifestă în mod deosebit asupra curbei momentului stabilizator M_z. Astfel, forma aplatisată a distribuției presiunii de contact generează valori de vîrf mai mari pentru momentul stabilizator.

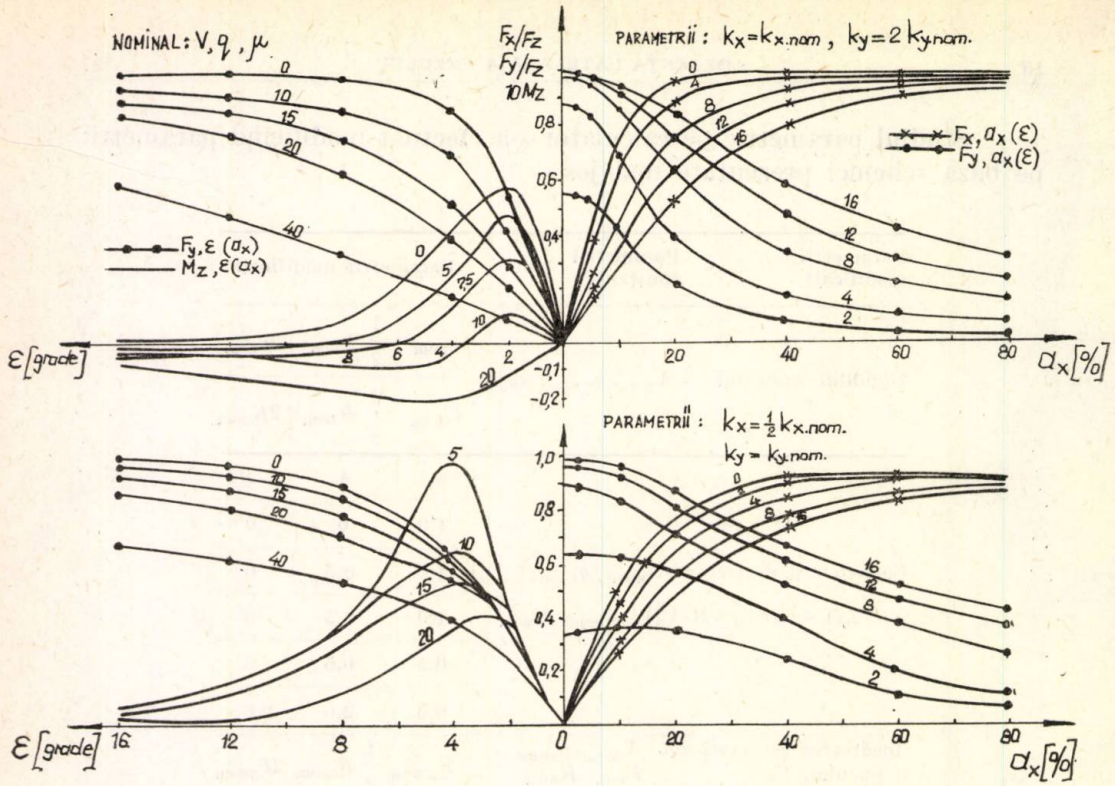

NOMINAL: V, q, μ
Fx/Fz
Fy/Fz
10Mz
PARAMETRII : kx=kx.nom , ky=2 ky.nom.
Fx, αx(ε)
Fy, αx(ε)
Fy, ε (αx)
Mz, ε(αx)
ε[grade]
αx[%]
PARAMETRII : kx=½ kx.nom.
ky = ky.nom.

Fig. 11

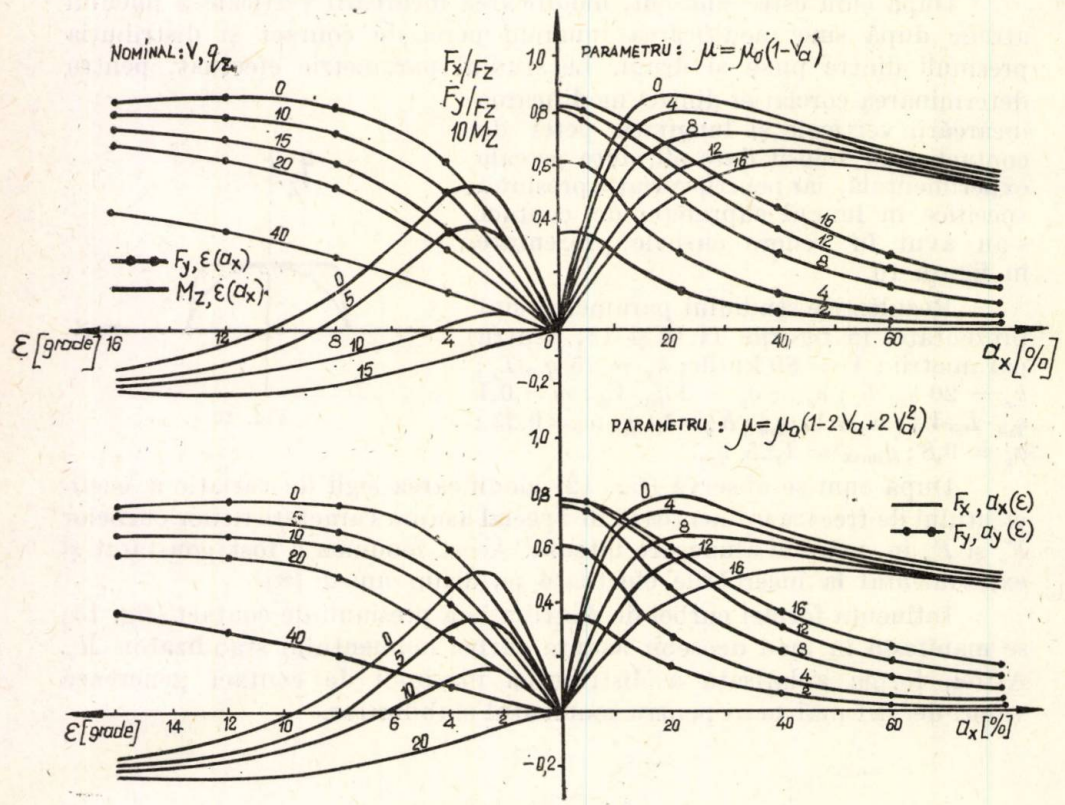

NOMINAL: V, qz
Fx/Fz
Fy/Fz
10Mz
PARAMETRU : μ=μ0(1-Vα)
Fy, ε(αx)
Mz, ε(αx)
ε[grade]
αx[%]
PARAMETRU : μ=μ0(1-2Vα+2Vα²)
Fx, αx(ε)
Fy, αy(ε)

Fig. 12

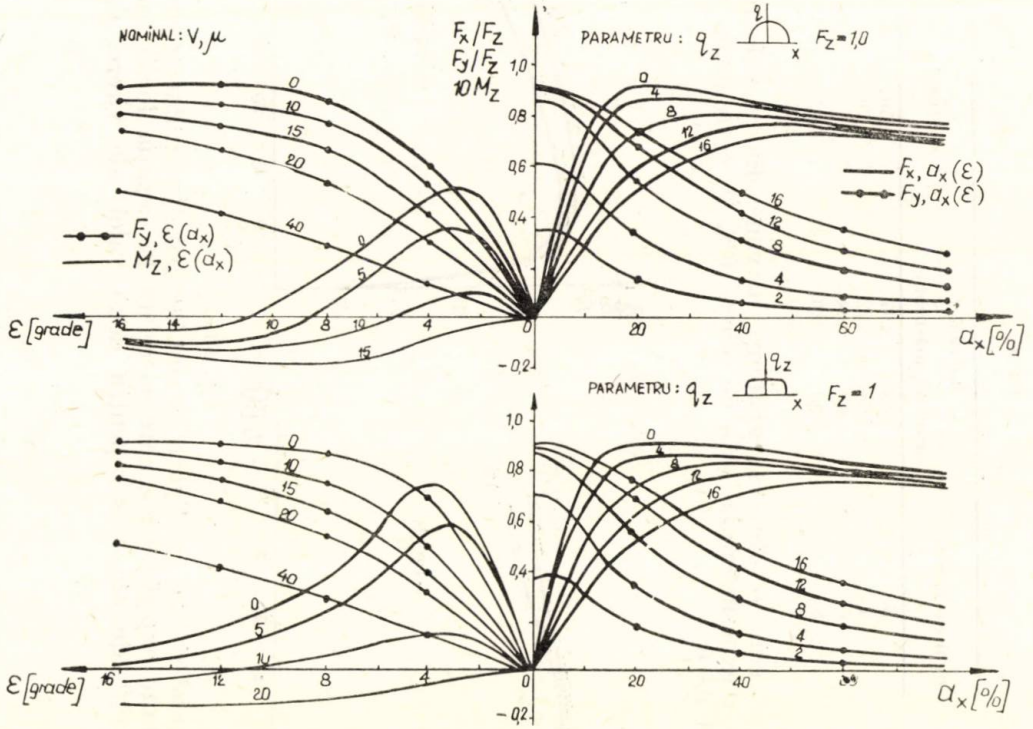


Fig. 13

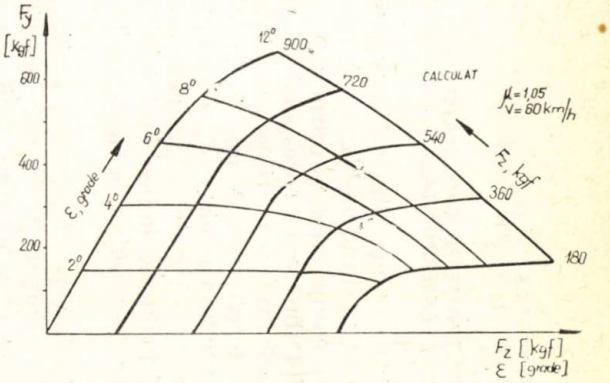


Fig. 14—a

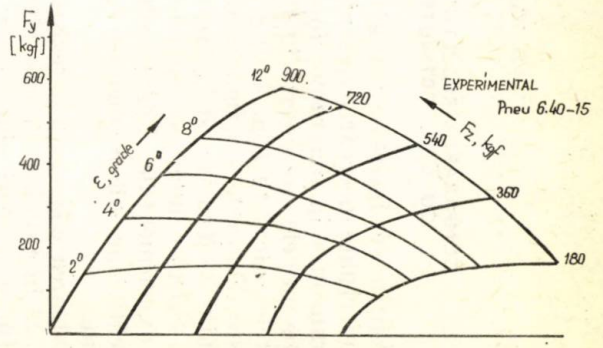


Fig. 14—b

5. COMPARAREA REZULTATELOR OBȚINUTE PE CALCULATOR CU CELE OBȚINUTE PE CALE EXPERIMENTALĂ

Pentru verificarea rezultatelor obținute cu ajutorul calculatorului au fost efectuate încercări experimentale pe un stand mobil, datele obținute fiind transpuse în diagrame, folosite la compararea propriu-zisă.

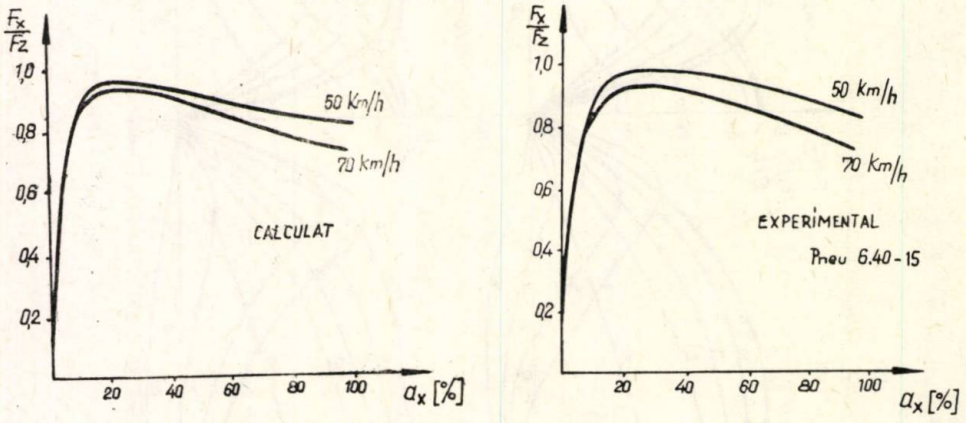
Diagramele prezentate în figura 14 ilustrează corespondența dintre rezultatele calculate (fig. 14*a*) și cele măsurate experimental (fig. 14*b*). Pe aceste diagrame s-a figurat variația forței transversale F_y în funcție de unghiul de derivă ε și încărcarea normală a pneului F_z. După cum se observă există o bună corespondență calitativă între diagramele teoretice și cele experimentale. Rezultatele experimentale indică însă o influență a încărcării normale a pneului F_z asupra rezistenței la devierea laterală a acestuia.

Valoarea constantă a rezistenței la devierea laterală a pneului este prezentată în tabela 1 în care sînt redate comparativ valorile calculate și cele obținute experimental, pentru încărcarea pneului 6.40—14 cu o sarcină $F_z = 360$ kgf.

Tabela 1

Unghi de derivă $\varepsilon°$	Forța laterală F_y		Abaterea %
	calculată	măsurată	
2	203	197	2,56
4	298	282	5,70
6	336	308	9,1
8	350	330	6,05
12	370	360	2,77

După cum se observă, abaterea maximă dintre valoarea calculată și cea experimentală este de circa 9% și corespunde unghiului de derivă de 6°.



a Fig. 15 b

În mod similar, în figura 15 sînt comparate rezultatele calculate și cele obținute experimental, care se referă la variația forței tangențiale F_x în funcție de alunecare, pentru două valori ale vitezei de rulare.

Corespondența calitativă și cantitativă este deosebit de bună, iar abaterile maxime dintre valorile experimentale și teoretice nu depășesc 6%.

Considerăm însă necesar a fi menționat faptul că, uneori, caracterul diagramelor teoretice diferă destul de mult de cele obținute experimental. Sînt mai multe cauze care generează aceste diferențe, printre care sînt de reținut și erorile de măsurare. După părerea noastră însă, cea mai probabilă cauză este corelația dintre valoarea coeficientului de aderență și viteză; curbele obținute prin calcule au fost stabilite luîndu-se în considerație o lege liniară de variație a coeficientului de aderență în funcție de viteză.

O altă cauză este ipoteza care a stat la baza studiului teoretic, că valorile rigidităților longitudinală și transversală ale elementului de pneu, cît și coeficientului de amortizare au valori constante, independente de mărimea deformației și, respectiv, de frecvența de oscilație.

CONCLUZII

Corespondența dintre rezultatele obținute experimental și cele teoretice, obținute cu ajutorul modelului de pneu analizat, conduce la concluzia că acest model matematic poate fi utilizat, cu bune rezultate, în rezolvarea unor probleme de dinamică a automobilelor, îmbunătățindu-se prin aceasta metodica și precizia de analiză a interacțiunii dintre pneu și cale.

De asemenea, rezolvarea modelului pe calculator face posibilă preluarea directă a acestuia și folosirea sa în simularea întregului automobil.

Primită la redacție la 11 august 1973

BIBLIOGRAFIE

1. A. Freeman, Charles, *Experimental Determination of the Effect of Traction on Cornering Force*, SAE Summer Meeting, Chicago, June, 1960.
2. M. Keldîș, *Simmi perednego kolesa trehkolesnogo șassi*, Trudî TAGI, *564* (1945).
3. J. H. Greidanus, *Besturing en stabiliteit van het neuswielonderstel*, Rapport 1038, National Luchtvaart — laboratorium, Amsterdam.
4. E. Fiala, *Lateral Forces on Rolling Pneumatic Tires*, Zeitschrift V. D. I. **96**, *29* (1954).
5. H. Pacejka, *Mechanics of Pneumatic Tires*, *Nat.*, Bur. of Standarts, Washington, D. C., 1971.
6. H. Sakai, *Theoretical Study of the Effect of Tractive and Braking Forces on Cornering Characteristics of Tires*, Paper *4*, of Safety Research Tour in U.S.A. (1969).
7. H. Dugoff, P. Fancher, L. Segel, *An Analysis of Tire Traction Properties*, FISITA/SAE Congress, 1970.
8. K. E. Holmes, R. D. Stone, *Tire Forces as Functions of Cornering and Braking Slip on Road Surfaces*, *Road* Research Laboratory, Report LR *254* (1969).

PULSAȚIA DEBITULUI LA POMPELE CU MAI MULTE ROȚI DINȚATE

de I. GHEGHEA
Institutul politehnic București

În lucrare se determină coeficientul de pulsație ale debitului la pompele cu mai multe roți dințate (rotoare).

Alături de pompele cu două roți dințate, în construcția de mașini se folosesc și pompe compuse din mai multe roți. Din această categorie fac parte pompele cu trei, patru sau cinci roți din care una este conducătoare, iar celelalte conduse și pompele etajate [1].

Coeficientul de pulsație al debitului reprezintă una din caracteristicile importante ale pompelor. Pulsația debitului atrage după sine atît o pulsație a vitezei, cît și a forței dezvoltate de motorul hidraulic asupra organului acționat. Cu cît debitul dat de pompă este mai uniform cu atît instalația sau mașina la care această pompă se folosește are o comportare dinamică mai bună.

În această lucrare se determină coeficientul de pulsație al debitului la pompele cu mai multe roți dințate (rotoare).

În general pompele cu mai multe rotoare se compun dintr-o roată dințată centrală (conducătoare) care angrenează cu un număr de roți dințate (conduse) așezate la unghiuri egale una față de alta pe periferia roții centrale. În figura 1 este reprezentată o pompă cu trei rotoare (două refulări).

La pulsația debitului acestor pompe se deosebesc două situații în funcție de numărul de dinți ai roții conducătoare și anume :

— numărul de dinți ai roții centrale este divizibil la numărul de roți conduse :

— numărul de dinți ai roții centrale nu este divizibil la numărul de roți conduse.

În prima situație datorită faptului că dinții roții conducătoare vor intra în același timp în golul dintre dinții roții conduse (exemplu punctul B și C fig. 1) debitele date de toate perechile de roți sînt în fază. Cînd conductele de legătură dintre camerele de refulare și punctul comun (punctul a fig. 1) au aceiași lungime, coeficientul de pulsație al debi-

tului în conducta R are aceiaşi valoare ca pentru pompele cu două rotoare avînd aceiaşi parametrii constructivi.

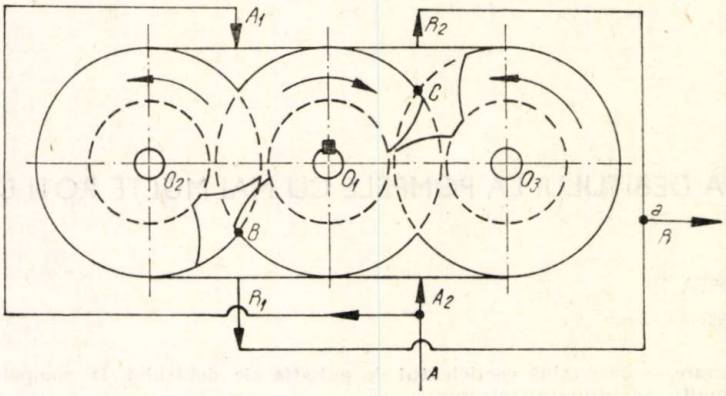


Fig. 1

În a doua situaţie, dinţii roţii centrale nu intră în acelaşi timp în golurile roţilor periferice şi prin urmare debitele instantanee de la

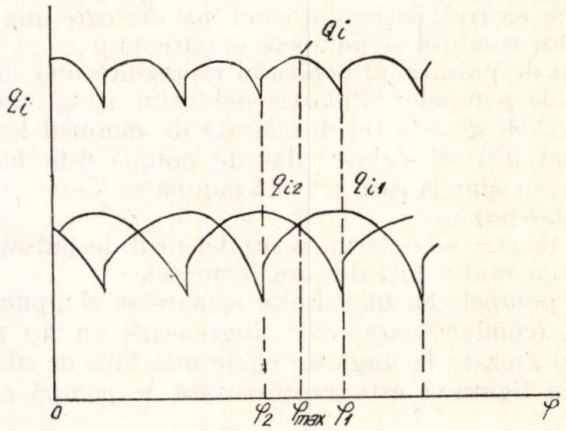


Fig. 2

diferitele camere de refulare sînt decalate unul faţă de altul cu unghiul

$$\varkappa = \frac{2\pi}{nz}, \tag{1}$$

în care n este numărul de roţi conduse (numărul de refulări).

Pentru $n = 2$, adică pompa din figura 1 reprezentarea debitelor instantanee precum şi suma lor este dată în figura 2.

Se observă din figura 2 atît o micşorare a amplitudinii oscilaţiilor debitului rezultat, cît şi o dublare a frecvenţei de pulsaţie. Pentru a aprecia scăderea amplitudinii oscilaţiilor se va calcula coeficientul de pulsaţie

al debitului pentru cazul general cînd există n refulări (n roți dințate conduse).

Debitul instantaneu eliberat din camera de refulare K, la o pompă cu n refulări, notat cu q_{ik} este dat (în cazul roților cu număr egal de dinți) de relația [2]

$$q_{ik} = C - d\left[\varphi - \frac{\pi}{2} - \gamma_e + (k-1)\varkappa\right]^2. \tag{2}$$

Înlocuind în (2) unghiul $\varkappa$ din relația (1) se obține

$$q_{ik} = C - d\left[\varphi - \frac{\pi}{2} - \gamma_e + \frac{2(k-1)\pi}{nz}\right]^2, \tag{3}$$

în care

$$C = \omega b\left\{R_e^2 - \frac{AR_b\cos\alpha}{2} - \frac{R_b^2}{2}\left[\left(\alpha+\gamma+\frac{\pi}{2}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\alpha - \frac{\pi}{2} - 2\gamma_e + \gamma\right)^2 - \pi - 2\gamma_e\right]\right\},$$

$d = \omega b R_b^2$,

$\gamma = \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{R_b}{R_e}\right) - \arccos\frac{R_b}{R_e}$,

$\gamma_e = \gamma - \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{R_b}{R_p}\right) + \arccos\frac{R_b}{R_p}$,

ω — viteza unghiulară a roților dințate,

b — lățimea roților dințate,

z — numărul de dinți ai roților,

α — unghiul de angrenare,

A — distanța dintre axele roților,

R_e, R_p, R_d — raza exterioară, raza cercului primitiv și respectiv raza cercului de bază.

Debitul instantaneu dat de cele n refulări este

$$Q_i = \sum_{k=1}^{k=n} q_{ik} = \sum_{k=1}^{k=n} C - d\sum_{k=1}^{k=n}\left[\varphi - \frac{\pi}{2} - \gamma_e + 2(k-1)\frac{\pi}{nz}\right]^2$$

sau

$$Q_i = nC - d\sum_{k=1}^{k=n}\left[\varphi - \frac{\pi}{2} - \gamma_e + 2(k-1)\frac{\pi}{nz}\right]^2. \tag{4}$$

Debitul Q_i este maxim pentru valoarea unghiului φ obținută prin anularea lui $\frac{dQ_i}{d\varphi}$ și anume

$$\frac{dQ_i}{d\varphi} = -2d \sum_{k=1}^{k=n} \left[\varphi - \frac{\pi}{2} - \gamma_e + 2(k-1)\frac{\pi}{nz} \right] = 0. \tag{5}$$

Din relația (5) se găsește

$$\varphi_{max} = \frac{\pi}{2} + \gamma_e - \frac{2\pi}{n^2 z} \sum_{k=1}^{k=n} (k-1) = \frac{\pi}{2} + \gamma_e - \frac{(n-1)\pi}{nz}. \tag{6}$$

Deoarece unghiul de defazaj $\varkappa$ este constant, iar debitele instantanee sînt simetrice față de valorile instantanee maxime, se vor obține n maxime de aceeași valoare $Q_{i_{max}}$, iar frecvența pulsațiilor va fi $f = n z$. Valoarea lui $Q_{i_{max}}$ este dată de relația (4), unde φ se înlocuiește cu φ_{max} dat de (6).

Debitul instantaneu minim $Q_{i_{min}}$ se poate calcula cu relația (4) înlocuind $\varphi = \varphi_1 - (n-1)\pi/nz$.

Relația ce dă φ_1 a fost determinată în [2] și este

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \gamma - \operatorname{tg}(\alpha - \theta) + \alpha,$$

în care

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{(R_e^2 - R_b^2)^{1/2} \cos \alpha - R_b \sin \alpha}{A - (R_e^2 - R_b^2)^{1/2} \sin \alpha - R_b \cos \alpha}.$$

Relația pentru calculul debitului instantaneu mediu se obține din (4) prin integrarea între $\varphi' = \varphi_1 - \frac{2(n-1)\pi}{nz}$ și $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{2\pi}{z}$

$$Q_{i_{med}} = nC - \frac{dnz}{6\pi} \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \left[\varphi_1 - \frac{\pi}{2} - \gamma_e + \frac{2(k-n)\pi}{nz} \right]^3 - \left[\varphi_2 - \frac{\pi}{2} - \gamma_e + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2(k-n-1)\pi}{nz} \right]^3 \right\}. \tag{8}$$

Avînd $Q_{i_{max}}$, $Q_{i_{min}}$, $Q_{i_{med}}$ coeficientul de pulsație al debitului pentru o pompă cu n refulări este

$$\delta_n = \frac{Q_{i_{max}} - Q_{i_{min}}}{Q_{i_{med}}} 100\ [\%]. \tag{9}$$

Utilizînd calculatorul electronic s-a determinat coeficientul de pulsație al debitului dat de relația (9) pentru diferite valori ale lui n, în cazul roților corijate avînd

$\xi = 0{,}5$ și $\alpha = 20°$.

În tabela 1 se dau valorile coeficientului δ_1 (pompa cu o refulare), ale lui δ_2 (pompe cu două refulări) precum și δ_2/δ_1 pentru un număr impar de dinți ai roților.

În tabela 2 se găsesc valorile lui δ_3 și respectiv δ_3/δ_1 pentru un număr de dinți ai roților nedivizibil la numărul de refulări care în acest caz este 3.

Tabela 1

δ_1 și δ_2/δ_1 \ nr. de dinți	9	11	13	15	17	19
δ_1 [%]	25,11	23,18	21,57	20,29	19,19	18,24
δ_2 [%]	9,468	9,048	8,772	8,500	8,232	8,004
δ_2/δ_1	0,377	0,390	0,406	0,419	0,429	0,438

Tabela 2

δ_3 și δ_3/δ_1 \ nr. de dinți	8	10	11	13	14	16	17	19
δ_3 [%]	6,611	5,578	5,484	5,457	5,419	5,373	5,311	5,245
δ_3/δ_1	0,227	0,232	0,236	0,253	0,259	0,272	0,276	0,287

Din cele două tabele se observă că pompele cu mai multe roți dințate al căror număr de dinți nu este multiplul numărului de refulări au un coeficient de pulsație sensibil mai mic decît al celor cu o singură pereche de roți dințate.

Coeficientul δ este mai redus la pompele cu un număr mai mare de dinți dar această scădere este mult mai mică decît la pompele cu o singură refulare. De exemplu, la o pompă cu două rotoare prin mărirea numărului de dinți de la 9 la 19 se obține o reducere a lui δ de 7%. Din tabela 1 se observă că în cazul pompelor cu același număr de dinți dar cu trei roți dințate coeficientul δ scade numai cu 1,37%.

Raportul dintre coeficientul de pulsație al pompei cu mai multe roți și al pompei cu două roți (δ_n/δ_1), după cum se vede din tabelele 1 și 2 crește cu mărirea numărului de dinți ai roților. La pompele cu patru roți avînd fiecare cîte opt dinți acest raport este 0,227, ceea ce reprezintă o micșorare a coeficientului de pulsație de peste patru ori față de pompa cu două roți.

Din cele expuse rezultă că prin construirea pompelor cu mai multe roți dințate avînd numărul de dinți nedivizibil la numărul de roți conduse se poate reduce substanțial coeficientul de pulsație al debitului. Cu cît

pompa are mai multe roți cu atît debitul este mai puțin pulsatoriu.

Construirea pompelor cu mai multe rotoare poate însă ridica unele probleme atît la prelucrarea carcasei, cît mai ales la etanșare care în acest caz este mai greu de realizat, datorită arcului de cerc mic pe care aceasta se realizează. De exemplu la pompele cu cinci rotoare o cameră de refulare este la mai puțin de 1/4 din lungimea cercului exterior al roții centrale.

Din acest motiv, pentru cazul cînd se cere o pulsație mică de debit, considerăm avantajoasă construirea de pompe etajate (fig. 3) ale căror refulări să fie legate între ele prin conducte de diametre și lungimi egale.

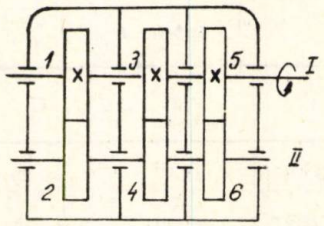


Fig. 3

Roțile conducătoare *1*, *3*, *5* este necesar să fie astfel fixate pe axul I încît între dinții acestora să existe un decalaj de $\frac{2\pi}{n \cdot z}$.

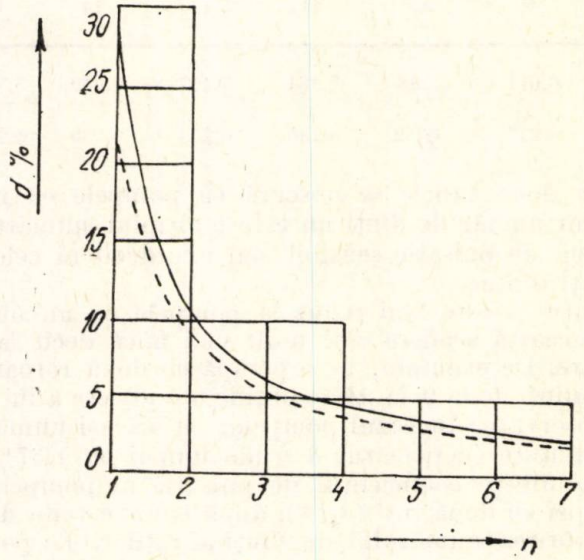


Fig. 4

Cu cît numărul de perechi de roți (n) este mai mare, cu atît coeficientul de pulsație al debitului scade mai mult.

În figura 4 se dă graficul de variație a lui δ în funcție de n pentru $\xi = 0{,}5$; $\alpha = 20°$. Curba cu linie plină este trasată pentru $z = 8$ dinți iar cea cu linie întreruptă pentru $z = 11$ dinți.

Din grafic se observă că pompa cu patru perechi de roți are o pulsație de debit sub 5%.

CONCLUZII

În lucrare se demonstrează teoretic posibilitatea reducerii pulsației de debit la pompele cu mai multe rotoare.

Se dau de asemenea tabele și grafice de variație a coeficientului de pulsație al debitului pentru $\xi = 0{,}5$; $\alpha = 20°$ și diferite numere de dinți ai roților dințate.

Primită la redacție la 25 iunie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. A. Oprean și alții, *Sistemele hidrostatice ale mașinilor unelte și preselor*, Edit. tehnică, 1965.
2. I. Gheghea, Al. Dorin, *Calculul analitic al debitului și pulsației acestuia la pompele cu roți dințate*, Construcția de mașini 2 (1973).

STUDII

STUDIUL INTERSTIȚIULUI SCULĂ-PIESĂ ÎN FUNCȚIE DE PARAMETRII HIDRODINAMICI AI ELECTROLIȚILOR SUB PRESIUNE ȘI STRATUL-LIMITĂ DE ELECTROLIT NECESAR PRELUCRĂRII ELECTROCHIMICE A MATERIALELOR METALICE

de M. MINCĂ
Institutul Politehnic București

În lucrare se studiază influența condițiilor de scurgere a electroliților în interstițiul sculă-piesă asupra parametrilor tehnologici de prelucrare electrochimică.

În ultimii ani, pe plan mondial prelucrarea electrochimică a cunoscut o dezvoltare rapidă în prelucrarea materialelor metalice greu sau imposibil de așchiat precum și a pieselor cu forme complicate, dificil de obținut prin procedeele convenționale. Această dezvoltare rapidă a fost posibilă datorită particularităților procedeului care sînt caracterizate astfel:

— obținerea unui volum mare de material prelevat la anod fără ca scula să fie supusă uzurii din punct de vedere al procesului de dizolvare electrochimic,

— la piesele prelucrate se pot obține dimensiuni cu precizii de ordinul a unor sutimi de milimetru și o suprafață cu o rugozitate foarte mică (chiar lustruite), funcție de regimul de prelucrare ales,

— prelucrarea se face dintr-o singură operație, dispărînd noțiunea de degroșare și finisare, calitatea suprafețelor crescînd odată cu creșterea densității de curent, adică cu capacitatea de erodare,

— suprafețele prelucrate nu sînt sub nici un aspect influențate, nici termic și nici chimic deoarece temperatura de prelucrare este sub 100°C (temperatura de fierbere a electrolitului), iar preluarea de hidrogen care se degajă la catod nu este posibilă deoarece este vorba de o dizolvare anodică,

— caracteristicile fizice și termice ale materialului nu au nici o influență, deoarece eroziunea se face exclusiv pe cale electrochimică unde forma sculei se copiază în semifabricat.

Primele trei particularități depind în mod direct de circulația electrolitului în interstițiul sculă-piesă și este una din cele mai importante probleme ale prelucrării de care mă voi ocupa în cele de mai jos.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 3, 1974, P. 611–627

Se cunoaşte că funcţia electrolitului care trece prin spaţiul dintre electrozi constă în înlesnirea şi continuarea procesului de prelucrare prin eliminarea rapidă şi permanentă a produselor anodei dizolvate pentru a nu se fixa pe catod, a gazelor formate şi a căldurii degajate precum şi în activitatea de depasivare hidrodinamică ce o exercită prin forţa de frecare cu suprafaţa ce se prelucrează a piesei.

Prin stratul de electrolit din interstiţiu circulă un curent continuu care antrenează electronii din suprafaţa piesei în circuitul exterior, care se scurg de la anod către catod, ceea ce are ca efect dizlocarea ionilor de metal de la suprafaţa piesei. Ionii respectivi trebuie să închidă circuitul electric interior conform figurii 1 combinîndu-se cu electrolitul, astfel materialul piesei de prelucrat este silit să se combine într-o sare metalică şi în electroni care intră în reacţie, determinînd degajarea de hidrogen la catod. Datorită faptului că viteza de scurgere a electrolitului şi densitatea curentului sînt ridicate , metalul este continuu îndepărtat şi nu se depune pe sculă, astfel continuîndu-se procesul de dizolvare.

Viteza de circulaţie a electrolitului este direct proporţională cu densitatea curentului, în sensul că la o densitate ridicată de curent, reducerea de material este mare dar şi încălzirea electrolitului este mare, deci trebuie un debit suficient de electrolit care să circule cu o viteză mare în scopul înlăturării materialului dizolvat, a gazelor şi a temperaturii din spaţiul dintre sculă şi piesă. Dacă viteza ionilor este mai mare atunci şi intensitatea curentului transmis este mare deoarece viteza ionilor depinde de mărimea lor, de curentul potenţial, de viscozitate şi de pre-

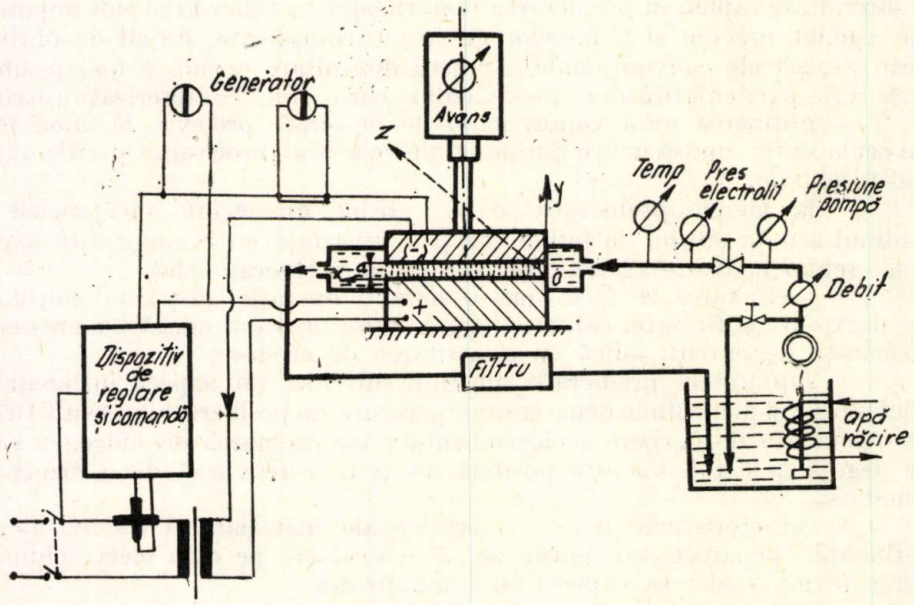


Fig. 1

siunea electrolitului, deci este necesară şi o viteză mare de circulaţie a electrolitului pentru înlăturarea ionilor formaţi în spaţiul de lucru. Dar viteza de circulaţie este limitată, deoarece la viteze mai mari de 50 m/s.

pe suprafețele prelucrate apar linii de eroziune sau neregularități provocate de circulația turbulentă neuniformă și de micile vîrtejuri ale electrolitului din zona de lucru. Viteza de circulație este direct proporțională cu presiunea electrolitului din interstițiu care poate ajunge după caz pînă la 12 daN/cm², însă în mod normal nu depășește 10 daN/cm² deoarece o creștere a presiunii cu (3—5) daN/cm² provoacă o creștere a reducerii cu 10%, iar o creștere de (5—8) daN/cm² cu numai 1,5%, dar totodată crește brusc solicitarea mecanică. Acest lucru se explică prin aceea că depasivarea hidrodinamică precum și înlăturarea produselor decompozabile este asigurată la presiunea de (3—5) daN/cm²., în zona de lucru, deci procesul de dizolvare este asigurat în mod continuu.

Dacă circulația este necorespunzătoare, în sensul că viteza este mai mică decît cea optimă corespunzătoare densității de curent cu care se lucrează, eliminarea materialului dizolvat din zona de lucru nu este asigurată total, ceea ce duce la modificarea gradului de impuritate și a temperaturii electrolitului care își schimbă conductibilitatea ceea ce implică schimbarea densității de curent de-a lungul suprafeței prelucrate. Dar prin schimbarea densității de curent rezultă o reducere neuniformă, deci, implicit, o precizie dimensională slabă cu foarte multe neregularități după cum rezultă și din diagrama din figura 2.

Din figura 2 rezultă că creșterea densității curentului fără schimbarea eficienței de scurgere duce la înrăutățirea calității suprafețelor. Acest fenomen se explică prin gradul diferit de concentrare a electrolitului cu produse dizolvate în zona de prelucrare. Un grad mai mare de impu-

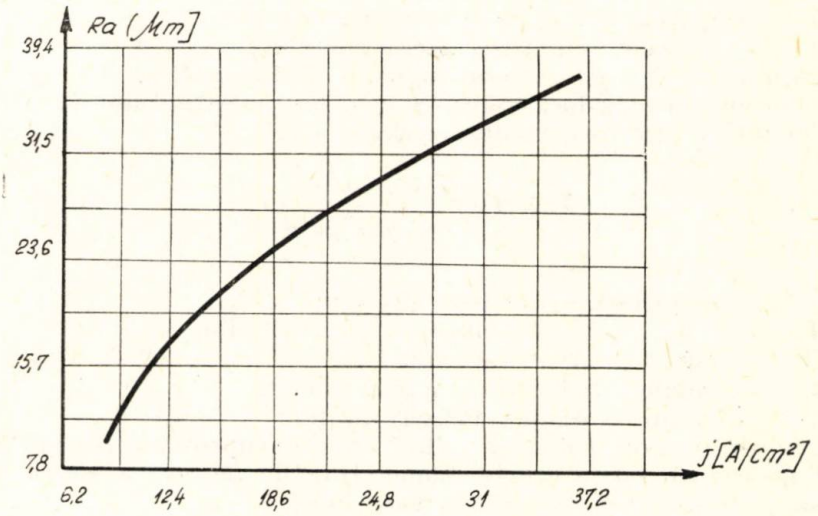


Fig. 2

ritate a electrolitului în zona de lucru adică o neînlăturare rapidă a materialului dizolvat poate duce la apariția scurtcircuitului care provoacă deteriorarea suprafeței piesei prelucrate și a electrodului sculă precum și o încălzire mare a electrolitului care favorizează eliminarea pe catodă a

hidrogenului sub formă de bule. Prezența bulelor de hidrogen înrăutățește conductibilitatea electrolitului deci micșorează capacitatea de erodare și implicit micșorează și eficacitatea de utilizare a curentului.

O cantitate mare de hidrogen degajat datorită unei circulații necorespunzătoare a electrolitului poate duce la apariția formării unui amestec exploziv în combinație cu aerul sau oxigenul.

Din cele prezentate mai sus rezultă că variația densității electrolitului prin mărirea gradului de impuritate în zona de lucru are o influență hotărîtoare în ceea ce privește precizia dimensională, gradul de dizolvare și calitatea suprafețelor prelucrate.

Considerînd trei axe de coordonate, x, y, z, conform figurii 1. și spațiul dintre sculă și piesă, a, putem stabili dependența schimbării densității electrolitului de-a lungul canalului care poate fi exprimată în felul următor (conf. literaturii de specialitate) :

$$\rho_e = \rho_{e0} + \frac{k \cdot \chi \cdot U \cdot x}{a^2 \cdot u}, \tag{1}$$

unde

ρ_e — densitatea electrolitului pe o lungime dată,
ρ_{e0} — densitatea inițială a electrolitului,
k — un coeficient care ține seama de parametrii prelucrării,
χ — conductibilitatea electrolitului la temperatura T_0,
U — tensiunea dintre electrozii sculă-piesă,
x — proiecția spațiului parcurs de soluția de electrolit în porțiunea străbătută de curent,
a — spațiul dintre sculă și piesă,
u — viteza de circulație a electrolitului.

Pornind de la ipoteza asemănătoare că la stabilirea lui ρ_e a fost dedusă formula pentru localizarea temperaturii electrolitului de-a lungul spațiului dintre electrozi, conform relației (2),

$$T = T_0 + \frac{0{,}24 \ w^2 \cdot x}{\rho_{e0} \ \chi \cdot V_{sp}^2 \ c \cdot u}, \tag{2}$$

unde

T — temperatura din zona de lucru,
T_0 — „ de intrare a electrolitului,
W — viteza de avans a sculei,
V_{sp} — volum specific de material erodat,
c — căldura specifică a electrolitului.

Temperatura optimă în zona de lucru este cuprinsă între (30—50)°C, în nici un caz nu poate atinge temperatura de fierbere a electrolitului deoarece procesul de dizolvare încetează total.

În figura 3 este dat exemplul influenței randamentului scurgerii electrolitului asupra caracteristicilor curentului :

Din figura 3 rezultă că odată cu creșterea debitului de electrolit ce se scurge prin spațiul dintre electrozi, deci odată cu creșterea vitezei de scurgere, dependența $J = f(u)$ se apropie de o linie dreaptă. Acest lucru poate fi explicat printr-o depasivare hidrodinamică bună a supra-

feței care se prelucrează și a suprafeței electrodului sculă în sensul că sînt eliminate rapid produsele dizolvate din zona de lucru, precum și gazele (hidrogenul) care se formează la catod în cantitate mult mai mică deoarece o circulație bună asigură o temperatură minimă în zona de lucru și deci și o cantitate minimă de hidrogen.

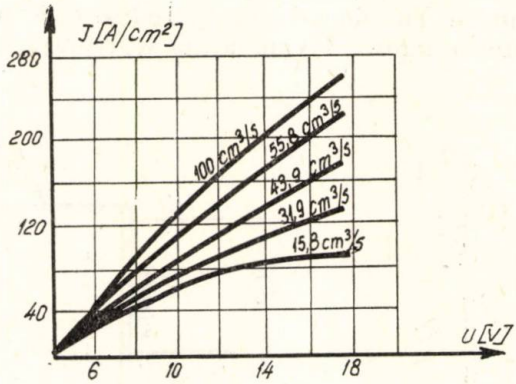


Fig. 3

Viteza curentului de electrolit poate fi determinată pe baza ecuației lui Bernoulli după cum rezultă din literatura de specialitate.

Astfel

$$u = \alpha_s \sqrt{\frac{2g}{\gamma} \Delta P}, \tag{3}$$

unde

α_s este coeficientul de pierderi pe conducte care se poate lua între (0,4—0,8),
g — accelerația gravitației,
γ — greutatea specifică,
ΔP — diferența de presiune între intrarea și ieșirea electrolitului.

Însă creșterea vitezei este direct proporțională cu creșterea presiunii, care este limitată, după cum s-a arătat în cele de mai sus, pentru a se evita formarea vîrtejurilor și turbioanelor ce înrăutățesc fenomenul de dizolvare electrochimic după cum se va vedea și în cele ce urmează, unde vom analiza pentru prima dată grosimea stratului-limită de electrolit deci, implicit, interstițiul sculă-piesă funcție numai de condițiile și de caracteristicile hidrodinamice ale electrolitului.

Prin stratul-limită de electrolit se înțelege stratul marginal în mișcare, care este sediul variației de viteză de la zero la suprafața piesei care se prelucrează, pînă la viteza uniformă a electrolitului și în care se manifestă acțiunea foarte intensă a forțelor de frecare.

Regimul de mișcare în stratul-limită poate fi laminar, turbulent sau de tranziție și el depinde de numărul lui Reynolds

$$\mathcal{R}e = \frac{u.l}{\nu}, \tag{4}$$

unde

u este viteza de circulaţie a electrolitului (cm/s..)

l — lungimea suprafeţei care se prelucrează (cm),

ν — viscozitatea cinematică (cm^2/s).

Pentru a scoate în evidenţă mai clar rolul stratului-limită în prelucrările electrochimice cu depasivare hidrodinamică privind circulaţia electrolitului conform figurii 4 vom arăta distribuţia vitezelor pornind

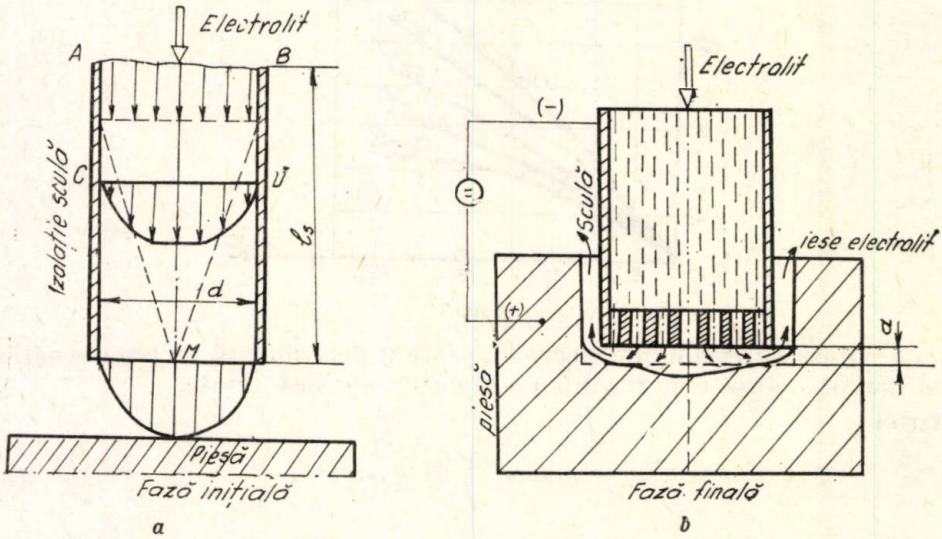


Fig. 4

de la capătul iniţial al conductei prin care circulă electrolitul şi vom analiza doar circulaţia laminară care este cea mai indicată în prelucrările electrochimice.

Din figura 4 *a* rezultă că la capătul de început al unei conducte prin care circulă electrolit există o zonă de tranziţie în care distribuţia vitezelor trece treptat de la o distribuţie uniformă $\hat{u} = \text{const.} = u_0$ pînă la distribuţia caracteristică regimului de mişcare, astfel într-o conductă cu diametrul d, în care se stabileşte mişcarea laminară după lungimea de stabilizare l_s, se găseşte la capătul de ieşire diagrama de viteze caracteristică de formă parabolică pe cînd într-o secţiune intermediară *C.D.* diagrama prezintă la centru un nucleu de viteze constante racordat la pereţi cu arce de parabolă. Aceasta se datoreşte faptului că forţele de frecare, la început existente numai lîngă pereţi, se transmit treptat pînă în axa canalului. Pentru că în mişcarea permanentă debitul este constant, vitezele din nucleu cresc pentru a se compensa pierderile de viteză dinspre pereţi. În acest fenomen stratul-limită ocupă spaţiile dintre pereţi şi cele două planuri care, plecînd din A şi B, se intersectează în M, aşadar, plecînd de la M mai departe, stratul-limită umple întreaga secţiune a canalului. După calculele teoretice ale lui Schlichting distribuţia

vitezelor mișcării laminare se realizează după o distanță l_s dată de relația

$$l_s = 0{,}03 \ d.\mathcal{R}e, \tag{5}$$

în care

d — diametrul conductei,

$\mathcal{R}e$ — numărul lui Reynolds, care poate avea în regim laminar o limită superioară $\mathcal{R}e_s = 5000$ și o limită inferioară $\mathcal{R}e_i = 2000$; în figura 5 *b* faza finală în care s-a asigurat un interstițiu sculă-piesă, optim prelucrării, ținîndu-se cont și de stratul-limită de electrolit pentru o suprafață plană, se constată că la fundul găurii apare o suprafață cu denivelări, iar mariginile găurii sînt rotunjite.

Aceste denivelări și rotunjiri ale muchiilor se datoresc scurgerii electrolitului. După cum am arătat, în figura 4*a* particulele de electrolit se deplasează perpendicular pe suprafața piesei de prelucrat avînd viteza maximă în centrul conductei, repartiția fiind parabolică. În momentul cînd particulele de fluid cu viteza cea mai mare lovesc suprafața piesei ele sînt resprinse de către aceasta după o anumită traiectorie conform

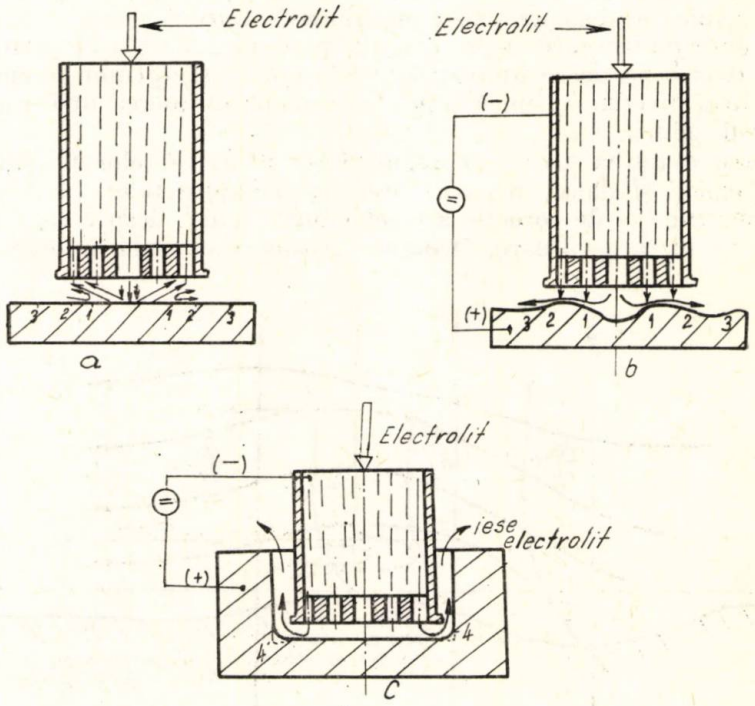


Fig. 5

figurii 5*a*, iar celelalte particule cu viteza mai mică dinspre pereții conductei sînt antrenate de particulele cu viteza cea mai mare astfel rămînînd o zonă (1) unde circulația este minimă, deci și o reducere minimă, ceea ce conduce în final la obținerea unei suprafețe ondulate în fundul găurii (fig. 5*b*), fenomen întîlnit și la marginile găurilor care sînt racordate, conform figurii 5*c*. Deci în punctele *1—2* circular se formează o suprafață

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR

de discontinuitate a electrolitului, constituită din mici vîrtejuri care nu asigură o viteză uniformă și o eliminare perfectă a produselor dizolvate din spațiul de lucru. Făcînd o reprezentare grafică a vitezelor în zona de lucru în cazul adîncirii unei găuri conform figurii 6 și considerînd x direcția după tangentă, y după normala la contur, u și U componentele vitezelor după x în stratul-limită, respectiv la marginea lui și U variind cu profilul. Un punct ca (*1*) conform figurii 5*b* se numește punct de discontinuitate, care din punct de vedere matematic se caracterizează prin $u = 0$ și $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ pentru $y = 0$.

În acel punct al vitezelor, diagrama acestora prezintă un punct de inflexiune, iar din punctul (*1*) pînă în punctul (*2*) începe o zonă în care $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} < 0$ (fig. 6), vitezele au sensul contrar mișcării generale. Zona în care $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ se numește zonă inactivă, unde, există o mișcare a particulelor de electrolit datorită unor mici vîrtejuri ce se formează, dar viteza este mică și deci nu există o circulație optimă, care să asigure o reducere corespunzătoare. Din zona (*2*) pînă în zona (*3*) circulația este normală, deci o reducere uniformă, iar în zona (*4*) din nou avem zonă inactivă, deci o reducere mică fapt care duce la obținerea unei racordări pe conturul găurii.

Pentru evitarea acestor neregularități a suprafețelor prelucrate la fundul găurilor și chiar în cazul prelucrării suprafețelor plane se iau măsuri constructive de corecție a electrodului sculă, despre care mă voi ocupa într-o lucrare viitoare. Deoarece grosimea stratului-limită de elec-

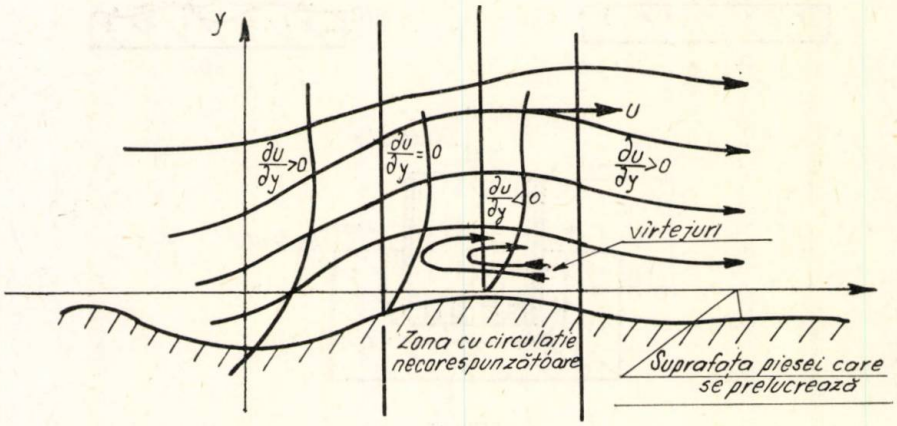


Fig. 6

trolit, respectiv interstițiul sculă-piesă, are cea mai mare importanță în asigurarea unei circulații optime și deci pentru asigurarea unei reduceri maxime de material prelevat și obținerea unor piese cu dimensiuni și suprafețe corespunzătoare, în cele ce urmează voi analiza stratul-limită și grosimea acestuia lîngă o suprafață plană.

Dacă se consideră în stratul-limită regimul de mișcare laminar și se neglijează forțele masice, atunci ecuațiile Navier-Stokes după două direcții și ecuația de continuitate ia următoarele forme :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), && \text{I}\\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), && \text{II}\\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, && \text{III} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

unde

u — componenta vitezei în direcția x.

Analizînd ordinea de mărime a diferitelor variabile din aceste ecuații în care y este mult mai mic decît a, grosimea stratului-limită de electrolit din interstițiul sculă-piesă în raport cu x și u, x fiind lungimea de suprafață care se prelucrează și u viteza de circulație a electrolitului în cîmpul potențial exterior stratului-limită, deci neglijabilă, se pot simplifica aceste ecuații într-o mare măsură, așa că ele pot fi integrate în cazuri mai simple. Astfel, în ecuația I (6) se poate neglija termenul $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ în raport cu $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, iar ecuația II (6) presiunea variază atît de puțin cu y încît se poate considera constantă în raport cu y, fiind numai funcție de x ca și viteza u în cîmpul potențial exterior stratului-limită, în care U este funcție de x și t. Considerînd însă că studiem mișcarea permanentă și deci dispar și termenii $\frac{\partial u}{\partial t}$ și $\frac{\partial v}{\partial t}$, rămîn numai ecuațiile I (6) și III (6), sub următoarea formă :

$$\left.\begin{aligned} &u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, && \text{I}\\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. && \text{III} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Condițiile la limită sînt :

Pentru $y = 0$; $u = 0$, $v = 0$, iar pentru $y = \infty$; $u = U(x)$.

Pe de altă parte, ecuația I (7) în cazul $y = a$; dintre stratul-limită și curentul potențial, unde $u = U$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \equiv 0$ și $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong 0$, deci $U\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ sau

$$p + \frac{\rho}{2}\cdot u^2 = \text{const.} \quad \text{(legea lui Bernoulli).} \qquad (8)$$

Rezultatul obținut în ecuația (8) cu privire la menținerea unei presiuni constante pe o normală la suprafața piesei care se prelucrează este foarte important deoarece aceasta înseamnă că nu se mai pune problema aflării presiunii în stratul-limită care este egală cu presiunea din cîmpul potențial la distanța x și putîndu-se afla din ecuația (8). Experiențele efectuate au confirmat pe deplin acest rezultat în cazul mecanicii fluidelor, măsurătorile arătînd că presiunea este invariabilă pentru $x = \text{const.}$

În cazul repartiției vitezelor de-a lungul normalei la frontiera inferioară a stratului-limită din zona de lucru pentru o suprafață plană se poate lua în cazul mișcării laminare sub forma unui polinom de gr. III, care trebuie să îndeplinească condițiile la limită. Plecînd de la un astfel de polinom cu u termeni, se găsește legea următoare :

$$U = \frac{u}{2a}\left(3y - \frac{y^3}{a^2}\right), \tag{9}$$

care satisface condițiile la limită.

Într-adevăr, cînd $y = 0$; $u = 0$ căci electrolitul aderă la prefața corpului solid ; cum însă și componenta $v = 0$ la frontiera interioară, înseamnă că prima ecuație I (7) se reduce la

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Deoarece $p = \text{const.}$, înseamnă că pentru $y = 0$ trebuie să fie $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, deci $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, condiție satisfăcută de ecuația (9).

Pentru $y = a$(a — distanța dintre sculă și piesă), trebuie ca diagrama vitezelor să se racordeze la $u = U(x)$ și deci $u = U$ și $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, condiție satisfăcută de ecuația (9).

Ecuațiile diferențiale în cazul unei suprafețe curbe au fost stabilite într-un sistem de coordonate curbilinii (x după tangenta la curbă de rază R_x și y după normală) de către Tollmien. Prin considerații în legătură cu stratul-limită de electrolit dintre sculă și piesă analog cu cele făcute la suprafața plană, ecuația II (7) stabilește că presiunea este constantă de-a lungul normalei la curbă și rămîn numai două ecuații diferențiale care practic nu pot fi rezolvate fără anumite simplificări urmîndu-se două căi deosebite :

— pentru porțiuni limitate Δx se consideră valabile ecuațiile pentru placa plană ;

— se fac anumite simplificări, stabilindu-se unele relații globale (teorema impulsului), presupunînd că repartiția vitezelor în stratul limită a din interstițiu se poate reprezenta printr-o familie de curbe cu un singur parametru de forma

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{a}, y\right). \tag{10}$$

În ceea ce privește stabilirea stratului-limită de electrolit a pentru asigurarea unei circulații corespunzătoare din punct de vedere hidro-

dinamic în spațiul dintre sculă și piesă ; după concepțiile actuale, grosimea stratului-limită se definește ca fiind egală cu distanța a măsurată pe normală de la suprafața corpului solid, unde viteza diferă cu 1 % de viteza generală a fluidului. O astfel de definiție este necesară deoarece influența viscozității se simte și dincolo de această distanță însă din ce în ce mai puțin fără a se putea stabili teoretic sau practic distanța la care eforturile τ sînt chiar nule.

Structura formulei care dă grosimea a în funcție de parametrii de care depinde se poate afla prin considerații de asemănare mecanică. Se demonstrează la teoria similitudinii că forța de inerție specifică $\rho.u.\frac{\partial u}{\partial x}$ și forța de frecare specifică (în regim laminar) $\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ trebuie să aibă un raport adimensional.

În cazul stratului -limită al unei suprafețe plane aceste două forțe domină în ecuațiile Navier-Stoks (7). Forța de inerție se poate exprima adimensional prin : $\rho.u_0.\frac{u_0}{l}=\rho.\frac{u_0^2}{l}$, iar forța de frecare prin $\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mu\frac{u_0}{a^2}$, admițînd că pe întreaga sa grosime stratul-limită este în regim laminar, rezultă

$$\left|\rho\frac{u_0^2}{l}\right| : \left|\mu\frac{u_0}{a^2}\right| = \text{const.} \tag{11}$$

sau

$$a \cong c\sqrt{\frac{\mu.l}{\rho.u_0}} = c.\sqrt{\frac{\nu.l}{u_0}}, \tag{12}$$

în care c este un coeficient adimensional. Valoarea lui c s-a dedus din calcul confirmat experimental pentru placa plană găsindu-se $c = 5$, deci

$$a_{\text{lam}} = 5\sqrt{\frac{\nu.l}{u_0}} = \frac{5\,l}{\sqrt{\mathcal{R}e_{\text{lam}}}}. \tag{13}$$

Rezultă făcînd $l = x$, legea de variație a grosimii stratului laminar :

$$\frac{a}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}}. \tag{14}$$

Se poate exprima $\mathcal{R}e_x = f(\mathcal{R}e_a)$,

$$\mathcal{R}e_a = \frac{u.a}{\nu} = \frac{u.x}{\nu}\cdot\frac{a}{x} = \mathcal{R}e_x\cdot\frac{5}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}} = 5.\sqrt{\mathcal{R}e_x}\,. \tag{15}$$

Din formulă (15) rezultă că la un $\mathcal{R}e_{xcr} = 3{,}2.10^5$ corespunde $\mathcal{R}e_{acr} = 2800$.

Cu ajutorul relației (15) am demonstrat că există un $\mathcal{R}e_{xcr}$ depinzînd de forma conturului corpului, astfel, pentru o placă plană ca limită inferioară pentru regimul laminar, s-a stabilit relația $\mathcal{R}e_{xcr\,\text{inf.}} = 3{,}2.10^5$, care corespunde cu $\mathcal{R}e_{acr} = 2800$, iar ca limită superioară la placa plană $\mathcal{R}e_{xcr} = 10^6$, ceea ce corespunde pentru strat-limită $\mathcal{R}e_{acr} = 8750$, pentru care mișcarea devine categoric turbulentă. În zona turbulenței depline, grosimea stratului $a_{\text{turb.}}$, a stratului-limită se calculează cu

formule empirice. „Pentru o placă" paralelă cu jetul, $a_{turb.}$ variază cu distanțe x

$$\frac{a}{x} = \frac{0{,}37}{(\mathcal{R}e_x)^{1/5}} = 0{,}37\left(\frac{\nu}{u.x}\right)^{1/5}. \qquad (16)$$

În mișcarea turbulentă, conform figurii 7, se menține un substrat laminar a^* (film laminar) pe suprafața piesei care se prelucrează și este neglijabil.

În practică, la suprafețe cu lungimi mari, lungimea întregii zone laminare este mult mai mică decît zona turbulentă.

În cele ce urmează vom calcula grosimea stratului-limită de electrolit pentru diferite viteze de circulație și diferite mărimi de piese, conform tabelei 1, rezultat din relația (12).

Tabela

Grosimea stratului-limită de electrolit a din interstițiul sculă-piesă în funcție de diametrul (lungimea) supra-

Natura electrolitului	viscozit. cinematică ν m²/s	Supraf. care se prelucrează d[m] / Viteza de circulație a electrolitului m/s ↓	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3
			$\mathcal{R}e = \frac{U.l}{\nu}$						
Soluție NaCl 10%	1.10^{-6}	5	5.10^3	$2{,}5.10^4$	5.10^4	$2{,}5.10^5$	5.10^5	10^6	$1{,}5.10^6$
		10	10^4	5.10^4	10^5	5.10^6	10^6	2.10^6	3.10^6
		15	$1{,}5.10^4$	$7{,}5.10^4$	$1{,}5.10^5$	$7{,}5.10^5$	$1{,}5.10^6$	3.10^6	$4{,}5.10^6$
		20	2.10^4	10^5	2.10^5	10^6	2.10^6	4.10^6	6.10^6
		25	$2{,}5.10^4$	$1{,}25.10^5$	$2{,}5.10^5$	$1{,}25.10^6$	$2{,}6.10^6$	5.10^6	$7{,}5.10^6$
		30	3.10^4	$1{,}5.10^5$	3.10^5	$1{,}5.10^6$	3.10^6	6.10^6	9.10^6
		35	$3{,}5.10^4$	$1{,}75.10^5$	$3{,}5.10^5$	$1{,}75.10^6$	$3{,}5.10^6$	7.10^6	10^7
		40	4.10^4	2.10^5	4.10^5	2.10^6	4.10^6	8.10^6	$1{,}2.10^7$
		45	$4{,}5.10^4$	$2{,}25.10^5$	$4{,}5.10^5$	$2{,}25.10^6$	$4{,}5.10^6$	9.10^6	$1{,}35.10^7$
		50	5.10^4	$2{,}5.10^5$	5.10^5	$2{,}5.10^6$	5.10^6	10^7	$1{,}5.10^7$
		60	6.10^4	3.10^5	6.10^5	3.10^6	6.10^6	$1{,}2.10^7$	$1{,}8.10^7$

Pe baza tabelei 1 în diagrama din figura 8 se vede variația interstițiului sculă-piesă funcție de diametrul care se prelucrează la viteze de circulație constante ale electrolitului.

Din rezultatele obținute în tabela 1 și din diagramele figurii 8 se constată că pe măsură ce viteza de circulație a electrolitului crește, scade grosimea stratului-limită din interstițiul sculă-piesă, deci, implicit, acesta poate fi micșorat și prin aceasta se îmbunătățește precizia de reproducere a suprafețelor prelucrate. Totodată se constată că odată cu mărimea suprafeței prelucrate crește și grosimea stratului-limită de

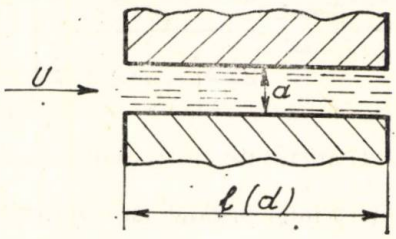
electrolit acest lucru este necesar în scopul asigurării unei circulații normale pe întreaga suprafață, putîndu-se înlătura și produsele dizolvate din spațiul de lucru. Alegerea vitezelor de circulație este o problemă importantă și întotdeauna viteza trebuie să crească proporțional cu creșterea densității de curent, respectiv cu creșterea mărimii suprafeței care se prelucrează.

Rezultatele obținute în tabela 1 pentru calculul interstițiului sculă-piesă numai din punct de vedere al stratului-limită de electrolit concordă destul de bine cu rezultatele practice folosite la prelucrarea electrochimică. Astfel, aceste rezultate obținute pentru interstițiu se încadrează în valori cuprinse între (0,03—1) mm, funcție de vitezele de circulație și mărimea suprafeței de prelucrare, mărimi care sînt recomandate și în publicațiile de specialitate, dar pentru prima dată este analizat în această lucrare

1

feței care se prelucrează și viteza de circulație a electrolitului la prelucrarea electrochimică a mat. metalice

0,4	0,5	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	Observații
		$a\frac{5l}{\sqrt{Re}}$									
2.10^6	$2,5.10^6$	0,070	0,158	0,223	0,600	0,708	1,000	1,230	1,410	1,580	
4.10^6	5.10^6	0,050	0,114	0,158	0,350	0,500	0,707	0,865	1,000	1,140	
6.10^6	$7,5.10^6$	0,041	0,098	0,128	0,290	0,410	0,578	0,701	0,820	0,920	
8.10^6	10^7	0,035	0,075	0,114	0,250	0,353	0,500	0,614	0,707	0,790	
10^7	$1,25.10^7$	0,032	0,071	0,100	0,223	0,316	0,447	0,505	0,635	0,710	
$1,2.10^7$	$1,5.10^7$	0,029	0,064	0,091	0,204	0,288	0,408	0,500	0,577	0,647	
$1,5.10^7$	$1,7.10^7$	0,026	0,060	0,085	0,189	0,264	0,379	0,462	0,520	0,600	
$1,6.10^7$	2.10^7	0,025	0,056	0,079	0,177	0,250	0,353	0,422	0,500	0,560	
$1,8.10^7$	$2,25.10^7$	0,024	0,053	0,072	0,167	0,236	0,334	0,410	0,463	0,530	
2.10^7	$2,5.10^7$	0,022	0,050	0,070	0,153	0,224	0,316	0,388	0,447	0,500	
$2,4.10^7$	3.10^7	0,020	0,045	0,064	0,144	0,204	0,288	0,354	0,410	0,457	



interstițiul sculă-piesă funcție de caracteristicile hidrodinamice a scurgerii electroliților.

În ceea ce privește depasivarea hidrodinamică a suprafețelor care se prelucrează prin împiedecarea formării stratului de oxid de la anod

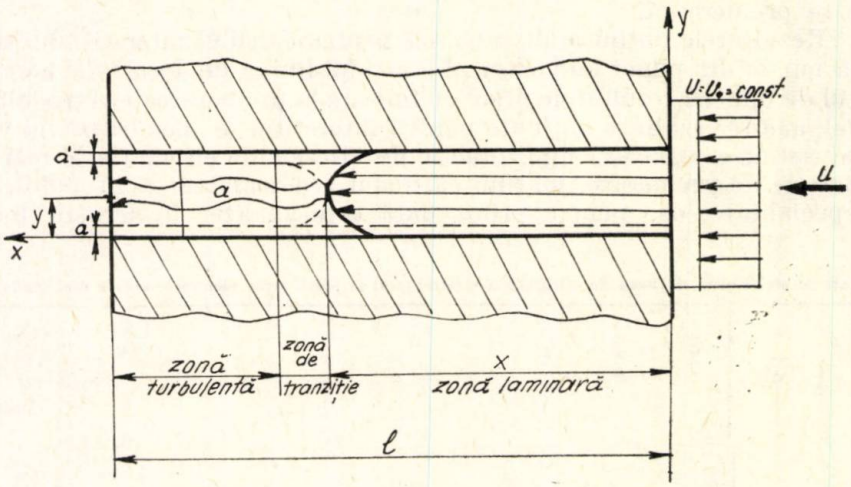


Fig. 7

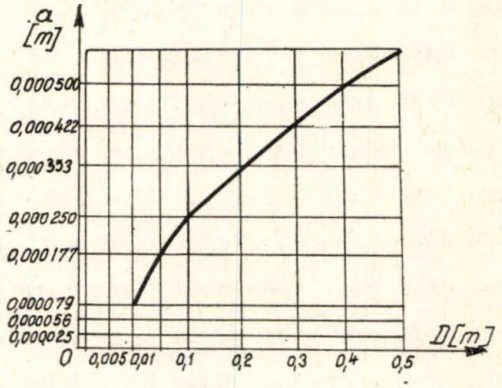


Fig. 8

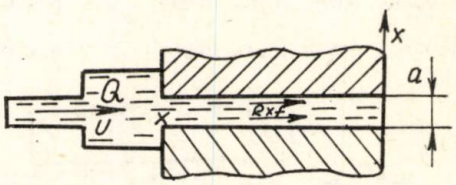


Fig. 9

vom analiza două cazuri distincte de trimitere a electrolitului sub presiune în zona de lucru.

Cazul â: electrolit trimis paralel cu suprafața prelucrată conform figurii 9.

Cazul b : electrolit trimis perpendicular pe suprafaţa care se prelucrează sau sub un unghi α, conform figurii 10 *a*, *b*, *c*.

În cazul a : forţele de frecare se propagă în stratul-limită, plecînd de la suprafaţa de contact cu piesa, iar forţele de presiune sînt tot nişte forţe de frecare care acţionează asupra suprafeţei ce se prelucrează după direcţia x. Rezultanta R_{xf} a acestor două forţe proiectate pe direcţia x a mişcării, numită şi rezistenţă frontală, este cunoscută exact numai pe baza experienţelor efectuate cu corpuri de diferite forme la diferite numere Reynolds ($\mathcal{R}e$).

Forţa de frecare se poate determina prin calcul asimilînd suprafaţa care se prelucrează cu o placă într-un curent paralel.

Experienţele făcute au condus la exprimarea forţei de frecare printr-o formulă de tipul general indicată de Newton :

$$F_f = C_f . l . b . \frac{\rho}{2} . u^2 , \tag{17}$$

în care l şi b sînt dimensionale suprafeţei prelucrare,

C_f — coeficient care depinde de viscozitate, sau mai exact de numărul lui Reynolds.

C_f — se calculează cu formula aproximativă a lui H. Schlichting :

$$C_f = \frac{0{,}455}{\lg \left(\frac{u . l}{\nu} \right)^{2{,}58}} . \tag{18}$$

În cazul b acţiunea de depasivare hidrodinamică are loc datorită atît forţelor de frecare de la cazul a, cît şi acţiunii dinamice a jetului de electrolit asupra suprafeţei ce se prelucrează (fig. 10).

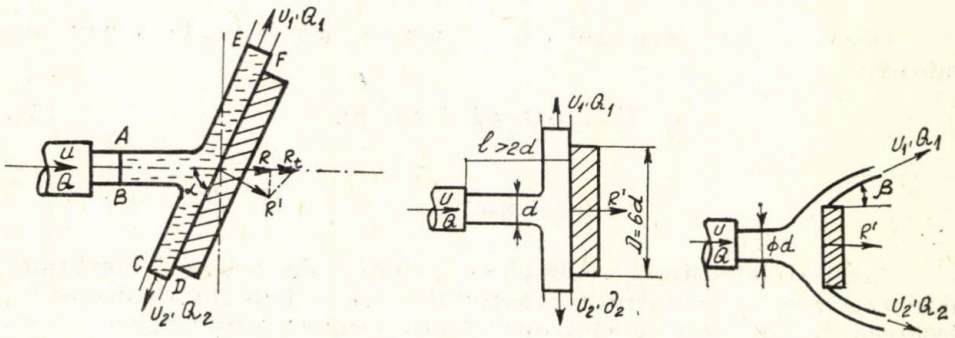


Fig. 10

Ecuaţia lui Bernoulli arată că viteza jetului u este egală cu vitezele în cele două ramuri, adică $u = u_1 = u_2$. În realitate vitezele u_1 şi u_2 conform experienţelor sînt cu (4—6) % mai mici ca u şi asta din cauza frecărilor. Notînd cu Q debitul jetului şi cu G greutatea fluidului, aplicarea

teoremei impulsurilor, în proiecția pe normală la plan pentru cazul $\alpha \neq 90°$ (fig. 10 *a*), ne dă

$$-Q \cdot u \cdot \sin \alpha \cdot \rho = G \cdot \cos \alpha + R, \tag{19}$$

unde R este reacțiunea suprafeței asupra jetului. Dacă notăm cu R^* apăsarea dinamică exercitată de fluid asupra plăcii, avem $R = R^*$.

Și din ecuația 19 rezultă

$$R' = \rho \cdot Q \cdot u \cdot \sin \alpha + G \cdot \cos \alpha. \tag{20}$$

În general, termenul datorat greutății fluidului este neglijabil, așa că putem scrie

$$R' = \rho \cdot Q \cdot u \sin \alpha \tag{21}$$

pentru cazul $\alpha = 90°$, adică a unei plăci plane perpendiculare pe direcția vitezei (fig. 10 *b*), acțiunea dinamică a jetului are valoarea

$$R = Q \cdot u \cdot \rho. \tag{22}$$

Dacă suprafața plană nu este suficient de mare jetul de electrolit deversează peste placă făcînd cu direcția jetului unghiul β. Dacă β este mai mic de 90° (fig. 10 *c*), în acest caz forța de impuls devine

$$F = \rho \cdot Q \cdot u - \rho \cdot Q_1 \cdot u_1 \cdot \cos \beta - \rho \cdot Q_2 u_2 \cdot \cos \beta \tag{23}$$

Însă $u_1 = u_2$, ceea ce înseamnă că $Q_1 = Q_2$ iar din ecuația de continuitate rezultă

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2}. \tag{24}$$

Revenind la ecuația precedentă rezultă

$$F = \rho \cdot Q \cdot u (1 - \cos \beta) \tag{25}$$

Dacă $\beta > 90°$, cosinusul devine negativ, iar forța de impuls are valoarea

$$F = \rho \cdot Q \cdot u(1 + \cos \beta). \tag{26}$$

CONCLUZII

Analiza interstițiului sculă-piesă din punct de vedere al condițiilor hidromecanice de scurgere a electroliților are o importanță deosebită, deoarece de circulație depind aproape majoritatea parametrilor tehnologici de prelucrare electrochimică astfel:

— variația densității electrolitului în zona de lucru implică variația densității de curent și deci o reducere neuniformă pe suprafața prelucrată, totodată și o temperatură neuniformă a electrolitului, ceea ce duce la formarea bulelor de hidrogen pe catod, înrăutățind conductibilitatea electrică deci și un randament de exploatare a curentului electric scăzut;

— prin circulaţia necorespunzătoare a electrolitului pentru evacuarea totală şi rapidă a materialului dizolvat şi a gazelor din interstiţiu, duce la formarea scurtcircuitelor, deci la degradarea suprafeţelor electrozilor sculă şi piesă şi la posibilitatea apariţiei pericolului de explozie din cauza volumului mare de hidrogen produs la catod.

Primită la redacţie la 12 septembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. Jan Peronczyk, *Parametrii prelucrării electrochimice*, Preglad Mechanikzyky *22* (1967).
2. *Prelucrarea electrochimică*; Machine *1* (1968).
3. Krabacher, F. I., *Prelucrarea prin electroeroziune şi electrochimie*, Canadian Machenry and Metalworking *2* (1969).
4. Geisel H, *Profilare interioară prin prelucrarea electrochimică*, Werkstattund Betrieb, R. F. Germania, 1969.
5. C. Mateescu, *Hidraulica*, Ed. didactică şi pedagogică, 1963.
6. G. Bogăteanu *Mecanica fluidelor*, F. D. P., Cluj, (1969).

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

AL III-LEA CONGRES INTERNAŢIONAL DE MECANICA RUPERII

Congresele internaţionale de mecanica ruperii se organizează periodic la intervale de patru ani sub auspiciile organizaţiei Internaţionale a Congreselor de Mecanica Ruperii (International Congress on Fracture) al cărei preşedinte fondator este profesorul Takeo Yokobori de la Universitatea Sendai din Japonia. Cel de-al treilea congres, urmînd după cele care au avut loc la Sendai în anul 1965, respectiv Brighton (Anglia) în anul 1969, a fost organizat la München în intervalul 8—13 aprilie 1973. Problemele organizatorice generale ale celui de-al treilea congres au fost preluate de către Asociaţia siderurgiştilor din RFG—VDEh. avînd sediul la Düsseldorf, printr-un comitet de organizare de sub coordonarea prof. dr A. Kochendörfer.

Lucrările congresului s-au desfăşurat în nouă şedinţe plenare şi nouă comisii de lucru, în cadrul cărora un număr de peste 700 specialişti din 25 ţări au dezbătut probleme de avangardă ale cercetării din domeniul mecanicii ruperii materialelor, în speţă a rezistenţei materialelor reale, înglobate în organe de maşini şi structuri portante.

Înalta ţinută ştiinţifică a congresului, a celor 296 comunicări prezentate, din care un număr de 19 referate de sinteză, a fost asigurată atît prin prezenţa unor remarcabili oameni de ştiinţă, personalităţi ale domeniului respectiv de cercetare, cît şi prin selecţia riguroasă a comunicărilor, efectuată dintr-un număr de peste 350 lucrări transmise comitetului de organizare.

Din partea ţării noastre au participat la congres dr. ing. V. Safta şi dr. ing. D. Cioclov, şef de secţie, respectiv şef de sector la C.S.I.O.—Timişoara. Lucrările celor doi delegaţi, referindu-se la „Evoluţia deformaţiilor plastice în condiţiile stării spaţiale de solicitare", respectiv „Un model termic activat al dependinţei COD de temperatură", au fost prezentate în cadrul comisiei I, abordînd probleme ale teoriei ruperii materialelor.

În cadrul comisiei I au fost prezentate şi dezbătute un număr de 39 lucrări din domeniul teoriei ruperii. Principalele contribuţii ştiinţifice în acest domeniu s-au referit la aplicarea teoriei structurilor atomice, a teoriei dislocaţiilor şi a modelelor termic activate sau a interpretărilor statistice a proceselor de formare şi dezvoltare a fisurilor în medii elastice şi elastoplastice. Au fost propuse mecanisme şi criterii de iniţiere şi propagare a fisurilor în cîmpuri de tensiuni constante sau variabile, în medii omogene şi eterogene.

Au fost prezentate rezultate experimentale obţinute prin analiza cîmpurilor de tensiune şi deformaţii în prezenţa concentratorilor, la vîrful fisurilor naturale în medii neutre şi active. Unele cercetări au relevat influenţa defectelor de reţea, a mărimii granulaţiei, temperaturii, proceselor corozive, asupra amorsării şi propagării ruperii în medii deformabile.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 3, 1974, P. 629—632

Majoritatea lucrărilor prezentate în această comisie au căutat să fundamenteze din punct de vedere fizic conceptul de factor critic al intensității tensiunii (K_{Ic}), sau de deschidere critică la vîrful fisurii (COD), în vederea extinderii domeniilor de aplicație tehnică a acestor concepte.

În cadrul comisiei a II-a s-au dezbătut aspectele metodologice ale încercărilor în mecanica ruperii materialelor. În cele 39 de referate susținute au fost prezentate noi metode de determinare a caracteristicilor de rezistență la inițierea fisurării, K_{Ic}, COD sau J_{Ic} (valoarea critică a integralei pe conturul care circumscrie vîrful fisurii). În mai multe lucrări a fost abordată problema influenței vitezei de solicitare asupra caracteristicii K_{Ic}, prin încercări cu șoc și înregistrări automate a evoluției diagramei forță-deplasare. S-a evidențiat posibilitatea experimentală de determinare a valorilor critice ale deplasării la vîrful fisurii (COD) în condiții dinamice cu ajutorul probelor cu dublă crestătură. S-au comunicat și rezultate privind influența conjugată a temperaturii și predeformării asupra caracteristicilor K_{Ic}, precum și influența grosimii probelor atunci cînd nu se realizează în încercări condiția stării de deformare plană — caracteristica K_c. Materialele investigate în cadrul acestor cercetări au fost în special oțelurile aliate, aliajele de aluminiu și de titan. S-a relevat că variația caracteristicii K_c nu este nicidecum proporțională cu grosimea probelor. Alte lucrări au prezentat noi metode de încercare pentru evidențierea capacității de inhibare a fisurilor în oțeluri. S-a urmărit de asemenea corelarea sistematică a caracteristicilor convenționale de rezistență (rezistența la rupere, rezilință etc.) cu caracteristicile noi asociate inițierii și propagării fisurilor (K_{Ic}, COD etc.).

Lucrările prezentate în *cadrul comisiei a III-a* au fost axate pe aspectele microstructurale ale ruperii metalelor. S-au relevat în cele 35 referate, aspectele microscopice ale nucleației ruperii în metale, sub acțiunea solicitărilor statice și dinamice, evidențiindu-se influența mărimii grăunților inițiali de austenită la oțelurile cu structură martensitică, influența impurităților și precipitărilor, în oțelurile aliate. Cîteva lucrări au abordat cu pregnanță legătura dintre caracteristicile de inițiere a fisurării și ductilitatea materialelor. S-au dat interpretări teoretice nucleației ruperii, bazate pe dinamica dislocațiilor sau pe modele ale mediilor continue cu goluri distribuite.

S-au comunicat de asemenea rezultate privind influența temperaturii asupra ruperii la solicitări singulare și repetate a aliajelor de aluminiu și a oțelurilor austenitice. În cadrul acestei secții s-au prezentat de asemenea rezultate interesante obținute prin analize fractografice la nivel microscopic.

Lucrările prezentate în *cadrul comisiei a IV-a*, axată pe cercetarea influenței coroziunii și a factorilor de mediu în general asupra procesului de rupere au relevat aspectele de bază ale fisurării în condițiile coroziunii sub tensiune a unor materiale termorezistente, aliajelor de titaniu, uraniului etc. evidențiindu-se totodată influența solicitărilor variabile în condițiile acționării mediilor chimic active.

S-au adus contribuții la teoria fisurării în procesul de coroziune sub tensiune electrochimică și s-a evidențiat efectul perturbațiilor micromecanice ale straturilor superficiale din aliaje de Ti în condițiile coroziunii sub tensiune.

Contribuții valoroase au fost aduse prin stabilirea vitezei de propagare a fisurii în zonele de concentrare a tensiunilor la aliaje de Ti explorate în medii active, precum și privitor la relevarea efectului tensiunilor reziduale de compresiune la o gamă de tehnici de pregătire a probelor K_{Ic}.

În *cadrul comisiei a V-a* s-au dezbătut în 61 de referate aspectele fundamentale ale ruperii materialelor prin solicitări repetate (oboseală). Cele două referate generale au tratat aspectele microstructurale ale fenomenului de oboseală cu relevarea rolului dinamicii dislocațiilor și a ecruisării ciclice, respectiv aspectele macroscopice implicate în predicția durabilității elementelor metalice din construcțiile tehnice contemporane.

Numeroase lucrări au tratat problema oboselii elastico-plastice sau oligociclice a metalelor și aliajelor metalice, relevînd ca determinantă pentru rezistența materialelor caracteristica tensiune-deformație stabilizată. Alte lucrări au prezentat rezultate experimentale și interpretări teoretice privind propagarea fisurilor prin solicitări repetate, relevîndu-se că propagarea se desfășoară pentru valori care depășesc o valoare minimă, critică, a variației factorului de intensitate al tensiunii ΔK, în zona adiacentă fisurii. Alte interpretări au corelat viteza de propagare a fisurilor de deplasarea la vîrful fisurii (COD). Propagarea fisurilor a fost studiată în conjuncție cu influența : temperaturii, mediilor corozive, tensiunilor reziduale, tensiunii medii și frecvenței ciclurilor sau solicitări repetate cu neregularități importante. S-au prezentat rezultate privind viteza de propagare a fisurilor în diverse materiale.

Degradarea prin solicitări repetate a fost studiată în unele referate la nivel microstructural, evidențiindu-se fazele evoluției de la primele mișcări și multiplicări de dislocații pînă la formarea și propagarea fisurilor.

Degradarea cumulativă la nivel macroscopic a constituit subiectul unor dezbateri, concretizate prin noi propuneri de sistematizare a calculelor de durabilitate la solicitări nestaționare. Au mai fost prezentate referate privind interpretarea statistică a rezultatelor încercărilor de oboseală, și metodologia de încercare la solicitări variabile.

În *cadrul comisiei a VI-a*, care s-a ocupat de cercetarea proceselor de rupere în materiale plastice au fost prezentate un număr de 25 comunicări care s-au referit la cercetarea morfologiei ruperii și a deformării la fibre, polietilene, polimetilacrilați, materiale termoplastice etc., punînd în evidență rolul microfisurilor în desfășurarea procesului de rupere în polimeri cristalini și amorfi.

S-au adus contribuții însemnate prin cercetări spectroscopice asupra mecanismului de nucleație a fisurilor. S-a studiat influența orientării texturii, influența mediilor lichide asupra desfășurării mecanismului ruperilor capilare în materiale termoplastice, precum și influența încălzirilor locale produse în timpul procesului de propagare a ruperii în polimeri.

Comisia a VII-a de lucru, în cadrul căreia s-au prezentat un număr de 26 lucrări, a abordat problemele actuale în domeniul procesului de rupere a materialelor cu inserții. Dintre principalele probleme tratate se menționează cercetarea procesului de rupere a structurilor eterogene de inserții fibroase în matrice ductile sau fragile, precum și studiile privind influența interacțiunii fibraj-matrice în desfășurarea ruperii la materiale cu fibraj de aluminiu și nichel.

În alte lucrări s-au propus criterii de distrugere prin învingerea forțelor de coeziune, respectiv de adeziune în structuri compuse cu fibraj continuu.

Un număr mare de lucrări s-au referit la problema evidențierii capacității de înhibare a ruperii în structuri laminate și la determinarea tenacității la rupere a diferitelor inserții și materiale utilizate în tehnica nucleară și aerospațială.

În *cadrul comisiei a VIII-a* de aplicații tehnice, au fost prezentate și discutate un număr de 26 lucrări, dezvoltîndu-se aspecte esențiale ale aplicării mecanicii ruperii în conceperea, proiectarea și controlul vaselor și conductelor sub presiune, reactoarelor nucleare, turbo-generatoarelor, rotoarelor de turbină etc.

Mai multe lucrări s-au referit la cercetarea susceptibilității la fragilizare a materialelor utilizate în construcții mari sub influența defectelor interne și a condițiilor de exploatare, cercetarea caracteristicilor determinante de exprimare a tendinței de fragilizare și destrămare lamelară la îmbinările sudate, precum și aplicarea conceptelor mecanicii ruperii în controlul îmbinărilor sudate.

Un alt grup de lucrări s-a axat asupra determinării tenacității la rupere a diferitelor materiale în special oțeluri de înaltă rezistență și oțeluri placate.

În *comisia a IX-a*, printre cele 26 de lucrări prezentate, s-au dezbătut aspecte privind procesul de rupere în sticlă, materiale ceramice, roci și betoane. Astfel, pentru sticle și polimeri s-a evidențiat corelația între viteza de propagare a fisurilor și rezistența la rupere a acestor materiale în condițiile solicitărilor singulare și repetate. Pentru materialele ceramice s-au studiat pe de o parte sub aspect experimental metodologiile de determinare a tenacității la rupere K_{Ic}, iar sub aspect teoretic, modelul care descrie propagarea fisurilor într-un mediu cu obstacole rezultate din faze fin dispersate. S-a estimat creșterea obtenabilă a tenacității la rupere K_{Ic}, pe măsura descreșterii distanței dintre particulele disperse.

Rezistența la rupere a betonului a fost studiată cu o varietate mare de mijloace experimentale și teoretice. S-au prezentat date experimentale și interpretări teoretice privind rezistența betonului în diferite condiții de solicitare, (poliaxialitate, viteze diferite de solicitare) sau în cazul precomprimării. În acest din urmă caz s-au relevat posibilitățile mecanicii ruperii în aplicațiile din tehnica reactoarelor nucleare. Lucrările referitoare la rezistența la rupere a rocilor, au relevat elementele specifice ale propagării ruperii prin compresiune a rocilor cristaline sau au furnizat informații pentru aplicații practice dintre care s-a exemplificat cazul construcției de tuneluri. O contribuție interesantă a constituit relevarea influențelor viscoelastice, în disiparea energiei și inițierea degradării în betoane și cimenturi.

*

Textul integral al lucrărilor prezentate a fost multiplicat înaintea deschiderii congresului într-un număr de 10 volume însumînd aproximativ 1800 pagini, de către editura VDEh—Düsseldorf, sub titlul „Dritte internationale Tagung über den Bruch", München 8—13 April 1973.

V. Safta
D. Cioclov

RECENZII

A.S. VOLMIR, „Nelineinaia dinamika plastin i obolocek" (Dinamica neliniară a plăcilor şi învelitorilor) Moscova, Edit. „Nauka" 1972, 432 pag.

Monografia „Nelineinaia dinamika plastin i obolocek" conţine o serie de probleme moderne ale dinamicei plăcilor şi învelitorilor elastice, abordate în formulare neliniară.

Aceste probleme sînt dezvoltate în cuprinsul celor 10 capitole ce alcătuiesc cartea.

Astfel, în cadrul primului capitol sînt deduse relaţiile generale ale teoriei geometrineliniare ale învelitorilor subţiri atît în formularea clasică (bazată pe ipoteza Love—Kirschhoff), cît şi în formularea neclasică, în cadrul căreia se ia în considerare efectul deformaţiilor de forfecare transversală şi a inerţiei rotatorii.

Capitolul al II-lea conţine o serie de rezultate privind vibraţiile naturale ale plăcilor şi învelitorilor.

Al treilea capitol este consacrat cîtorva probleme privind vibraţiile forţate ale plăcilor şi învelitorilor.

În capitolul al IV-lea al monografiei este abordată problema vibraţiilor neliniare ale structurilor subţiri sub acţiunea sarcinilor pulsatori.

Capitolul al V-lea conţine o serie de rezultate privind stabilitatea aeroelastică a plăcilor şi învelitorilor, ţinînd seama de neliniarităţile geometrice precum şi de prezenţa stratului limită.

Capitolele VI—IX abordează problema stabilităţii structurilor subţiri plane şi curbe sub acţiunea sarcinilor dinamice (cap. VII), sub acţiunea şocului (cap. VII), a sarcinilor mobile (cap. IX).

În capitolul al X-lea autorul întreprinde o analiză a comportării a structurilor subţiri la sarcini aleatori folosind în acest scop aparatul matematic al teoriei proceselor Markov.

În încheiere, autorul prezintă o serie de probleme încă nerezolvate, din cercul problemelor abordate în cuprinsul monografiei, probleme ce ar putea constitui subiectul unor cercetări viitoare. Monografia conţine la sfîrşit o imensă bibliografie a literaturii mondiale abordînd problemele studiate de autor.

Putem afirma că prin actualitatea, prin modul de abordare al prezentelor probleme şi prin remarcabile contribuţii aduse, monografia prof. A.S. Volmir se înscrie ca o valoroasă contribuţie adusă literaturii tehnice mondiale de specialitate.

Liviu Librescu

GR. IOACHIM, C. GH. POPA

DEZLOCUIREA ȚIȚEIULUI DIN MEDII PERMEABILE DE CĂTRE APA TRATATĂ CU POLIMERI

Lucrarea prezintă un model matematic pentru descrierea procesului de dezlocuire liniară a țițeiului din medii permeabile de către o soluție cu viscozitate mărită pe bază de polimeri.
Modelul ia în considerare faptul că apa cu viscozitate mărită pe bază de polimeri, dezlocuiește pe lîngă țiței și apa interstițială parțial sau în totalitate. Se formează astfel, în fața frontului de dezlocuire, un banc de apă interstițială a cărei evoluție poate fi urmărită de-a lungul întregului proces de dezlocuire.
Modelul mai ia în considerare existența unor saturații variabile în spatele frontului de dezlocuire ca și variația concentrației de polimeri în soluția injectată datorită adsorbției, permițînd astfel o evaluare a mărimii optime a dopului injectat, astfel încît să se asigure o dezlocuire eficientă.
Modelul poate fi ușor generalizat pentru dezlocuirea în lungul unui tub de curent de secțiune variabilă, fapt care permite aplicarea teoriei tuburilor de curent constante și deci permite luarea în considerare a influenței amplasării sondelor asupra avansării frontului de dezlocuire.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 481—489
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

D. MILCOVEANU

CONTRIBUȚII LA STUDIUL VISCOZITĂȚII FLUIDELOR

Pe baza modelelor adoptate în prezent în știință și anume molecular-cinetic pentru studiul fluidelor compresibile (gaze) și al golurilor pentru studiul fluidelor incompresibile (lichide) și a procedeelor de calcul ale statisticii-matematice, respectiv distribuția lui Gibbs, au fost deduse expresiile statistice, în funcție de suma de stare Z a fluidelor, ale coeficienților de viscozitate dinamică pentru gaze și pentru lichide. La explicitarea acestor expresii s-a regăsit legea cunoscută, const. $T^{1/2}$ de variație a viscozității dinamice cu temperatura pentru gaze și legea const. $T^{1/2}.\exp.(U_a/KT)$, deosebită de expresiile adoptate în prezent, în cercetare și tehnică pentru, variația viscozității dinamice cu temperatura pentru lichide. Dacă temperatura devine atît de înaltă încît termenul exponențial din ultima expresie devine de ordinul unității, atunci rămîne valabilă, pentru viscozitatea lichidului foarte cald, legea const. $T^{1/2}$, adică o comportare, din punct de vedere al viscozității, identică cu a gazelor. Acest rezultat este în concordanță cu concepția actuală privind starea lichidă și starea gazoasă.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 503—515
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

F. MUNTEANU

CALCULUL CURGERII AMESTECURILOR GAZOASE COMBUSTIBILE PRIN FRONTUL DE FLACĂRĂ CU CONSIDERAREA VARIAȚIEI CĂLDURILOR SPECIFICE

Lucrarea se ocupă de calculul parametrilor gazodinamici ai amestecurilor gazoase combustibile la trecerea printr-un front de flacără, ținînd seama de variațiile cu temperatura ale compoziției și căldurilor specifice ale gazelor arse, printr-o metodă exactă și alta aproximativă.
Pentru exemplificare se indică rezultatele calculelor făcute pentru amestecuri hidrogen-aer.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 491—502
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

V. DIACONIȚA

ASUPRA STĂRII DE DEFORMARE PLASTICĂ PLANĂ PENTRU CORPURI ORTOTROPE

În această lucrare se studiază starea de deformare plană plastică utilizînd o condiție de plasticitate de forma celei postulate în [1]. Se arată că sistemul pentru determinarea tensiunilor este de tip hiperbolic. Se pun în evidență cîteva proprietăți ale caracteristicilor sistemului în tensiuni, care coincid cu caracteristicile sistemului pentru determinarea vitezelor. Ca și în cazul corpurilor izotrope se arată că sistemul pentru determinarea tensiunilor poate fi liniarizat.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 517—531
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

GH. MIHĂIȚĂ

STABILITATEA DINAMICĂ SPAȚIALĂ A BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI DE SECȚIUNI DESCHISE SOLICITATE PRIN FORȚE AXIALE PERIODICE URMĂRITOARE

În lucrare se stabilesc ecuațiile vibrațiilor parametrice forțate de încovoiere-răsucire ale barelor cu pereți subțiri de secțiuni deschise, acționate de forțe exterioare axiale periodice urmăritoare, sub forma unui sistem cu o triplă infinitate de ecuații diferențiale de ordinul al doilea, omogene, liniare și cu coeficienți periodici.
Bazat pe teoria stabilității soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți periodici, se pun în evidență în total o triplă infinitate de domenii de instabilitate dinamică, pulsația critică a sarcinei la limitele acestor domenii reprezentînd soluțiile unor ecuații algebrice a căror coeficienți includ parametrii sistemului elastic și ai excitațiilor.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 533—561
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. PĂSTRAV

ANALOGIA ELECTRO-OPTICĂ CA METODĂ AUXILIARĂ ÎN FOTOELASTICIMETRIE

În lucrare se prezintă metoda de determinare a sumei tensiunilor principale prin metoda analogiei electro-optice.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 563—568
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE ALE FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE CU DOUĂ LINII OPUSE DE CILINDRI ȘI DOI ARBORI COTIȚI CARE SE ROTESC ÎN SENSURI CONTRARE

Pentru motoarele cu două linii opuse de cilindri și doi arbori cotiți care se rotesc în sensuri contrare, se analizează posibilitățile de echilibrare a momentului extern corespunzător oricărui termen al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare se translație.
Se mai stabilesc momentele externe care se echilibrează simultan, condiția necesară celui mai bun echilibraj al momentelor externe și posibilitățile de echilibrare a acestora oferite de repartiția uniformă a aprinderilor pe ansamblul motorului.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 569—583
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CH. VASILIU, E. NEGRUȘ

INTERACȚIUNEA DINTRE PNEU ȘI CALE LA SOLICITĂRI LATERALE ALE ROȚII

Complexitatea interacțiunii dintre pneu și cale la solicitări laterale, precum și influența acesteia asupra automobilului în mișcare au făcut necesară elaborarea unor modele matematice cu ajutorul cărora să se determine elementele dinamice, care apar în pata de contact dintre pneu și cale și prin aceasta să se controleze fenomenul. Compararea rezultatelor obținute pe calculator cu cele experimentale a condus la concluzia că modelul matematic propus în lucrare, poate fi utilizat cu succes în rezolvarea unor probleme importante din dinamica automobilului.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 585—601
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. GHEGHEA

PULSAȚIA DEBITULUI LA POMPELE CU MAI MULTE ROȚI DINȚATE

În lucrare se determină coeficientul de pulsație al debitului la pompele cu mai multe roți dințate (rotoare).

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 603—609
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M. MINCĂ

STUDIUL INTERSTIȚIULUI SCULĂ-PIESĂ ÎN FUNCȚIE DE PARAMETRII HIDRODINAMICI AI ELECTROLIȚILOR SUB PRESIUNE ȘI STRATUL-LIMITĂ DE ELECTROLIT NECESAR PRELUCRĂRII ELECTROCHIMICE A MATERIALELOR METALICE

În lucrare se studiază influența condițiilor de scurgere a electroliților în interstițiul sculă-piesă asupra parametrilor tehnologici de prelucrare electrochimică.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 3, 1974, p. 611—627
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

VLAD IONESCU, **Sisteme liniare**, 1973, 228 p., 10 lei.

V. I. NITU, **Fiabilitatea instalațiilor energetice**, 1973, 362 p., 28 lei.

BAZIL POPA, VIRGINIA ISCRULESCU, **Procese de ardere în cîmp sonor**, 1973, 256 p., 17 lei.

N. DĂNILĂ, **Centrale nucleare-electrice**, 1973, 775 p., 52 lei.

G. MOISIL, **Controlul electric al coroziunii rețelelor subterane**, 1973, 240 p., 9,75 lei.

NICOLAU EDMOND, **Radiația electromagnetică**, 1973, 231 p., 10,50 lei.

M. MIȘICU, **Încovoiere și torsiune**, 1973, 380 p., 22 lei.

ADRIANA NĂSTASE, **Utilizarea calculatoarelor în optimizarea formelor aerodinamice**, 1973, 282 p., 21,50 lei.

I. S. GHEORGHIU, AL. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. III. Mașini asincrone, 1971, 534 p., 33 lei.

EDMOND NICOLAU, **Sinteza sistemelor radiante**, 1971, 376 p., 22 lei.

C. I. PENESCU, **Sisteme de protecție de distanță**, 1971, 624 p., 41 lei.

ENE MARIN, **Metoda mărimilor determinante**, 1971, 228 p., 13 lei.

GEORGE ȘT. ANDONIE, **Istoria matematicilor aplicate clasice din România, mecanică și astronomie**, 1971, 638 p., 48 lei.

B. POPA, V. CASIAN, **Teoria și calculul injectoarelor mecanice cu cameră de turbionare**, 1971, 311 p., 21 lei.

DAN PAVELESCU, **Concepții noi, calcul și aplicații în frecarea și uzarea solidelor deformabile**, 1971, 330 p., 26 lei.

N. REUS, **Tratarea simbolică a schemelor de comutație**, 1971, 270 p., 11 lei.

I. S. GHEORGHIU, ALEXANDRU S. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. IV, mașini sincrone, 1972, 482 p., 30 lei.

P. P. TEODORESCU, **Dinamica corpurilor liniar elastice**, 1972, 392 p., 24,50 lei.

M. MIȘICU, **Teoria mobilității elastice**, 1972, 428 p., 23,50 lei.

EDMOND NICOLAU, **Cîmpuri și unde electromagnetice**, 1972, 350 p., 21,50 lei.

C. A. VASILESCU, S. FAUR, V. PIMSNER, GH. RĂDULESCU, **Corelațiile dintre combustibilul lichid și motorul cu ardere internă**, 1972, 336 p., 23,50 lei.

CRISTIAN PELECUDI, **Teoria mecanismelor spațiale**, 1972, 512 p., 30 lei.

I. A. ADĂMUȚ, **Analiza propagării undelor electromagnetice pe linii în regim tranzitoriu**, 1972, 374 p., 25 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES

— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 3, P. 479—634, BUCUREȘTI, 1974

I. P. Informația — c. 1149

43832

Lei 40.—

F2557

4

TOMUL 33

1974

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*,
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct*,
Acad. I. ANTON,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ŞTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. CR. MATEESCU,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. RADU VOINEA,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie*.

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuţa poştală 2001, Bucureşti, România, sau la reprezentanţii săi din străinătate.

REVISTA APARE DE 4 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă, se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

TOMUL 33, nr. 4 1974

SUMAR

STUDII

Pag.

M. GHEORGHIU, I. ANTON, Studiul analitic al influenţei unor parametri geometrici asupra caracteristicilor energetice ale reţelei circulare de profile Clark Y 8 . . 637

I. SETEANU, Studiul regimului nepermanent de curgere în sistemele de irigaţii 659

V. PANAITESCU, Metodă de construire a profilului general al vitezei medii a curgerii turbulente în apropierea unui perete rigid 679

M. SOARE, Contribuţii la calculul plăcilor ortotrope cu nervuri de rigidizare pe o singură parte 695

G. ONU, Calculul radierelor rigide pe coloane 711

D. RAŞEEV, V. ULMANU, Contribuţii la determinarea rezistenţei la oboseală a racordurilor speciale 753

HO DINH TUNG, Studiul stabilităţii sistemelor hidraulice de copiat prin folosirea coeficienţilor de amplificare al vitezei C_v şi al forţei C_f 771

STUDIUL ANALITIC AL INFLUENȚEI UNOR PARAMETRI GEOMETRICI ASUPRA CARACTERISTICILOR ENERGETICE ALE REȚELEI CIRCULARE DE PROFILE CLARK Y 8

de M. GHEORGHIU și I. ANTON

Centrul de cercetări pentru mașini hidraulice Timișoara

Mișcarea în prezența rețelei circulare reproduce fenomenul din statorul și aparatul director al turbinelor axiale și radial-axiale și din rotorul pompelor centrifuge și al turbinelor Francis lente.

Studiul mișcării în prezența rețelei circulare presupune rezolvarea unei așa-numite „probleme directe a rețelelor de profile" prin care la parametri geometrici cunoscuți se determină distribuția de viteze, respectiv presiuni pe conturul profilului, deviația curentului datorită prezenței rețelei și forțele de acțiune a curentului asupra profilului în funcție de mărimea și direcția vitezei curentului de la intrare.

1. PREZENTAREA METODEI ANALITICE

În cazul rețelei circulare fixe, mișcarea se poate considera plană, permanentă și irotațională, menținîndu-se ipoteza fluidului ideal.

Pentru rezolvarea analitică a problemei se face apel la metoda ecuațiilor integrale singulare, aplicată rețelelor rectilinii de profile și tratată în lucrările [1], [2]. Se procedează de aceea la transformarea conformă a domeniului mișcării din planul rețelei circulare în planul unei rețele rectilinii echivalente în care se rezolvă problema, rezultatele transpunîndu-se în baza transformării efectuate în rețeaua circulară.

Se consideră o rețea circulară de aparat director de turbină, formată din N profile, cu raza de așezare a bordului de atac R_1 și a bordului de fugă R_2, fiecare profil fiind cuprins în unghiul la centru τ_0 (fig. 1). Circulația la infinit înaintea rețelei este Γ_∞, iar debitul raportat la înălțimea profilului $Q_\infty = Q/\Delta b$.

Funcția care transformă domeniul rețelei circulare într-un domeniu echivalent, în care rețeaua de profile este rectilinie, are expresia

$$Z = l - \frac{Nt}{2\pi} e^{-i\lambda} \ln \frac{z}{R_2}, \tag{1}$$

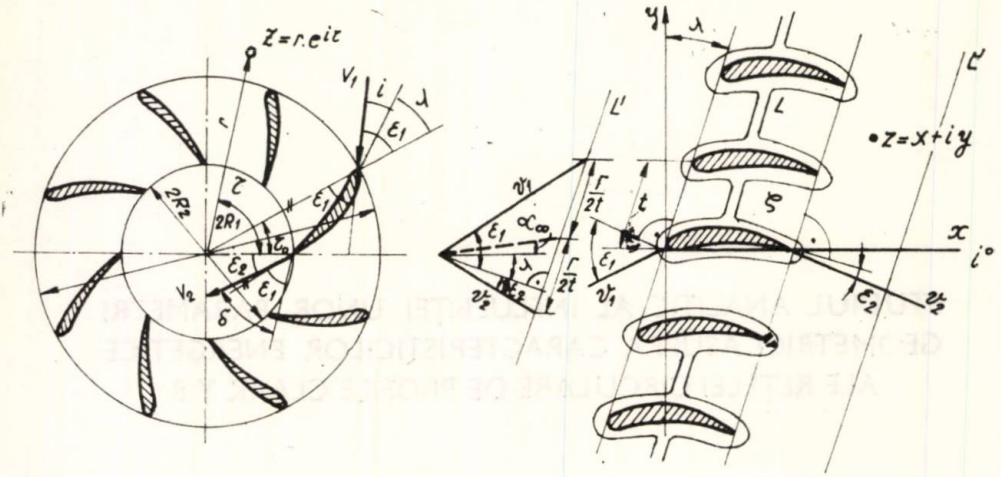


Fig. 1. — Reţeaua circulară şi reţeaua rectilinie echivalentă rezultată în urma transformării conforme

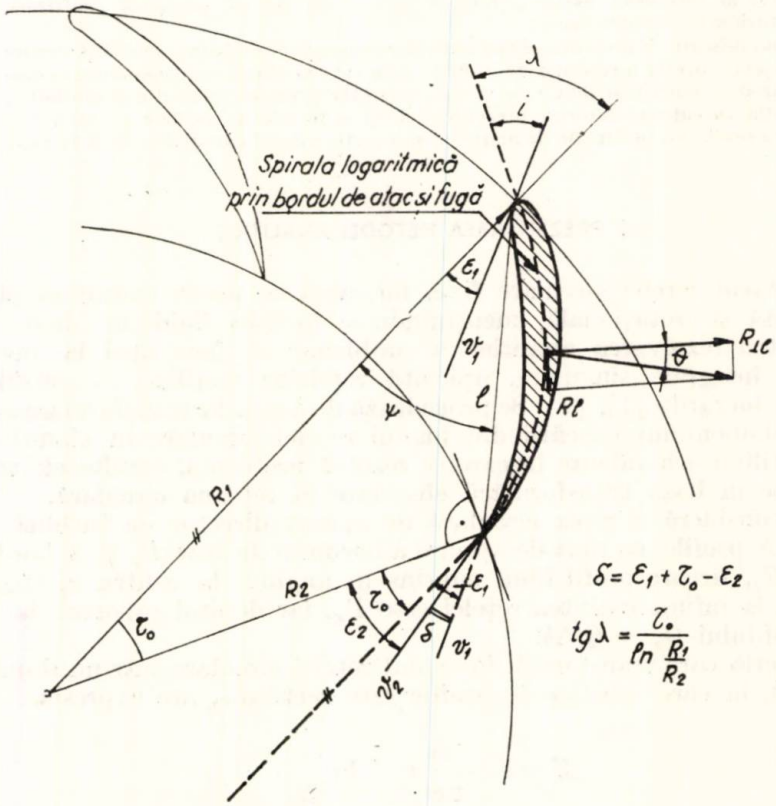


Fig. 2. -- Parametrii geometrici ai profilului în reţea circulară

unde $z = re^{i\tau}$ este afixa punctului curent în planul rețelei circulare și $Z = x + iy$ reprezintă un punct curent în planul rețelei rectilinii auxiliare cu unghiul de instalare

$$\operatorname{arc\,tg}\,\lambda = \frac{\tau_0}{\ln R_1/R_2}, \tag{1a}$$

și pasul relativ

$$t/l = \frac{2\pi}{N}\,\frac{\cos\lambda}{\ln R_1/R_2}. \tag{1b}$$

Din transformarea conformă rezultă parametrii de la infinit ai mișcării în planul Z:

$$V_\infty = \frac{1}{Nt}\sqrt{Q_\infty^2 + (\Gamma_\infty - N\Gamma/2)^2}, \tag{2}$$

$$\alpha_\infty = -\lambda + \operatorname{arc\,tg}\,(\Gamma_\infty/Q_\infty - N\Gamma/2Q_\infty), \tag{3}$$

unde Γ este circulația realizată de profilul în rețea.

Mișcarea din planul rețelei circulare definită mai sus se transpune astfel în planul rețelei rectilinii auxiliare determinată prin relațiile (1), (1a), (1b), ca o mișcare potențială și periodică cu viteza de la infinit de modul V_∞ dată în (2) și argument α_∞ dat în (3). Metoda pentru calculul distribuției vitezelor pe conturul profilului rețelei rectilinii a fost expusă pe larg în [1] și [2] și de aceea se menționează în continuare numai funcțiile principale necesare calculului.

Metoda de calcul expusă în [1] și [2] definește viteza pe conturul profilului printr-o ecuație integrală de tip Cauchy. De-a lungul scheletului se repartizează un sistem de singularități de tip surse-absorbții $q(x)$ și vîrtejuri $\gamma(x)$ ale căror funcții de distribuție se determină cu ajutorul sistemului de ecuații integrale singulare:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^l (\gamma^k H_t - q^k H_n)\,\mathrm{d}x + \frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma^k \mathrm{d}x}{x - x_0} = v_{sn}^k, \tag{4}$$

$$q^k + 2\frac{\mathrm{d}y^G}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^l (\gamma^k H_n + q^k H_t)\,\mathrm{d}x + 2\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\,\frac{\mathrm{d}y^G}{\mathrm{d}x}\int_0^l \frac{q^k \mathrm{d}x}{x - x_0} = f_{sn}^k,\ k = 0,1 \tag{5}$$

în care s-au respectat convențiile de notații din [1].

Cunoscînd distribuțiile de singularități $\gamma^k(x)$, $q^k(x)$, se determină viteza indusă pe schelet din ecuația integrală

$$v_{si}^k(x_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l [\gamma^k(x)\,K_n + q^k(x)\,K_t]\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Viteza indusă pe schelet se transpune pe contur pe baza relației

$$v_t^{\pm} = \frac{\mp v_{st} - \left(\frac{\gamma}{2} + v_{sn}\frac{\mathrm{d}y^G}{\mathrm{d}s}\right)}{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s}}. \tag{7}$$

Pe baza relației de definiție a vitezei induse [1] rezultă viteza totală pe contur:

$$V_t^{\pm} = v_t^{\pm} + V_\infty \cos(\alpha_\infty + \theta^{\pm}). \tag{8}$$

Ținînd cont de transformarea conformă efectuată obținem viteza pe conturul profilului rețelei circulare:

$$V^{\pm} = V_t^{\pm}\frac{Nt}{2\pi R_1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\left(\frac{x^{\pm}}{t} - \frac{y^{\pm}}{t}\operatorname{tg}\lambda\right)}. \tag{9}$$

2. METODA NUMERICĂ UTILIZATĂ

Sistemul de ecuații integrale (4) și (5) se rezolvă numeric. În acest scop se aplică schimbarea de variabilă:

$$x = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \tag{10}$$

iar funcțiile de distribuție a singularităților se aproximează prin polinoamele trigonometrice:

$$\gamma^k(\varphi)\sin\varphi = \sum_{n=0}^{p} a_n^k \cos n\varphi, \tag{11}$$

$$q^k(\varphi)\sin\varphi = \sum_{n=1}^{p} b_n^k \cos n\varphi. \tag{12}$$

În baza aproximărilor (11) și (12), și ținînd cont de cele stabilite în [1], circulația realizată de profil va fi

$$\Gamma = V_\infty \frac{\pi l}{2}(a_0^0 \cos\alpha_\infty + a_0^1 \sin\alpha_\infty). \tag{13}$$

Din (2) și (3) obținem după cîteva calcule algebrice:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{N}\,\frac{(a_0^0\cos\lambda - \hat{a}_0\sin\lambda)\,Q_\infty + (a_0^0\sin\lambda + a_0^1\cos\lambda)\,\Gamma_\infty}{4t/l + \pi(a_0^0\sin\lambda + a_0^1\cos\lambda)}, \tag{14}$$

iar parametrii de la infinit ai mișcării :

$$\frac{V_\infty}{Q_\infty} = \frac{1}{Nt}\sqrt{1 + \left[\frac{\Gamma_\infty}{Q_\infty} - \frac{(a_0^0 \cos\lambda - a_0^1 \sin\lambda) + (a_0^0 \sin\lambda + a_0^1 \cos\lambda)\frac{\Gamma_\infty}{Q_\infty}}{4t/l + \pi(a_0^0 \sin\lambda + a_0^1 \cos\lambda)}\right]^2} \tag{15}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_\infty + \lambda) = \frac{4\frac{t}{l}\frac{\Gamma_\infty}{Q_\infty} - \pi(a_0^0 \cos\lambda - a_0^1 \sin\lambda)}{4\frac{t}{l} - \pi(a_0^0 \sin\lambda + a_0^1 \cos\lambda)}. \tag{16}$$

Distribuția de viteze pe contur, în formă adimensională ca urmare a raportării la componenta meridională a vitezei de la intrare $v_{1m} = Q_\infty/2\pi R_1$ va fi

$$\frac{V^\pm}{v_{1m}} = Nt\left(\frac{V_t^\pm}{Q_\infty}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\left(\frac{x^\pm}{t} - \frac{y^\pm}{t}\operatorname{tg}\lambda\right)}. \tag{17}$$

Cunoscînd vitezele se determină coeficienții de presiune :

$$c_{p1} = \frac{p_i - p_1}{\frac{\rho}{2}v_1^2} = 1 - \left(\frac{v_i}{v_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{V^\pm}{v_{1m}}\right)^2 \cos^2\varepsilon_1. \tag{18}$$

Din observarea triunghiurilor de viteze de la intrare și ieșire din rețeaua rectilinie de calcul [3] rezultă deviația unghiulară a curentului (fig. 2)

$$\delta^\circ = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \tau_0, \tag{19}$$

unde

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{V_\infty \sin(\lambda + \alpha_\infty) + \frac{\Gamma}{2t}}{V_\infty \cos(\lambda + \alpha_\infty)},\ \operatorname{tg}\varepsilon_2 = \frac{V_\infty \sin(\lambda + \alpha_\infty) - \frac{\Gamma}{2t}}{V_\infty \cos(\lambda + \alpha_\infty)},$$

și deci

$$\operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{\frac{\Gamma}{tV_\infty}\cos(\lambda + \alpha_\infty)}{1 - \frac{\Gamma^2}{4t^2V_\infty^2}}$$

și înlocuind în (19) obținem

$$\delta^0 = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\frac{\Gamma}{tV_\infty}\cos(\lambda + \alpha_\infty)}{1 - \Gamma^2/4t^2V_\infty^2}\right] + \tau_0. \tag{20}$$

Ca o generalizare a coeficientului de deviație a curentului introdus prin lucrarea [4] pentru rețele drepte se poate defini coeficientul de deviație

$$\delta_u = \frac{R_1 V_{u1} - R_2 V_{u2}}{R_1 V_{1m}} = \frac{N\Gamma}{Q_\infty},$$

unde, dacă se înlocuiește expresia lui Γ din (14), obținem

$$\delta_u = 2\pi \frac{(a_0^0 \cos\lambda - a_0^1 \sin\lambda) + (a_0^0 \sin\lambda + a_0^1 \cos\lambda)\dfrac{\Gamma_\infty}{Q_\infty}}{4t/l + \pi(a_0^0 \sin\lambda + a_0^1 \cos\lambda)}. \tag{21}$$

3. PROGRAMAREA METODEI PENTRU CALCULUL LA MAȘINA ELECTRIONICĂ

Mersul calculului a fost programat în limbaj FOTRAN II [5]. Dăm în cele ce urmează succesiunea relațiilor și organigrama de calcul.

Pe baza relației (1) s-au determinat coordonatele profilului în rețea rectilinie.

Scheletul s-a aproximat prin segmente de arc de parabolă racordate, pentru care funcția de definiție este

$$y/l = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos^2\varphi, \tag{22}$$

Tabela 1

λ				A_0	A_1	A_2
	0	$<\varphi\leqslant$	0,927295	0,0079166	0,0613889	−0,0693055
20°	0,927295	$<\varphi\leqslant$	1,772145	0,0241554	0,0072592	−0,0241975
	1,772145	$<\varphi\leqslant$	3,141592	0,0245780	0,0118449	−0,0127334
	0	$<\varphi\leqslant$	0,927295	0,0122917	0,0568056	−0,0690972
30°	0,927295	$<\varphi\leqslant$	1,772145	0,0267221	0,0087037	−0,0290123
	1,772145	$<\varphi\leqslant$	3,141592	0,0280458	0,0151504	−0,0128954
	0	$<\varphi\leqslant$	0,927295	0,0144271	0,0662153	−0,0806424
40°	0,927295	$<\varphi\leqslant$	1,772195	0,0312360	0,0101851	−0,0339506
	1,772145	$<\varphi\leqslant$	3,141592	0,0328944	0,0176794	−0,0152151
	0	$<\varphi\leqslant$	0,927295	0,0228646	0,0572569	−0,0801216
50°	0,927295	$<\varphi\leqslant$	1,772145	0,0361526	0,0129629	−0,0432098
	1,772145	$<\varphi\leqslant$	3,141592	0,0394367	0,0241203	−0,0154163
	0	$<\varphi\leqslant$	0,927295	0,0329479	0,0478681	−0,0808159
60°	0,927295	$<\varphi\leqslant$	1,772145	0,0423971	0,0163703	−0,0545679
	1,772145	$<\varphi\leqslant$	3,141592	0,0477524	0,0318375	−0,0159249

iar funcția de grosime s-a definit sub forma unui polinom trigonometric

$$y^G/l = k \sum_{n=1}^{m} B_n \sin n\varphi. \tag{23}$$

În prima etapă, pornind de la parametrii geometrici cunoscuți ai profilului și rețelei rectilinii, se determină coeficienții distribuțiilor de singularități pe schelet; în acest scop se determină:

[1]
$$\xi_{kj} = \frac{\pi l}{t}\,[(X_k - X_j)\cos\lambda - (Y_k - Y_j)\sin\lambda],$$
$$\eta_{kj} = \frac{\pi l}{t}\,[(Y_k - Y_j)\cos\lambda + (X_k - X_j)\sin\lambda],$$
$$j = 0,6, \qquad k = 0,6,$$

[2]
$$A_{kj} = \frac{\operatorname{sh} 2\xi_{kj}}{\operatorname{ch} 2\xi_{kj} - \cos 2\eta_{kj}},$$
$$B_{kj} = -\frac{\sin 2\eta_{kj}}{\operatorname{ch} 2\xi_{kj} - \cos 2\eta_{kj}},$$
$$j = 0,6, \qquad k = 0,6,$$

[3]
$$\theta_j = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{dY}{dX}\right)_j, \qquad j = 0,6,$$

[4]
$$\chi^t_{kj} = \frac{\pi l}{2t}\sin\varphi_j[A_{kj}\cos(\lambda + \theta_j) - B_{kj}\sin(\lambda + \theta_j)] - \frac{\cos\theta_j}{X_k - X_j}\frac{\sin\varphi_j}{2},$$
$$\chi^n_{kj} = -\frac{\pi l}{2t}\sin\varphi_j[A_{kj}\sin(\lambda + \theta_j) + B_{kj}\cos(\lambda + \theta_j)],$$
$$\chi^t_{kk} = \frac{\sin\varphi_j}{2}\,\frac{d(\cos\theta_j)}{dx}, \qquad j = 0,6,$$
$$\chi^n_{kk} = \frac{\sin\varphi_j}{2}\,\frac{d(\sin\theta_j)}{dx}, \qquad k = 0,6,$$

[5]
$$h^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{5}\chi^\alpha_{kj}\cos(\nu\varphi_k) + \frac{1}{2}[\chi^\alpha_{0j} + (-1)^\nu\chi^\alpha_{\bar{0}j}]\right\}\sin\mu\varphi_j,$$
$$h^\alpha_{\mu 0} = \frac{1}{18}\sum_{j=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{5}\chi^\alpha_{kj} + \frac{1}{2}[\chi^\alpha_{0j} + \chi^\alpha_{\bar{0}j}]\right\}\sin\mu\varphi_j,$$
$$\alpha = t, n, \qquad \nu = 1,5, \qquad \mu = 1,5,$$

$$c_\alpha^\nu(\varphi_j) = \frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{5} h_{\mu\nu}^\alpha \sin(\mu\varphi_j),$$

[6]
$$c_\alpha^0(\varphi_j) = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{5} h_{\mu 0}^\alpha \sin(\mu\varphi_j), \qquad \begin{matrix}\alpha = t, n,\\ j = 2,5,\end{matrix}$$

$$c^\nu(\varphi_j) = -\frac{1}{2}\sin(\nu\varphi_j),$$

$$P^\nu(\varphi_j) = c_t^\nu + c^\nu\cos\theta_j - (-1)^\nu c_t^0,$$

[7]
$$Q^\nu(\varphi_j) = -c_n^\nu,$$

$$R^\nu(\varphi_j) = 4\frac{dY^G}{d\varphi_j}[c_n^\nu - (-1)^\nu c_n^0],$$

$$S^\nu(\varphi_j) = \cos(\nu\varphi_j)\sin\varphi_j + 4\frac{dY^G}{d\varphi_j}(c_t^\nu + c^\nu\cos\theta_j),$$

$$v_{sn}^0(\varphi_j) = \sin\theta_j,$$

$$v_{sn}^1(\varphi_j) = -\cos\theta_j,$$

[8]
$$f_{sn}^0(\varphi_j) = 2\left[\left(\frac{dY^G}{dX}\right)_J\cos\theta_j - (Y^G)_J\left(\frac{d\theta_j}{dX}\right)_J\sin\theta_j\right],$$

$$f_{sn}^1(\varphi_j) = 2\left[\left(\frac{dY^G}{dX}\right)_J\sin\theta_j + (Y^G)_J\left(\frac{d\theta_j}{dX}\right)_J\cos\theta_j\right].$$

Din (4) și (5) rezultă următorul sistem liniar :

[9]
$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{p} P^\nu(\varphi_j)\,a_\nu^k + \sum_{\nu=1}^{p} Q^\nu(\varphi_j)\,b_\nu^k &= v_{sn}^k(\varphi_j)\sin\varphi_j,\\ \sum_{\nu=1}^{p} R^\nu(\varphi_j)\,a_\nu^k + \sum_{\nu=1}^{p} S^\nu(\varphi_j)\,b_\nu^k &= f_{sn}^k(\varphi_j)\sin^2\varphi_j.\end{aligned} \qquad k = 0,1$$

Din acest sistem rezultă a_ν^k și b_ν^k coeficienții polinoamelor (11) și (12). Coeficienții a_ν^k satisfac relația

[10]
$$a_0^k = a_1^k - a_2^k + a_3^k - a_4^k.$$

Se calculează în continuare viteza indusă pe scheletul profilului :

[11]
$$v_{st}^k(\varphi_j)\sin\varphi_j = -\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{k-1}\left[2a_0^k h_{\mu 0}^n - 2b_\mu^k\cos\theta_0 + \sum_{\nu=1}^{p}(a_\nu^k h_{\mu\nu}^n + b_\nu^k h_{\mu\nu}^t)\right]\sin(\mu\varphi_j).$$

Viteza indusă pe contur

$$[12] \qquad v_t^{k\pm}(\varphi_j) = \frac{\mp v_{st}^k \sin\varphi_j - \left[\frac{\gamma^k(\varphi_j)\sin\varphi_j}{2} + 2v_{sn}^k \frac{dY^a}{d\varphi}\right]\frac{dx}{ds}}{\frac{d\sigma^\pm}{ds}\sin\varphi_j}.$$

Cunoscînd $v_t^{k\pm}$ se determină viteza totală pe contur:

$$[13] \qquad V_t^\pm = V_\infty(V_t^{0\pm}\cos\alpha_\infty + V_t^{1\pm}\sin\alpha_\infty),$$

unde

$$V_t^{0\pm} = v_t^{0+} + \cos\theta^\pm \quad V_t^{1\pm} = v_t^{1\pm} + \sin\theta^\pm,$$

iar V_∞ și α_∞ rezultă din (15) și (16) în care s-a calculat Γ cu (14).

Viteza în planul rețelei circulare se calculează cu expresia

$$[14] \qquad \frac{V^\pm}{v_{1m}} = Nt\,\frac{V_t^\pm}{Q_\infty}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{(X^\pm - Y^\pm \operatorname{tg}\lambda)}.$$

În final, coeficientul de presiune pe contur este

$$[15] \qquad c_p^\pm = 1 - \left(\frac{V^\pm}{v_{1m}}\right)^2 \cos^2\varepsilon_1,$$

unde

$$\cos\varepsilon_1 = \left[1 + \left(\frac{\Gamma_\infty}{Q_\infty}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Coordonatele punctelor de pe conturul profilului rețelei circulare omoloage punctelor din rețeaua rectilinie rezuătă din (1) și au expresia:

$$R^\pm = R_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{(X^\pm - Y^\pm \operatorname{tg}\lambda)},$$

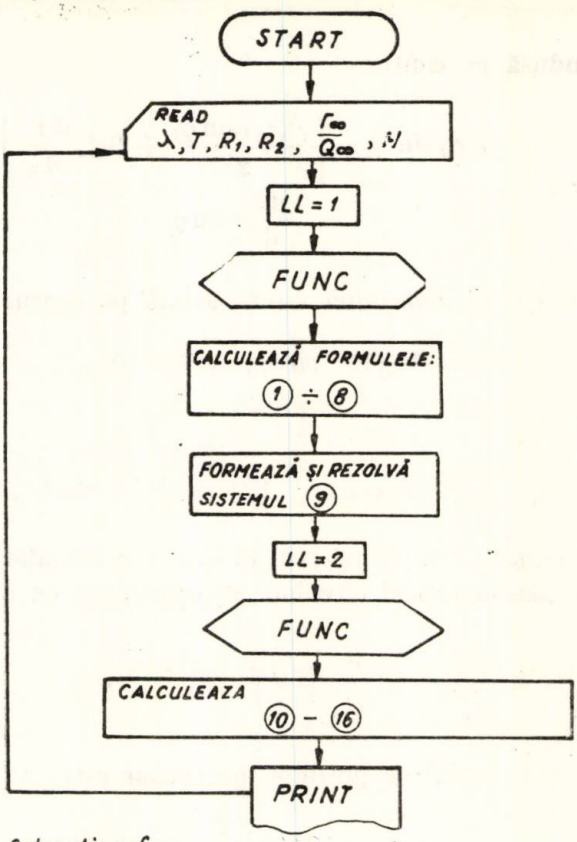
$$[16]$$

$$\tau^\pm = [(1 - X^\pm)\operatorname{tg}\lambda - Y^\pm]\ln\frac{R_1}{R_2}:$$

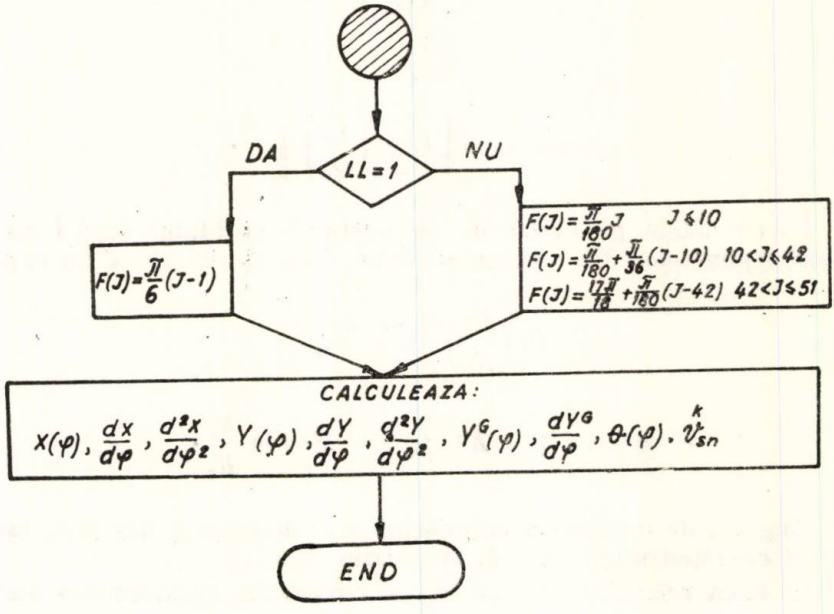
Unghiul de deviație a curentului δ se determină din (20), iar coeficientul deviației unghiulare δ_u cu relația (21).

În baza relațiilor de mai sus s-a întocmit organigrama anexată.

Program principal:



Subroutine func.:



Pe baza acestei organigrame s-a întocmit programul detaliat pentru calculatorul IRIS-50 al Centrului teritorial de calcul electronic din Timișoara.

4. APLICAREA METODEI LA STUDIUL INFLUENȚEI PARAMETRILOR GEOMETRICI ASUPRA PERFORMANȚELOR REȚELEI CIRCULARE

A fost studiată o rețea circulară de aparat director de turbină formată din profile Clark Y 8 pentru care coordonatele conturului se dau în tabela 2.

Parametrii geometrici al căror efect a fost analizat sînt :

— unghiul de instalare $\lambda = 20°, 30°, 40°, 60°$,

— numărul de profile $N = 20, 18, 15, 13, 10$.

4.1. INFLUENȚA UNGHIULUI DE INSTALARE

Pe baza rezultatelor numerice obținute s-au trasat curbele de variație a coeficienților de presiune c_p pe conturul profilului (fig. 3, 4, 5) deviația unghiulară (fig. 6) și coeficientul de deviație a curentului (fig. 7) la diferite valori ale direcției curentului de la intrare față de tangenta la spirala logaritmică ce trece prin bordul de atac și de fugă la profilul (fig. 2)

$$i = \varepsilon_1 - \lambda. \tag{24}$$

Din observarea distribuțiilor coeficienților de presiune (fig. 3, 4, 5) rezultă că pe extradosul profilului apare un maxim în imediata apropiere

Tabela 2

Poz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R^+	345,6	345,5	345,4	345,3	344,4	343,5	341,6	339,3	334,1
τ^+	0,2682	0,2627	0,2582	0,2499	0,2421	0,2345	0,2197	0,2054	0,1778
R^-	345,6	343,4	342,4	340,6	339,2	337,7	334,9	332,2	327,0
τ^-	0,2682	0,2665	0,2636	0,2574	0,2509	0,2443	0,2308	0,2175	0,1904

(continuare tab. 2)

Poz.	10	11	12	13	14	15	16	17
R^+	328,8	323,1	317,3	311,3	305,2	299,1	296,1	293,1
τ^+	0,1509	0,1247	0,0990	0,0737	0,0488	0,0422	0,0120	0
R^-	321,9	216,9	311,9	307,3	302,3	297,6	295,2	293,1
τ^-	0,1632	0,1360	0,1088	0,0816	0,0544	0,0272	0,0136	0

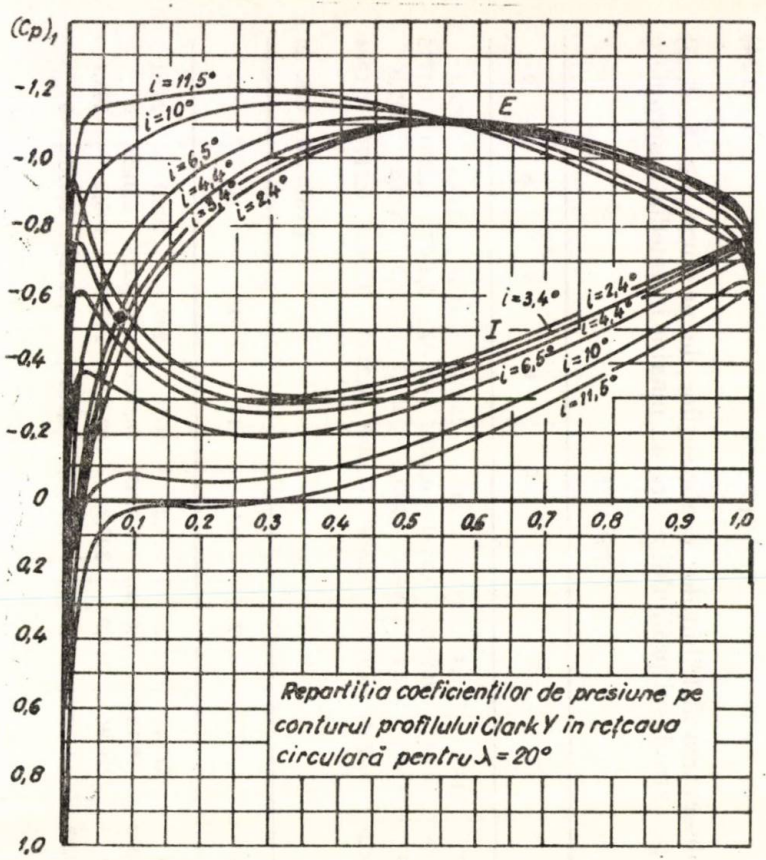


Fig. 3. — Repartiția coeficienților de presiune pe conturul profilului rețelei circulare pentru $N = 20$ profile Clark Y 8 și unghiul de instalare $\lambda = 20°$ și incidența : $i = 2{,}4°$, $3{,}4°$, $4{,}4°$, $6{,}5°$, $10{,}5°$, $11{,}5°$

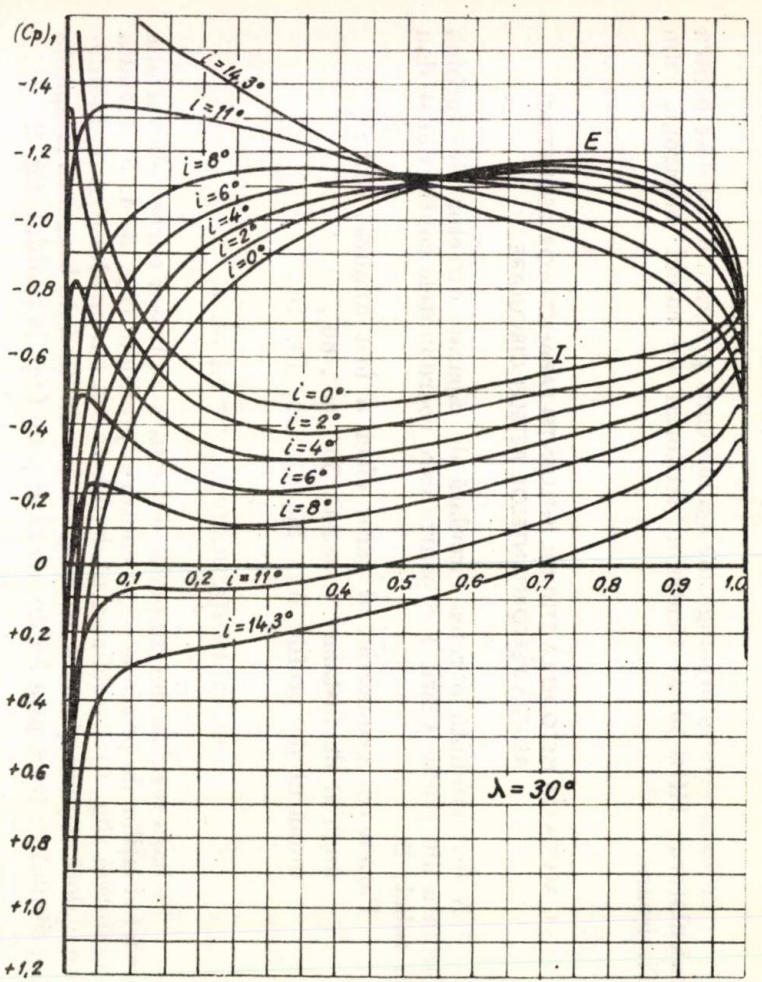


Fig. 4. — Repartiția coeficienților de presiune pe conturul profilului rețelei circulare pentru $N = 20$ profile Clark Y 8 și unghiul de instalare $\lambda = 30°$ și incidența : $i = 0°$, $2°$, $4°$ $6°$, $8°$, $11°$, $14{,}3°$

a bordului de atac, maxim ce se atenuează cu creşterea lui i. Pe porţiunea (0,2—0,35) l pentru toate valorile unghiului de instalare apare pe intrados un minim al coeficienţilor de presiune, după care curbele evoluează într-un fascicul aproape paralel pînă în apropierea bordului de fugă. Pe extradosul profilului fasciculul are un punct comun plasat în intervalul (0,5—0,6) l. Maximul curbelor se deplasează de la bordul de atac spre bordul de fugă odată cu micşorarea lui i.

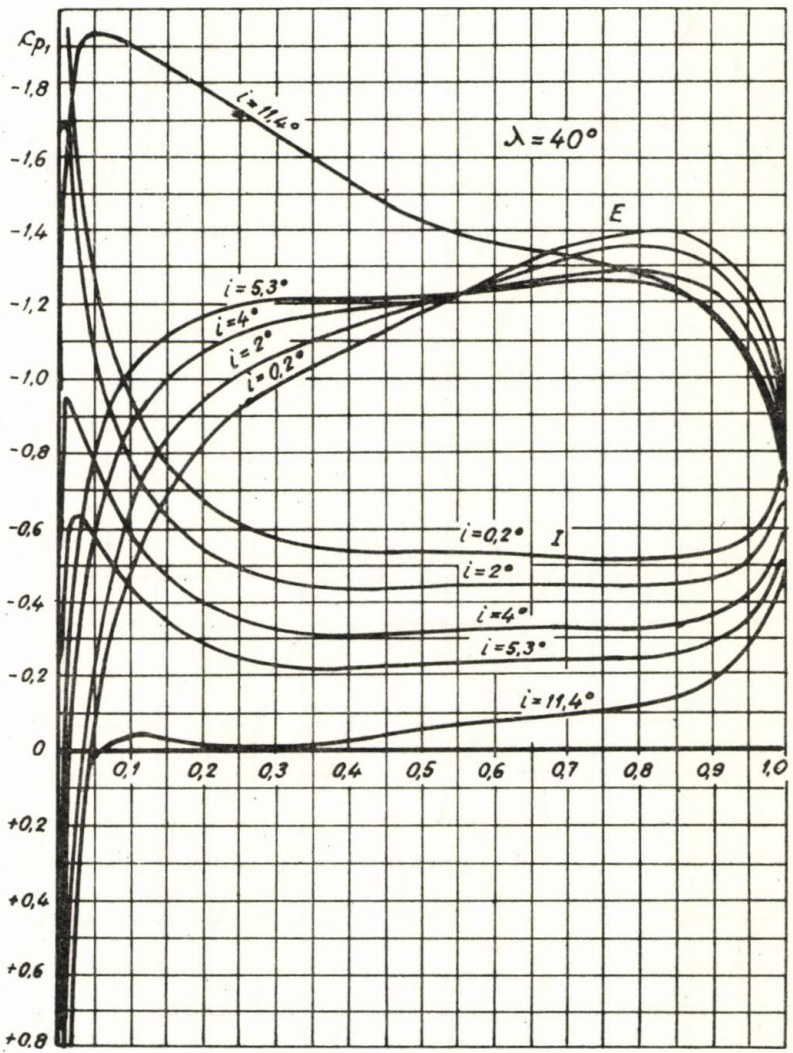


Fig. 5. — Repartiţia coeficienţilor de presiune pe conturul profilului reţelei circulare, pentru $N = 20$ profile Clark Y 8 şi unghiul de instalare $\lambda = 40°$ şi incidenţa : $i = 0{,}2°$, 2°, 4°, 5,3°, 11,4°

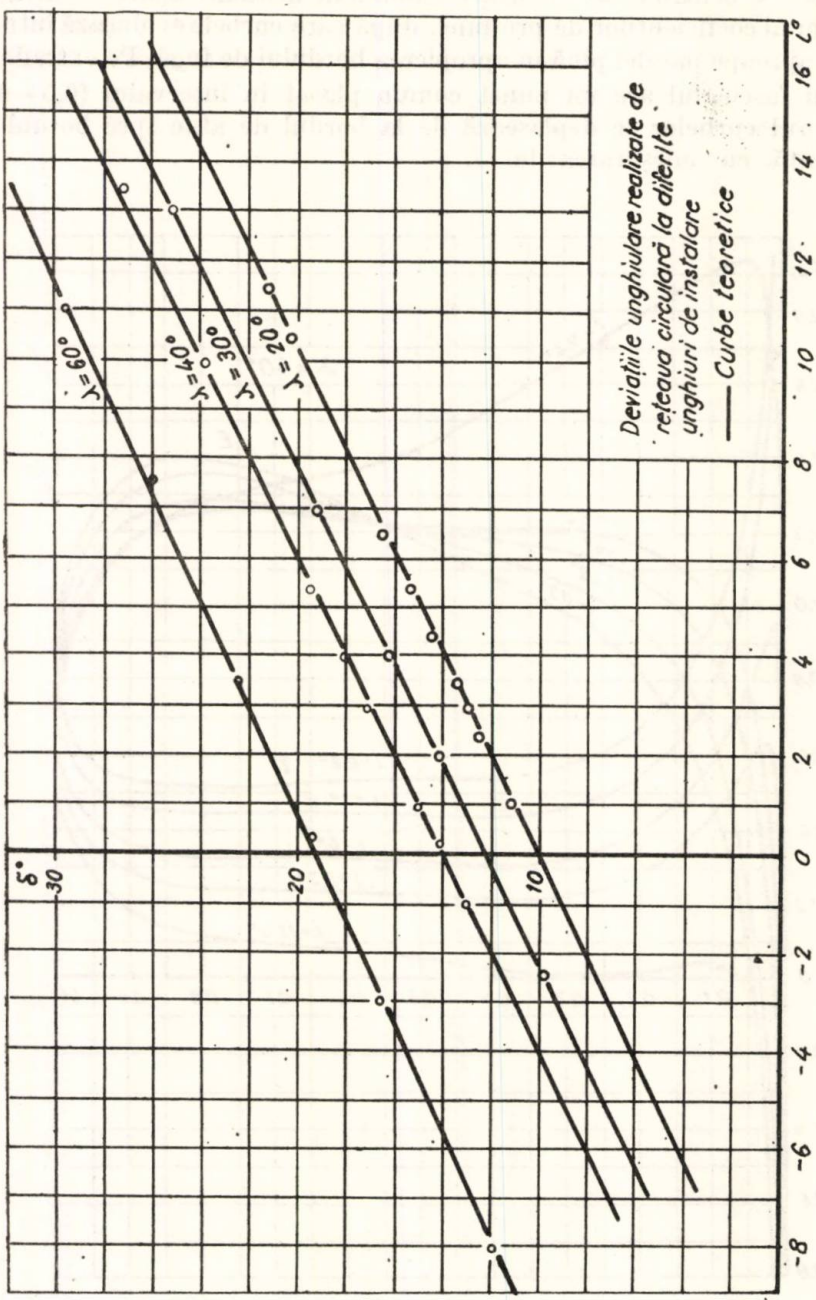


Fig. 6. — Variația deviației unghiulare a curentului cu incidența la diferite valori ale unghiului de instalare în cazul rețelei circulare cu $N = 20$ profile Clark Y8

Pe baza distribuțiilor coeficienților de presiune s-au determinat coeficienții acțiunii curentului asupra profilului la diferite valori ale unghiului de instalare. Curbele au o alură liniară, panta lor descrescînd cu creșterea unghiului de instalare. Din figura 8 se remarcă creșterea componentei orientate după normala la coarda profilului odată cu creșterea lui i și micșorarea concomitentă a componentei paralele cu coarda. În consecință, rezultanta acțiunii curentului își modifică direcția, cu tendința de a se orienta normal la coarda profilului odată cu mărirea unghiului $i°$.

Deviația unghiulară δ (fig. 6) depinde liniar de i și crește proporțional cu unghiul de instalare.

Coeficientul de deviație (fig. 7) crește aproape liniar cu i la valori mici ale unghiului de instalare; odată cu creșterea lui λ panta curbelor crește, abătîndu-se prin valori superioare de la direcția liniară

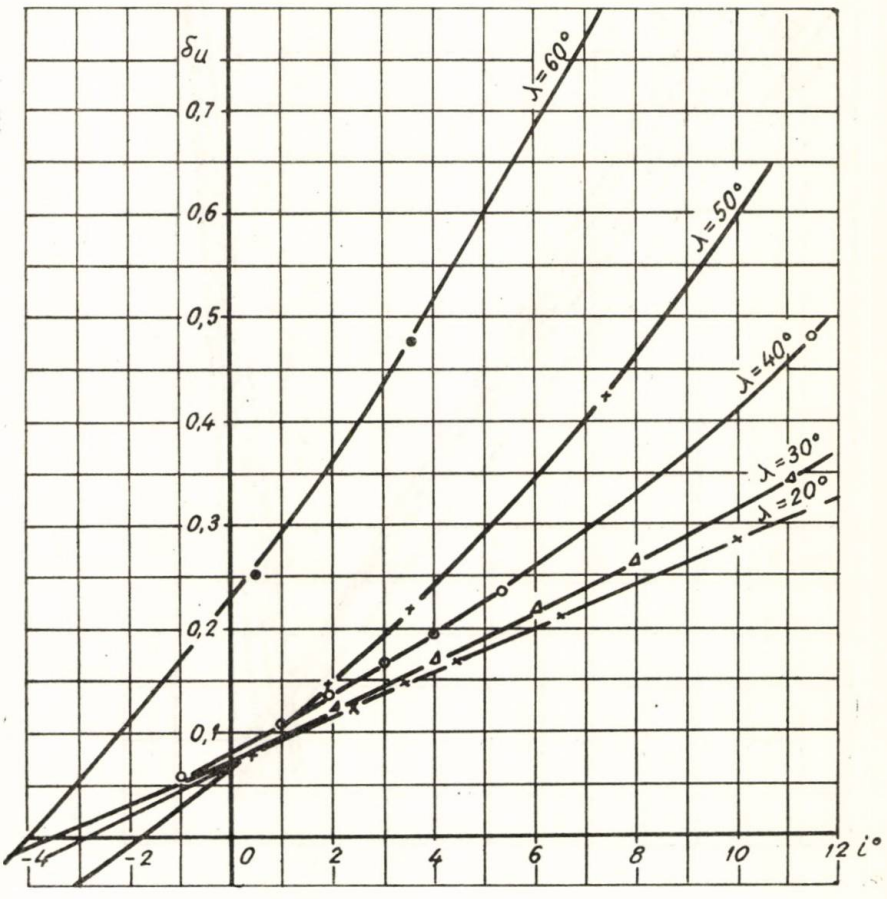


Fig. 7. — Variația coeficientului de deviație a curentului cu incidența la diferite valori ale unghiului de instalare, în cazul rețelei circulare formate din $N=20$ profile Clark Y8

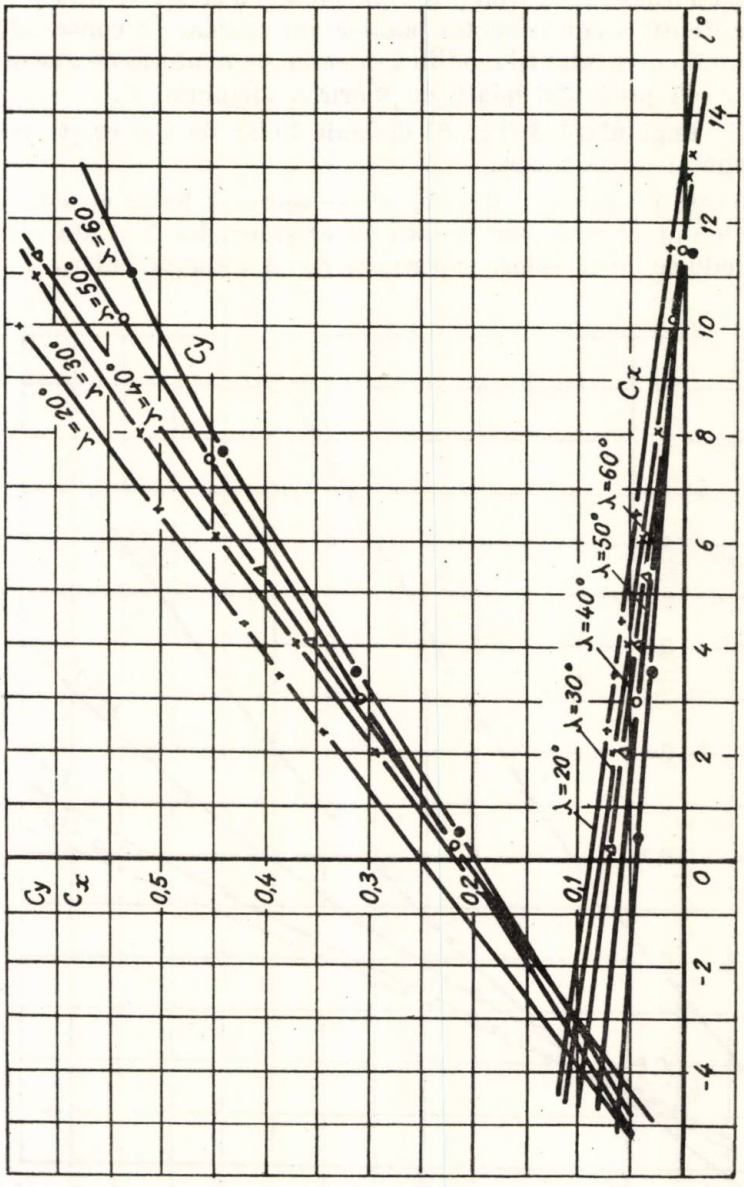


Fig. 8. — Variația coeficientului de acțiune a curentului asupra profilului rețelei circulare pentru $N = 20$ profile Clark Y 8 și unghiul de instalare $\lambda = 20°$, 30°, 40°, 50°, 60°

Rezultă în concluzie că pentru rețeaua circulară de aparat director de turbină, mărirea unghiului de instalare duce la sporirea deviației realizate diminuînd însă acțiunea curentului asupra profilului.

4.2. INFLUENȚA NUMĂRULUI PROFILELOR REȚELEI

Al doilea parametru analizat, numărul de profile în rețea, a permis următoarele concluzii relativ la efectul său asupra performanțelor energetice ale rețelei :

Curbele de distribuție a coeficientului de presiune (fig. 9, 10, 11, 12) prezintă pe ramura corespunzătoare intradosului un maxim în apropierea bordului de atac, cu atît mai pronunțat cu cît numărul de profile este mai mare. Pe ramura de pe extrados apare, de asemenea, un maxim care însă se atenuează cu creșterea numărului de profile. Aria închisă de cele două ramuri ale curbei se micșorează cu creșterea numărului de profile, ceea ce duce la micșorarea acțiunii curentului asupra profilului la rețeaua mai deasă.

Deviația unghiulară a curentului își menține dependența aproape liniar cu i, panta curbelor micșorîndu-se odată cu rărirea profilelor (fig. 13). Același fenomen se petrece și în cazul coeficientului de deviație (fig. 14) în concordanță cu faptul că o rețea deasă conduce mai bine curentul decît o rețea rară.

5. CONCLUZII

Metoda ecuațiilor integrale, aplicată rețelei circulare de profile, permite determinarea caracteristicilor energetice ale rețelei în condițiile respectării ipotezelor de calcul : fluid ideal, mișcare plană, irotațională și permanentă, conturul profilului rămînînd tot timpul linie de curent.

În această situație se poate deduce că parametrii geometrici, pasul relativ și unghiul de instalare exercită următoarea influență asupra performanțelor rețelei de aparat director de turbină :

1. Mărirea pasului relativ al rețelei sporește deviația curentului în prezența rețelei și micșorează coeficienții de acțiune a curentului asupra profilului.

2. Mărirea unghiului de instalare sporește de asemenea deviația realizată de rețea și micșorează coeficienții de acțiune a curentului asupra profilului.

Primit la redacție la 12 februarie 1974

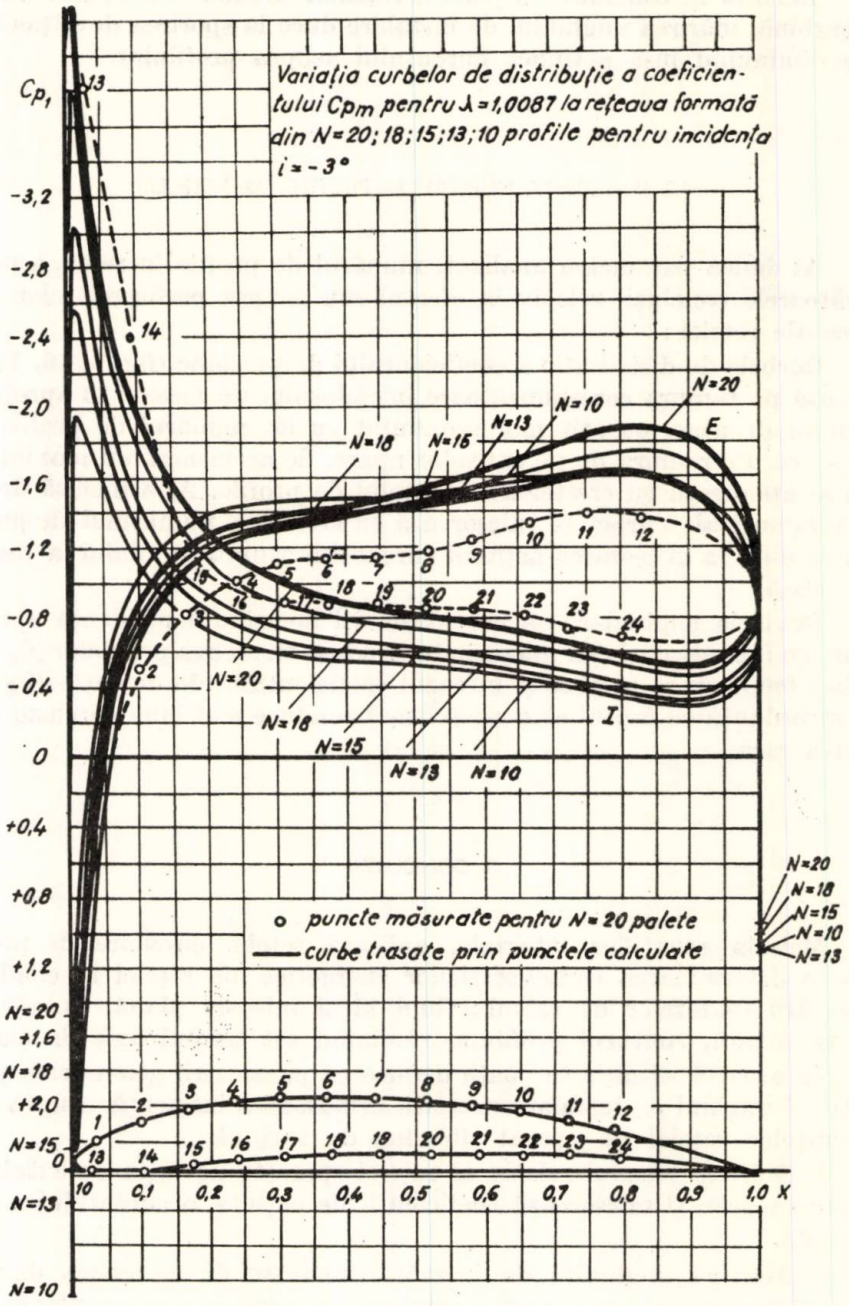


Fig. 9. — Curbele de distribuție a coeficientului de presiune pe conturul profilului rețelei circulare la unghiul de instalare $\lambda = 1{,}0087$ rad. și N = 20, 18, 15, 13, 10 profile Clark Y 8 la incidența $i = -3°$

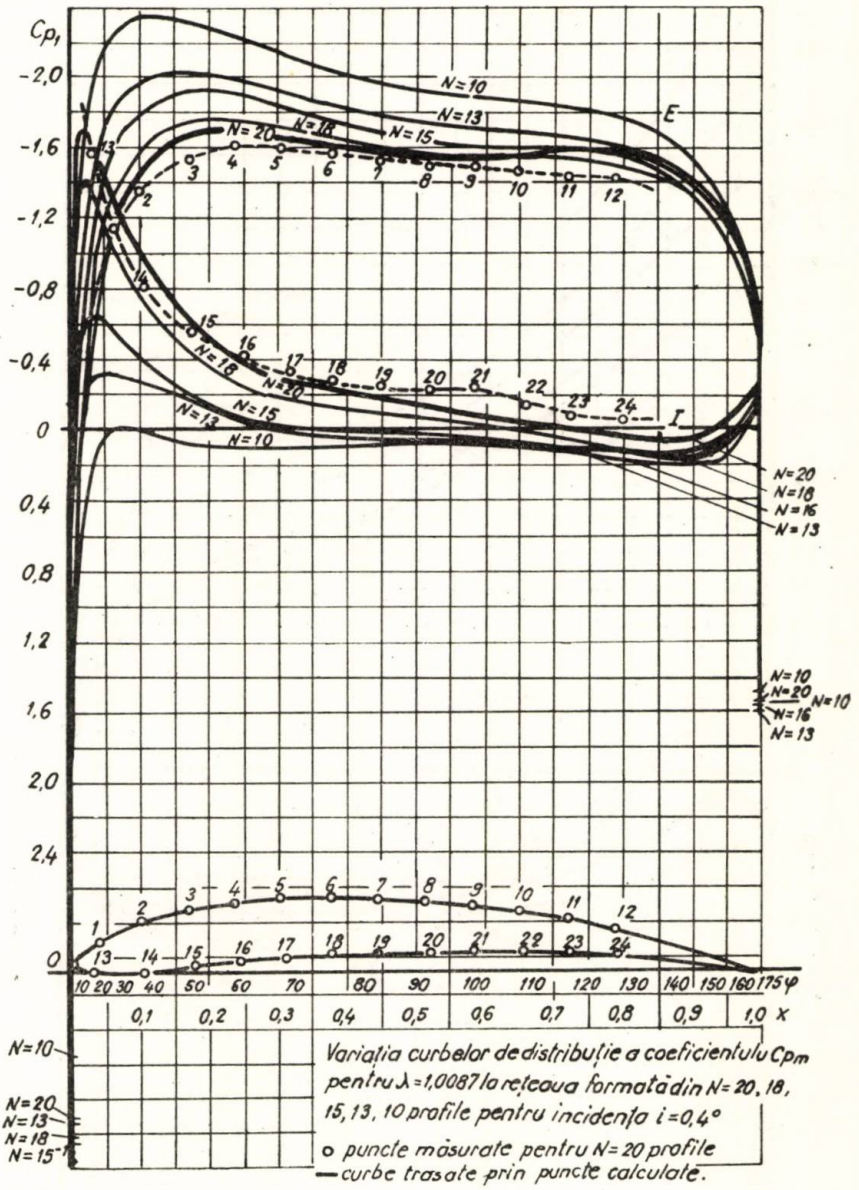


Fig. 10. — Curbele de distribuție a coeficientului de presiune pe conturul profilului rețelei circulare la unghiul de instalare $\lambda = 1{,}0087$ rad. $N = 20, 18, 15, 13, 10$ profile Clark Y8 la incidența $i = 0{,}40°$

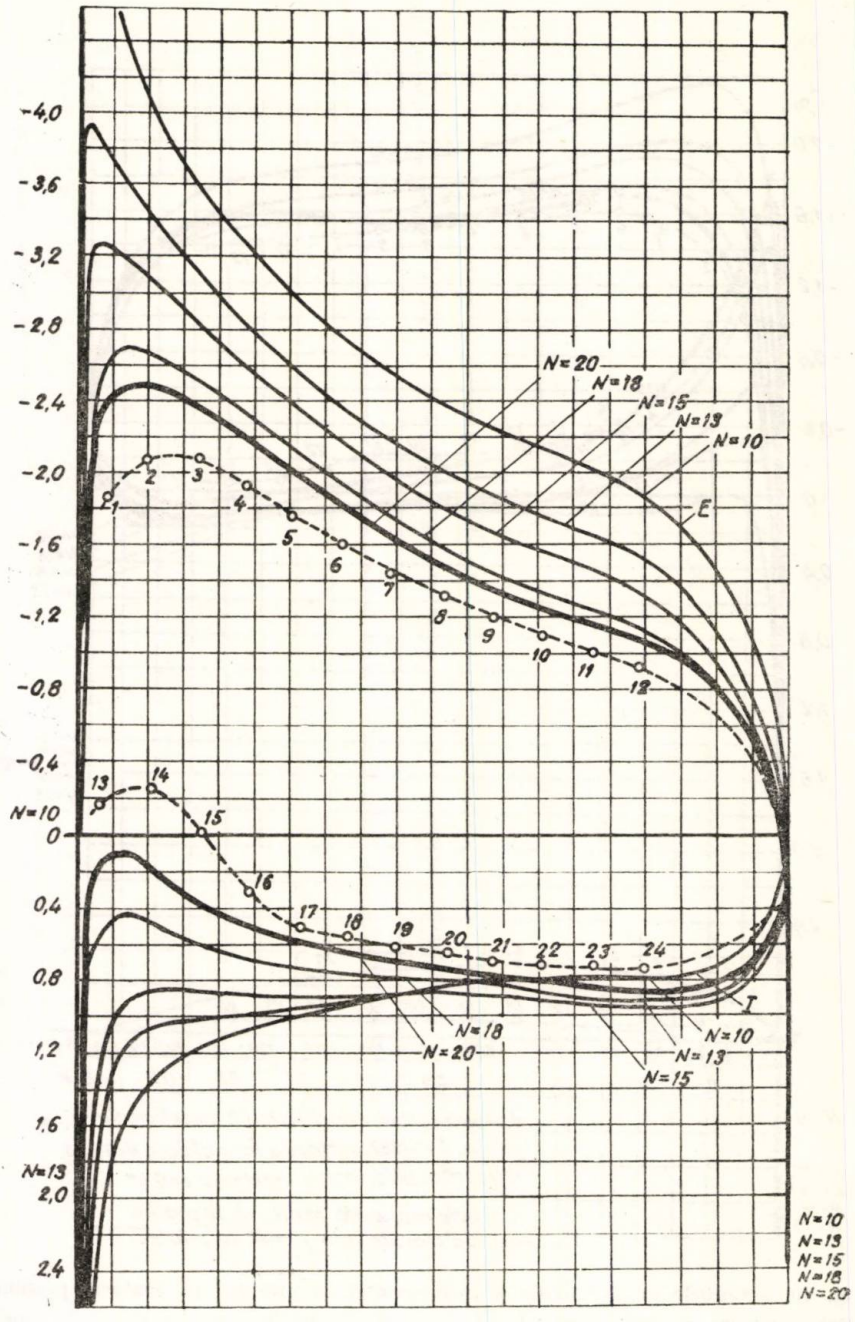


Fig. 11. — Curbele de distribuție a coeficientului de presiune pe conturul profilului rețelei circulare la unghiul de instalare $\lambda = 1{,}0087$ rad. și $N = 20$, 18, 15, 13, 10 profile Clark Y 8 la incidența $i = +3{,}5°$

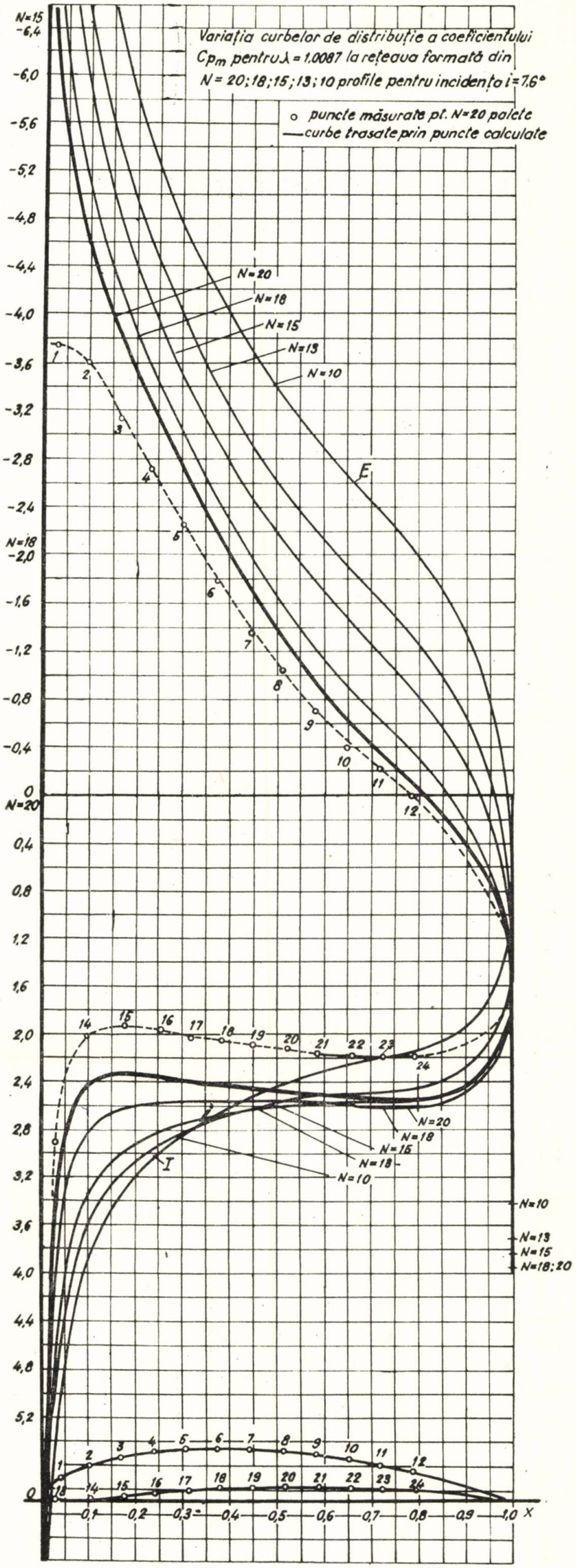


Fig. 12. — Curbele de distribuție a coeficientului de presiune pe conturul profilului rețelei circulare la unghiul de instalare $\lambda = 1{,}0087$ rad. și $N = 20, 18, 15, 13, 10$ profile **12** Clark Y 8 la incidența $i = 7{,}6°$.

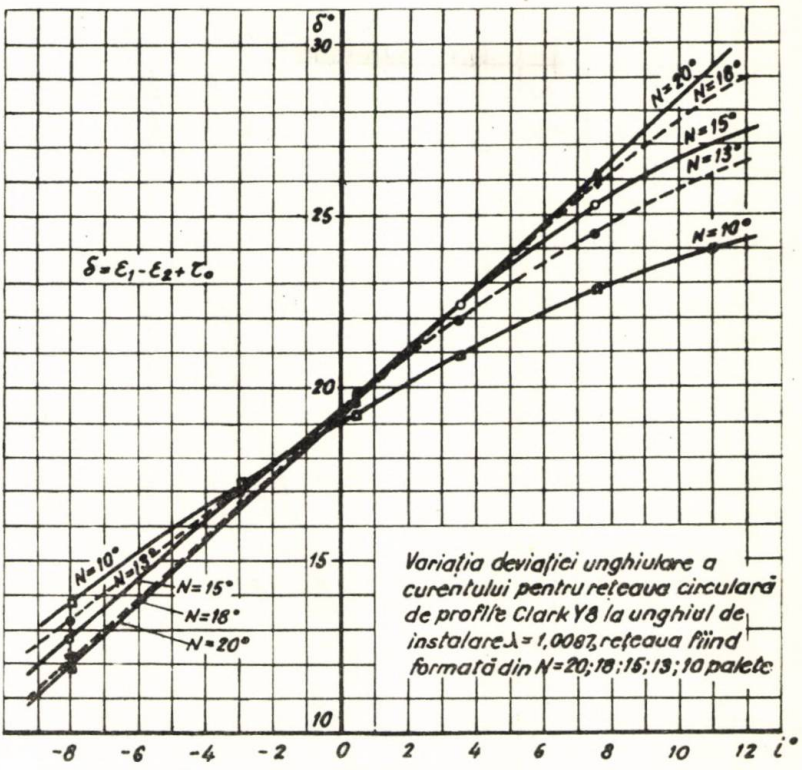


Fig. 13. — Variația cu incidența a deviației unghiulare a curentului pentru rețeaua circulară de profile la unghiul de instalare $\lambda = 1{,}0087$ rad, rețeaua fiind formată din $N = 20, 18, 15, 13, 10$ profile Clark Y 8.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Anton, O. Popa, *Das Geschwindigkeitsfeld auf der Kontur der Schaufelgitter aus dünnen Profilen und die Bestimmung ihrer Kavitationsempfindlichkeit*, Mitteilungen der Konferenz für Wasserkraftmaschinen Timișoara, 1964.

2. O. Popa, *Asupra mișcării potențiale în jurul rețelelor de profile Carafoli*. Comunicările Conferinței de mașini hidraulice, Timișoara, 1964.

3. H. Schlichting, *Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes, ebenes* Schaufelgitter, VDI Forschungsheft 447 — 1955.

4. I. Anton, *Influența parametrilor geometrici și cinematici asupra caracteristicilor energetice și cavitaționale ale turbinelor*, St. cerc. mec. aplicată, **30**, *3* (1972).

5. Petre Dimo, *Programarea în FORTRAN*, Ed. did. și ped. Buc., 1971.

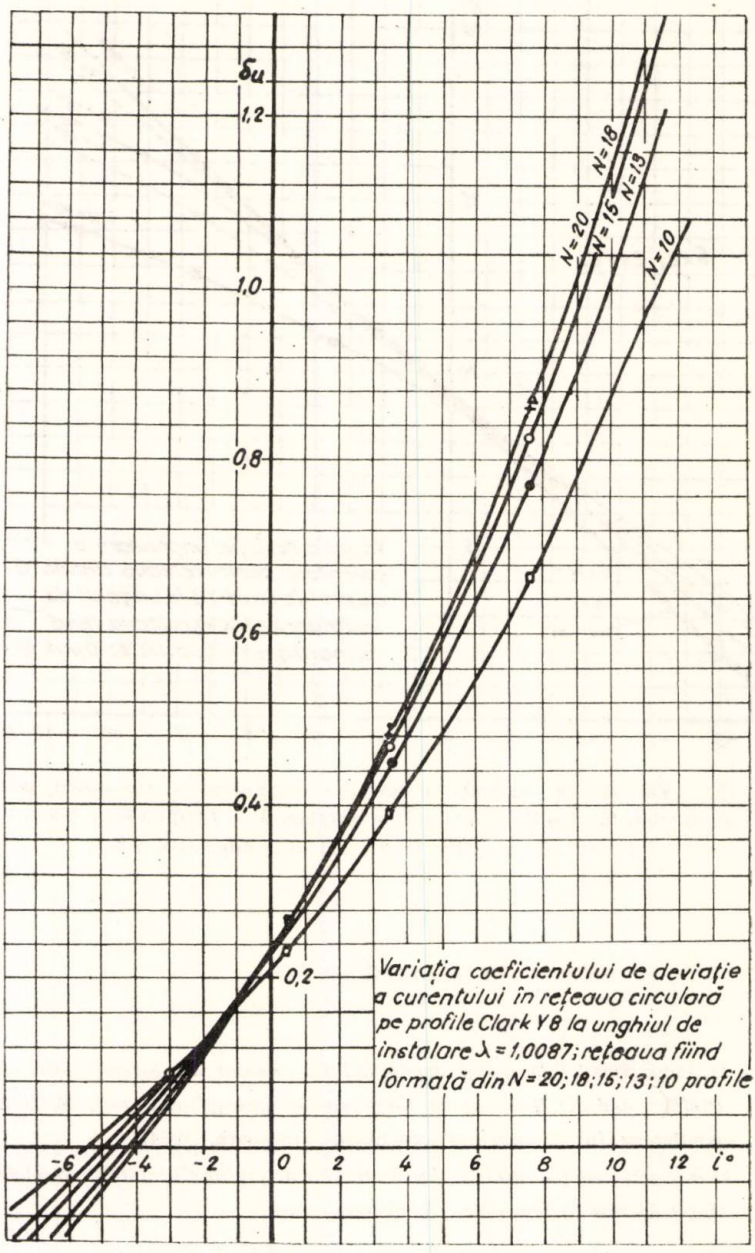


Fig. 14. — Variația cu incidența a coeficientului de deviație a curentului în rețeaua circulară formată din $N = 20,18, 15, 13, 10$ profile Clark Y 8 la unghiul de instalare $\lambda = 1,0087$ rad.

STUDIUL REGIMULUI NEPERMANENT DE CURGERE ÎN SISTEMELE DE IRIGAȚII

de I. SETEANU
Institutul politehnic București

În lucrare se prezintă un procedeu de obținere a formei suprafeței libere și a variației debitelor pentru sisteme de irigații complexe atît în regim permanent, cît și în regim nepermanent de curgere. Se folosesc ecuațiile lui Saint-Venant scrise în diferențe finite și rezolvate prin metoda dublului parcurs cu ajutorul calculatorului electronic cu limbajul de programare PL/1.

1. INTRODUCERE

Dimensionarea hidraulică a canalelor care fac parte dintr-un sistem complex de irigație în rețeaua de aducțiune-distribuție-irigație și în rețeaua de colectare impune o analiză minuțioasă a modului de curgere a apei în regim permanent, prin considerarea curbelor de remuu corespunzătoare, precum și în regimul nepermanent care ia naștere atît prin variația debitului de irigație în funcție de necesitățile de apă ale suprafețelor respective, cît și ca urmare a manevrării dispozitivelor de control ale nivelului (de exemplu, prin blocarea alimentării cu apă a unui subsector al sistemului de irigații) [1].

Studiul evoluției suprafeței libere a apei în regimul nepermanent de curgere în sistemele de irigații este asemănător în multe privințe cu studiul suprafeței libere în regimul nepermanent de curgere în albii deschise, prezentînd particularitatea de a exista un număr însemnat de zone de ramificație care impun o analiză specială. De asemenea este de un interes deosebit elaborarea unei scheme de calcul cît mai elastică, capabilă să permită obținerea rapidă a rezultatelor pentru situații cît mai variate, incluzînd posibilitatea modificării practic nelimitate a numărului de tronsoane de ramificație în funcție de necesitățile de manevră.

Complexitatea calculelor inerente rezolvării acestui tip de probleme impune folosirea calculatoarelor electronice, iar posibilitatea de modificare

a numărului de zone de joncțiune este echivalentă cu realizarea unui algoritm de calcul suficient de elastic pentru a îmbrățișa o varietate de situații incluzînd pe cele specificate mai sus.

2. ECUAȚIILE GENERALE ALE REGIMULUI NEPERMANENT DE CURGERE

Determinarea suprafeței libere a apei în regim de curgere nepermanentă în albii deschise se obține prin rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale ale lui Saint-Venant [2]. Acest sistem rezultă prin aplicarea relației de continuitate și a relației lui Bernoulli pentru mișcarea nepermanentă și are forma [3]:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b_s \frac{\partial h}{\partial t} - q = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{Q^2}{A}\right) + gA\frac{\partial h}{\partial x} + gA\frac{\partial z}{\partial x} + \tag{1}$$

$$+ \frac{gQ|Q|}{C^2 AR} - q|V| \cos \varphi = 0,$$

unde A reprezintă aria secțiunii (m^2), b_s — lățimea albiei la cota suprafeței libere (m), Q — debitul instantaneu în dreptul secțiunii considerate (m^3/s), h — adîncimea locală a apei (m), z — cota locală a fundului albiei față de un plan orizontal de referință convențional ales (m), q — afluxul lateral de debit pe metru liniar (m^2/s), V — viteza medie a unui curent lateral incident sub unghiul φ față de axa albiei (m/s), R — raza hidraulică (m), iar C — coeficientul lui Chézy mediu în secțiune ($m^{1/2}/s$); α este un coeficient care ține seamă de neuniformitatea vitezei în secțiunea transversală:

$$\alpha = \frac{A}{Q^2}\int_A u^2 \, dA, \tag{2}$$

unde am notat prin u viteza într-un punct oarecare al secțiunii de arie A. În continuare vom admite pentru simplificare că α este egal cu unitatea.

Raza hidraulică se calculează cu ajutorul formulei lui Engelund [4]:

$$\sqrt{R} = \frac{1}{A}\int_0^{b_s} \beta \cdot h^{3/2} \cdot dy, \tag{3}$$

unde h este adîncimea curentă a apei în secțiunea transversală, iar y — coordonata variabilă a lățimii, măsurată la suprafața liberă; β este egal cu raportul dintre coeficientul curent al lui Chézy și valoarea sa medie pentru întreaga secțiune.

Este evident că putem scrie (fig. 1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -i, \tag{4}$$

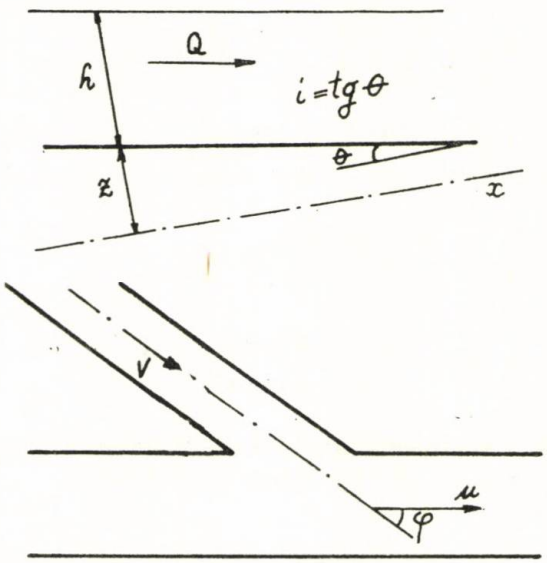


Fig. 1

unde i este panta topografică a fundului. Pentru simplificare vom presupune că unghiul de incidență al afluxului lateral de debit este $\varphi = 90°$.

3. SECȚIUNEA TRANSVERSALĂ

Vom admite că secțiunea transversală a canalului de irigație este trapezoidală (figura 2). Se obține prin calcule simple următorul grup de

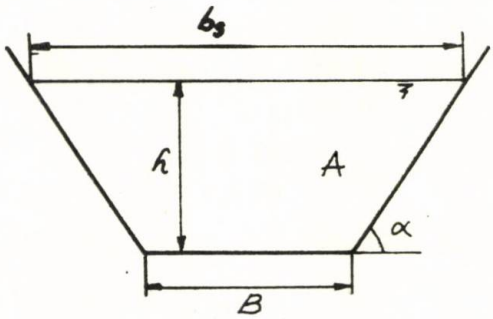


Fig. 2

formule necesare pentru cele ce urmează:

$$b_s = B + 2h \operatorname{ctg} \alpha, \tag{5}$$

$$A = h(B + h \operatorname{ctg} \alpha), \tag{6}$$

$$R = \left(\frac{B + 0{,}8\ h \operatorname{ctg} \alpha}{B + h \operatorname{ctg} \alpha}\right)^2 h, \tag{7}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{h} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{B + h \operatorname{ctg} \alpha}, \tag{8}$$

$$\frac{b_s}{A} = \frac{B + 2h \operatorname{ctg} \alpha}{h(B + h \operatorname{ctg} \alpha)}, \tag{9}$$

$$A.R = \frac{(B + 0{,}8\ h \operatorname{ctg} \alpha)}{B + h \operatorname{ctg} \alpha} \cdot h^2. \tag{10}$$

În aceste formule α reprezintă unghiul de înclinare a pereților laterali ai secțiunii transversale, iar B este lățimea fundului.

4. ECUAȚIILE NORMALE

Deoarece pentru albiile prismatice $A = A(h)$, putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = -\frac{Q^2 A'}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}; \tag{11}$$

am folosit notația $A' = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}$. Sistemul lui Saint-Venant (1) devine:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial x} + b_s \frac{\partial h}{\partial t} = q, \\ &\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2 A'}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x} + gA\frac{\partial h}{\partial x} - \\ &\quad - gA\, i + \frac{gQ\,|Q|}{C^2 AR} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

din prima ecuație (12) obținem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q - b_s \frac{\partial h}{\partial t};$$

prin substituție, a doua ecuație (12) devine

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Qq}{A} - \frac{2Q\,b_s}{A}\,\frac{\partial h}{\partial t} + \left(gA - \frac{Q^2A'}{A^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x} - \\ - g.A.i + \frac{gQ\,|Q|}{C^2\,AR} = 0,$$

astfel că sistemul (12) se poate scrie:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b_s\frac{\partial h}{\partial t} - q = 0,$$

$$\left(gA - \frac{Q^2A'}{A^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2Q\,b_s}{A}\,\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2\,qQ}{A} + \\ + \frac{gQ\,|Q|}{C^2\,AR} - g.A.i = 0. \tag{13}$$

Dacă vom introduce notațiile:

$$K = b_s,$$

$$L = gA - \frac{Q^2A'}{A^2},$$

$$M = \frac{2Qb_s}{A}, \tag{14}$$

$$N = \frac{2\,qQ}{A} + \frac{gQ\,|Q\,|}{C^2AR} - g.A.i,$$

obținem în locul sistemului (13) următoarea ecuație matriceală vectorială:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + S\frac{\partial f}{\partial f} + w = 0, \tag{15}$$

unde s-au introdus matricele:

$$f = \begin{pmatrix} Q \\ h \end{pmatrix},$$

$$w = \begin{pmatrix} -q \\ N/L \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 1/L & -M/L \end{pmatrix}.$$

Ecuația (15) reprezintă forma normală a sistemului (13). Pentru obținerea sa este necesar să fie îndeplinită condiția

$$L \neq 0. \tag{17}$$

Cînd L se anulează, are loc o situație critică pentru care

$$gA - \frac{Q^2A'}{A^2} = 0;$$

această relație se poate transcrie în forma:

$$\frac{(Q/A)^2}{g(A/A')} = 1. \tag{18}$$

Condiția (18) se poate pune sub forma clasică dacă introducem numărul lui Froude „sui-generis" $\mathcal{F}t^*$ definit prin membrul stîng al relației (18). Pentru aceasta putem introduce adîncimea „sui-generis" a canalului:

$$h^* = \frac{A}{A'} = \frac{1}{1/h + \operatorname{ctg}\alpha/(B + h\operatorname{ctg}\alpha)},$$

astfel că putem scrie

$$\mathcal{F}t^* = \frac{1}{g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2\left(\frac{1}{h} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{B + h\operatorname{ctg}\alpha}\right) =$$

$$= \mathcal{F}t\left(1 + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{B/h + \operatorname{ctg}\alpha}\right). \tag{19}$$

În relația de mai sus apare numărul lui Froude:

$$\mathcal{F}t = \frac{1}{gh}\left(\frac{Q}{A}\right)^2, \tag{20}$$

și se constată cu ușurință că $\mathcal{F}t^* > \mathcal{F}t$.

5. SCHEMA GENERALĂ DE CALCUL ÎN DIFERENȚE FINITE

Determinarea formei suprafeței libere în cazul curgerii nestaționare este echivalentă cu obținerea soluției ecuației matriceale (15) dacă se cunosc condițiile la limită și inițiale pentru problema dată. Complexitatea problemei impune folosirea calculatoarelor electronice și, în vederea utilizării acestora, s-au elaborat diverse algoritme de calcul bazate pe folosirea metodei diferențelor finite. Vom folosi o schemă implicită cu diferențe

finite prin care domeniul operatorului numeric va cuprinde integral domeniul soluției [5]. Sistemul cvasiliniar implicit care se obține este rezolvat printr-o pereche de algoritmi tridiagonali simultani. Metoda de rezolvare („double-sweep algorithm") este, de fapt, o formă particulară de aplicare a algoritmului lui Gauss pentru sisteme de ecuații liniare.

Vom alege o rețea de noduri în care se determină succesiv valorile lui h și Q; rețeaua este reprezentată în figura 3.

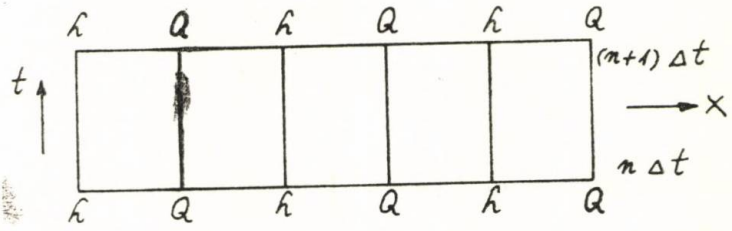


Fig. 3

Prima ecuație a sistemului (13) se poate transcrie în diferențe finite, observînd că putem scrie:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \simeq \frac{1}{4}\left(\frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{Q_{j+1}^{n} - Q_{j-1}^{n}}{\Delta x}\right),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \simeq \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t};$$

ecuația capătă forma de mai jos:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{Q_{j+1}^{n} - Q_{j-1}^{n}}{\Delta x}\right) + (b_s)^{(0)} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} - q_j^{(0)} = 0. \qquad (21)$$

În mod analog putem scrie:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^{n}}{\Delta t} + \frac{h_{j-1}^{n+1} - h_{j-1}^{n}}{\Delta t}\right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \simeq \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t},$$

$$\frac{gQ|Q|}{C^2 AR} \simeq \frac{g \cdot Q_j^{n+1}|Q_j^n|}{C^2(AR)^{(0)}},$$

$$\frac{2qQ}{A} \simeq \left(\frac{q}{A}\right)^{(0)} (Q_j^{n+1} + Q_j^n),$$

astfel că a doua ecuație a sistemului (13) devine :

$$\frac{1}{4} L^{(0)} \left(\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{h_{j+1}^{n} - h_{j-1}^{n}}{\Delta x} \right) + \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} -$$

$$- \frac{1}{2} M^{(0)} \left(\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^{n}}{\Delta t} + \frac{h_{j-1}^{n+1} - h_{j-1}^{n}}{\Delta t} \right) + \frac{g Q_j^{n+1} |Q_j^n|}{C^2 (AR)^{(0)}} + \tag{22}$$

$$+ \left(\frac{q}{A} \right)^{(0)} (Q_j^{n+1} + Q_j^n) - g A^{(0)} i = 0.$$

Indicele (0) semnifică timpul $\left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t$ și poziția $j\Delta x$.

Se observă că termenul corespunzător disipării de energie este aproximat printr-o expresie care depinde înlănțuit de doi pași de iterație în timp consecutivi. Se poate arăta că schema în diferențe finite formată din ecuațiile (21) și (22) este necondiționat stabilă, iar eroarea de rotunjire este de ordinul 0 (Δx^2, Δt^2) [6].

Sistemul format din ecuațiile (21) și (22) se poate scrie mai compact sub forma :

$$A_j Q_{j+1}^{n+1} + B_j h_j^{n+1} + C_j Q_{j-1}^{n+1} = D_j, \tag{23}$$

$$A_j^* h_{j+1}^{n+1} + B_j^* Q_j^{n+1} + C_j^* h_{j-1}^{n+1} = D_j^*; \tag{24}$$

relația (23) se aplică în puncte de tip h, iar relația (24) în puncte de tip Q. S-au folosit notațiile :

$$A_j = \frac{1}{4\Delta x}; \qquad A_j^* = \frac{L^{(0)}}{4\Delta x} - \frac{M^{(0)}}{2\Delta t},$$

$$B_j = \frac{b_s^{(0)}}{\Delta t}; \qquad B_j^* = \frac{1}{\Delta t} + \frac{g|Q_j^n|}{C^2 (AR)^{(0)}} + \left(\frac{q}{A} \right)^{(0)},$$

$$C_j = -\frac{1}{4\Delta x}; \qquad C_j^* = -\frac{L^{(0)}}{4\Delta x} - \frac{M^{(0)}}{2\Delta t}, \tag{25}$$

$$D_j = A_j Q_{j-1}^n + B_j h_j^n + C_j Q_{j+1}^n + q^{(0)},$$

$$D_j^* = A_j^* h_{j-1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{q^{(0)}}{(A)} \right) Q_j^n + C_j^* h_{j+1}^n + g A^{(0)} . i.$$

În aceste formule s-au folosit definițiile (14).

6. METODA DUBLULUI PARCURS

Se introduc noi variabile auxiliare E, F, E^*, F^* prin formulele:

$$Q_{j+1}^{n+1} = E_j h_j^{n+1} + F_j, \tag{26}$$

$$h_{j+1}^{n+1} = E_j^* Q_j^{n+1} + F_j^*. \tag{27}$$

Substituind formula (26) în relația (23) obținem

$$A_j E_j h_j^{n+1} + A_j F_j + B_j h_j^{n+1} + C_j Q_{j-1}^{n+1} = D_j,$$

care se mai poate scrie sub forma

$$h_j^{n+1} = \frac{-C_j}{A_j E_j + B_j} Q_{j-1}^{n+1} + \frac{D_j - A_j F_j}{A_j E_j + B_j}. \tag{28}$$

Comparînd formula (28) cu relația de definiție (27) obținem:

$$E_{j-1}^* = \frac{-C_j}{A_j E_j + B_j},$$

$$F_{j-1}^* = \frac{D_j - A_j F_j}{A_j E_j + B_j}; \tag{29}$$

Analog, formula (24) este echivalentă cu următoarele relații:

$$E_{j-1} = \frac{-C_j^*}{A_j^* E_j^* + B_j^*},$$

$$F_{j-1} = \frac{D_j^* - A_j^* F_j^*}{A_j^* E_j^* + B_j^*}. \tag{30}$$

Pentru a clarifica modul de folosire a metodei dublului parcurs, să presupunem pentru moment că se dă o latură cu punctele de rețea numerotate de la 1 la jj, primul punct fiind de tip h, iar ultimul de tip Q (jj este par). Să admitem că în punctul jj se cunoaște debitul Q la momentul $(n+1)\Delta t$ și că pentru momentul anterior de timp $n\Delta t$ se cunosc valorile lui h și Q în nodurile rețelei unidimensionale. În nodul jj putem scrie conform formulei (26):

$$Q_{jj}^{n+1} = E_{jj-1} h_{jj-1}^{n+1} + F_{jj-1}. \tag{31}$$

Relația (31) poate fi satisfăcută identic prin condițiile:

$$E_{jj-1} = 0; \quad F_{jj-1} = Q_{jj}^{n+1}. \tag{32}$$

Putem considera formulele (32) drept condiții la limită pentru determinarea mărimilor E, F (definite în puncte de tip h) și a mărimilor E^*, F^* (definite în puncte de tip Q). Astfel, folosind formulele (29), putem determina mărimile E^*_{jj-2}, F^*_{jj-2}, apoi, cu ajutorul formulelor (30) determinăm mărimile E_{jj-3}, F_{jj-3} etc. În acest mod se pot calcula mărimile E, F, E^*, F^* în toate punctele de rețea ale laturii considerate (primul parcurs). Al doilea parcurs corespunde calculului mărimilor h și Q în nodurile rețelei. Să presupunem că în punctul 1 se cunoaște valoarea adîncimii h pentru momentul de timp $(n+1)\Delta t$.

Din formulele (26) și (27) obținem :

$$Q_2^{n+1} = E_1 h_1^{n+1} + F_1,$$

$$h_3^{n+1} = E_2^* Q_2^{n+1} + F_2^*$$

și prin aplicare succesivă se calculează h și Q în toate punctele pînă la nodul $jj-1$ în care relația (31) este identic satisfăcută.

Deoarece coeficienții A, B, C, A^*, B^*, C^* conțin expresii care sînt definite la momentul de timp intermediar $\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ se aplică un procedeu de aproximații succesive. În primă aproximație se folosesc valorile mărimilor la momentul de timp $n\,\Delta t$ și se obțin valorile lor la momentul $(n+1)\,\Delta t$. Se reia apoi calculul, admițînd ca valoare la momentul $\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ media pentru cele două momente de timp extreme. Procedeul se poate repeta, dar practica de cacul a dovedit că sînt suficiente doar două iterații.

7. CONDIȚIILE FIZICE ÎN JONCȚIUNE

Pentru comoditatea raționamentului, vom considera o joncțiune formată din m puncte confundate, fiecare aparținînd cîte uneia din cele m laturi care se unesc în nodul dat. Vom restrînge studiul la considerarea cazului $m=3$ (figura 4) și vom admite că toate cele trei puncte sînt de tip h.

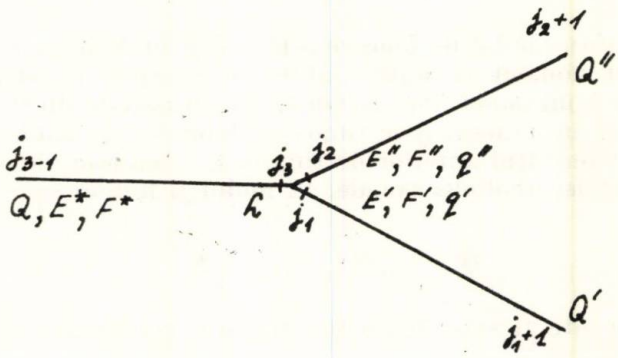


Fig. 4

Condiția fizică în joncțiune o constituie egalitatea nivelelor, corespunzînd continuității suprafeței libere. Dacă admitem continuitatea fundului albiei în cele trei ramificații putem scrie :

$$h_{j1} = h_{j2} = h_{j3} = h, \tag{33}$$

$$Q_{j1} + Q_{j2} = Q_{j3}. \tag{34}$$

Condiția (34) este expresia relației de continuitate ; observăm că am obținut această relație simplă deoarece cele trei noduri se consideră confundate (fără posibilitatea unei stocări de lichid datorită variației nivelului în timp).

Putem scrie următoarele relații în diferențe finite :

$$Q_{j3}^{(0)} = Q_{j3-1}^{(0)} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^{(0)} \cdot \Delta x = Q_{j3-1}^{(0)} - \left(b_s^{(0)} \frac{\partial h}{\partial t} - q^{(0)}\right) \Delta x,$$

unde am folosit prima dintre formulele (1). Această formulă se mai poate scrie aproximativ :

$$Q_{j3}^{(0)} = Q_{j3-1}^{(0)} - b_s^{(0)}(h^{n+1} - h^n) \frac{\Delta x}{\Delta t} + q^{(0)} \Delta x,$$

astfel că, folosind notațiile din figura 4, formula (34) devine :

$$(Q' + Q'' - Q)^{(0)} = -(\Sigma b_s)^{(0)} \frac{\Delta x}{\Delta t}(h^{n+1} - h^n) + (\Sigma q)^{(0)} \cdot \Delta x. \tag{35}$$

Putem scrie aproximativ :

$$Q^{(0)} = \frac{Q^{n+1} + Q^n}{2};$$

formula (35) se transcrie astfel :

$$(Q' + Q'' - Q)^{n+1} = (Q - Q' - Q'')^n - 2(\Sigma b_s)^{(0)} \frac{\Delta x}{\Delta t}(h^{n+1} - h^n) +$$

$$+ 2(\Sigma q)^{(0)} \cdot \Delta x. \tag{36}$$

Vom folosi în continuare formulele de trecere (26) și (27) și notațiile din figura 4 :

$$\begin{aligned} h^{n+1} &= E^* Q^{n+1} + F^*, \\ Q'^{n+1} &= E' h^{n+1} + F', \\ Q''^{n+1} &= E'' h^{n+1} + F''. \end{aligned} \tag{37}$$

Dacă substituim formulele (37) în relaţiile (36) obţinem :

$$\left(E'' + E' - \frac{1}{E^*}\right)h^{n+1} + \left(F'' + F' + \frac{F^*}{E^*}\right) = (Q - Q' - Q'') -$$

$$-2\,(\Sigma b_s)^{(0)}\,\frac{\Delta x}{\Delta t}\,(h^{n+1} - h^n) + 2(\Sigma q)^{(0)}\Delta x. \tag{38}$$

Deoarece h^{n+1} este necunoscut în primul parcurs şi presupunem că vrem să aflăm pe E^*, F^* cunoscînd pe E', F', E'', F'', vom considera relaţia (38) ca o identitate relativ la h^{n+1}, astfel că vom obţine condiţiile de trecere căutate :

$$\frac{1}{E^*} = E' + E'' + 2(\Sigma b_s)^{(0)}\,\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$\frac{F^*}{F^*} = -F' - F'' + (Q - Q' - Q'') + \tag{39}$$

$$+ 2(\Sigma b_s)^{(0)}.h^n\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + 2(\Sigma q_s)^{(0)}.\Delta x.$$

Dacă una din ramuri nu există, de exemplu dacă

$$E'' = F'' = b_s'' = q'' = Q'' = 0,$$

formulele (39) se transformă în formulele (30).

Observăm că nu putem calcula pe E_{j3} şi F_{j3} deoarece dacă am încerca să folosim formulele (30) între nodurile $(j3)$ şi $(j3-1)$ nu am putea determina pe D_j care conţine debitul nedefinit Q^n_{j3+1}. Se poate calcula însă h^{n+1}_{j3} în al doilea parcurs deoarece

$$h^{n+1}_{j3} = E^*.Q^{n+1} + F^* \tag{40}$$

şi procesul iterativ se poate continua prin joncţiune folosind relaţia (33).

8. INTRODUCEREA FUNCŢIEI Z

Pentru simplificarea algoritmului de calcul este comod să nu se facă o distincţie continuă între punctele de tip h şi cele de tip Q, deşi schemele de calcul în primul parcurs exprimate prin formulele(29), respectiv (30) sînt diferite. Pentru aceasta introducem mărimea variabilă Z care ia valori în toate nodurile reţelei conform formulei

$$Z = \begin{cases} h \\ Q \end{cases}, \tag{41}$$

unde linia superioară corespunde punctelor de tip h, iar cea inferioară punctelor de tip Q.

Introducem totodată funcțiile ajutătoare α, β, γ, δ, E și F cu ajutorul relațiilor :

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} (A, B, C, D), \\ (A^*, B^*, C^*, D^*), \end{cases}$$
$$(E, F) = \begin{cases} (E, F), \\ (E^*, F^*). \end{cases} \tag{42}$$

Formulele de calcul pentru primul parcurs se scriu :

$$E_{j-1} = \frac{-\gamma_j}{\beta_j + \alpha_j E_j}, \tag{43}$$

$$F_{j-1} = \frac{\delta_j - \alpha_j F_j}{\beta_j + \alpha_j E_j}, \tag{44}$$

iar pentru cel de-al doilea parcurs obținem

$$Z_{j+1}^{n+1} = E_j Z_j^{n+1} + F_j. \tag{45}$$

9. PANTA ȘI INFILTRAȚIILE LA CANALELE DE IRIGAȚIE

S-a admis pentru calcul un sistem de irigații cu panta fundului egală în toate ramurile și egală cu $i = 5 \cdot 10^{-5}$. Punctul de alimentare este situat la cota cea mai înaltă. Se poate admite, în general, că pierderile prin infiltrații sînt proporționale cu aria udată, coeficientul de proporționalitate variind în funcție de situația concretă considerată. S-a admis în calcul următoarea valoare [7] :

$$\left| \frac{dQ_{inf}}{dAu} \right| \simeq 0{,}1 \left(\frac{m^3}{m^2 . zi} \right). \tag{46}$$

Pentru un metru de lungime a canalului se obține

$$|q| = \left| \frac{d\,Q_{inf}}{dL} \right| = \frac{0{,}1}{24} \cdot P \left(\frac{m^2}{oră} \right). \tag{47}$$

În formula (47) L este lungimea considerată a canalului, iar P reprezintă perimetrul udat.

Pentru simplificare admitem că $|q|$ este proporțional cu adîncimea h a apei în canal. Constanta de proporționalitate, RATE, se va determina

aproximativ din condiția ca pentru $h = 5$ m. $B = 10$ m și $\alpha = 30°$ să obținem $|q| = 0{,}1 \frac{m^2}{oră}$ adică $RATE \simeq 0{,}02 \frac{m}{oră}$.

În cazul considerat putem scrie :

$$q = - RATE.h \tag{48}$$

deoarece q iese din canal.

10. CONDIȚIILE INIȚIALE

Vom presupune că sistemul se află inițial într-un regim de curgere permanentă, gradual-variată, datorită condițiilor la limită staționare în timp. În cazul particular, în care toate debitele cerute de la sistem sînt nule, se poate admite cu o bună aproximație (neglijînd pierderile prin infiltrații) că nivelul inițial este orizontal.

Observăm că este posibil să se ia în considerare în cadrul algoritmului de calcul situația în care se blochează curgerea într-o secțiune oarecare a sistemului de irigație. Pentru aceasta, într-un nod de rețea de tip Q marcat prin Jo vom impune condițiile :

$$E(Jo - 1) = 0, \; F(Jo - 1) = 0,$$

care corespund condiției fizice :

$$Q(Jo) = 0.$$

Dacă se dă lui Jo o valoare mai mare decît cel mai mare număt de ordine al nodurilor din sistem, atunci calculatorul electronic va interpreta această situație drept absență a vreunei obturări de secțiune.

11. CONDIȚIILE LA LIMITĂ

Vom presupune că sistemul de irigație are un punct de alimentare (rîu, bazin de alimentare etc.) și cîteva puncte de livrare a debitului în funcție de necesitățile irigației. În fiecare punct de joncțiune, conform figurii 4, distingem punctul de intrare j_3 de celelalte două j_1 și j_2.

Admitem că graficul de variație a debitului în timp în toate punctele de livrare este cunoscut (pentru simplificarea introducerii datelor am studiat cazul cînd avem același grafic de livrare în toate punctele terminale). Legea de variație se obține prin interpolare liniară între punctele date

Q_i (t_i). În punctul de alimentare vom admite că nivelul rămîne practic constant, independent de variațiile debitelor de alimentare în sistem. Pentru exemplul studiat $h_0 = 5$ m, iar legea de variație a debitului este indicată în figura 5.

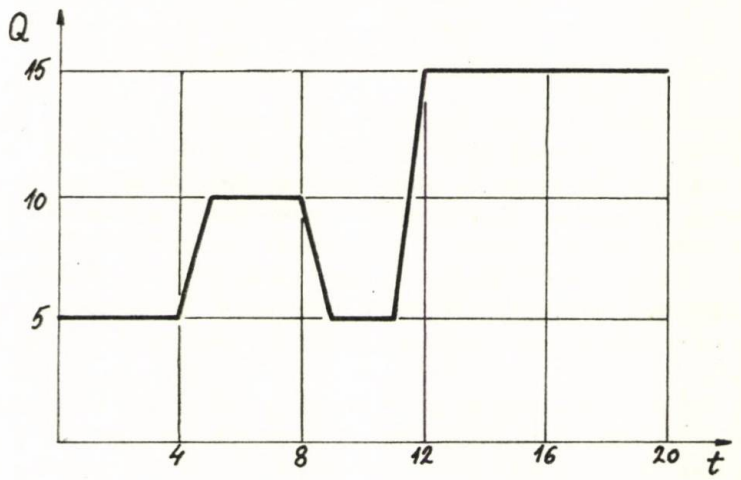


Fig. 5

12. STUDIUL REGIMULUI PERMANENT DE CURGERE

Dacă toate mărimile hidrodinamice nu depind de timp ecuațiile (1), se scriu :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{Q^2}{A}\right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{gQ|Q|}{C^2 A R} - q|V|\cos\varphi = 0. \tag{49}$$

Vom folosi o schemă cu diferențe finite care utilizează aceeași rețea ca și în cazul mișcării nepermanente pentru a transpune mai ușor condițiile inițiale ale regimului de curgere nestaționar. Dacă adoptăm aceleași ipoteze ca și pentru obținerea ecuațiilor cu diferențe finite (21) și (22) putem scrie :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{j+1} - Q_{j-1}}{\Delta x}\right) - q_j = 0, \tag{50}$$

$$\frac{1}{2} L_j \left(\frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{\Delta x}\right) + \frac{gQ_j|Q_j|}{C^2 A_j R_j} + \frac{2q_j}{A_j} - gA_j \cdot i = 0. \tag{51}$$

Din formulele (50) și (51) se obțin următoarele relații de iterație :

$$Q_{j-1} = Q_{j+1} - 2q_j\Delta x, \tag{52}$$

$$h_{j+1} = h_{j-1} + \frac{2\Delta x}{L_j}\left(gA_j i - \frac{2q_j}{A_j} - \frac{gQ_j|Q_j|}{C^2A_jR_j}\right). \tag{53}$$

Dacă s-ar cunoaște debitul de infiltrație q_j în toate nodurile rețelei s-ar putea obține din formula (52) debitele Q_j în toate punctele de tip Q, folosind condițiile la limită în punctele terminale ale sistemului (debitele de livrare) și utilizînd continuitatea debitelor pentru punctele de joncțiune. Apoi s-ar putea folosi ecuația (53) și condiția la limită în punctul de alimentare (adîncime dată) pentru a determina într-un al doilea parcurs valorile adîncimii de curgere în punctele de tip h. Dificultatea constă însă în faptul că q depinde de h conform formulei (48), deci nu este cunoscut la început.

S-a folosit o metodă de aproximație presupunînd inițial că nivelul în sistem este orizontal și s-a obținut o primă estimare a valorilor q_j. Apoi s-a repetat procedeul de iterare cu dublu parcurs pînă ce diferența relativă între noile și vechile valori ale lui Q_j și h_j în toate nodurile rețelei este mai mică decît 0,005 în valoare absolută. Procedeul este rapid convergent, astfel că 5 iterații sînt suficiente.

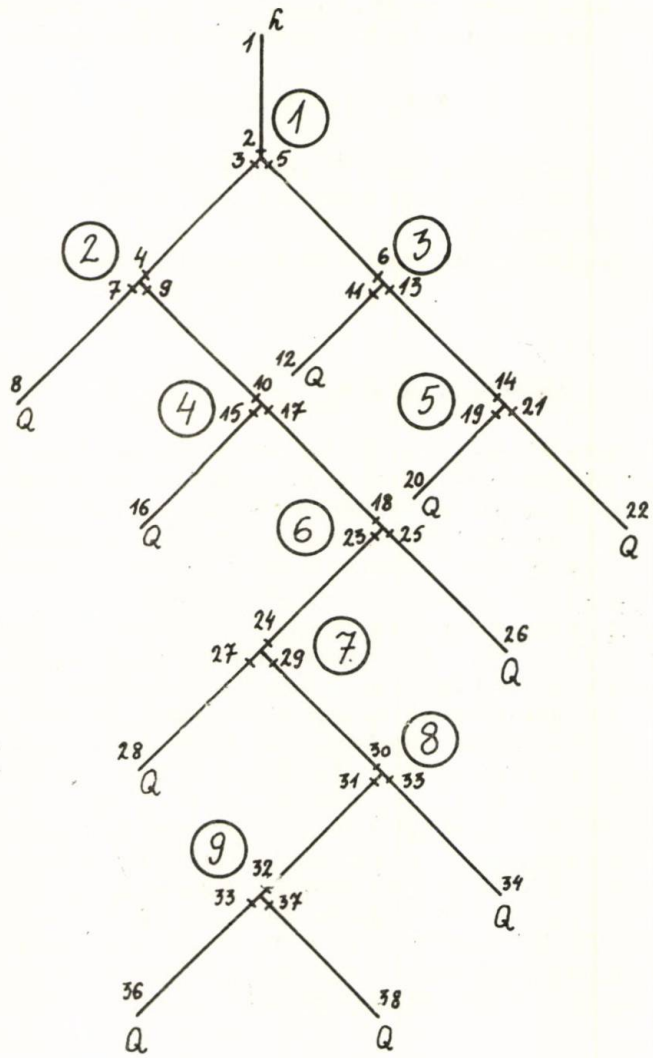
13. NOTAȚII

Vom considera sisteme de irigații de tipul celor reprezentate în figura 6, caracterizate printr-un punct de intrare și cîteva puncte de livrare a debitului. Pentru simplificarea introducerii datelor s-a admis aceeași secțiune transversală (lățimea fundului, panta laterală) a canalului în toate ramurile sistemului.

Convenim ca fiecare ramură să aparțină unui anumit rang S. Ramura de alimentare are întotdeauna rangul 1 și se ramifică în două ramuri de rang 2, etc. Rangul ramurilor sistemului variază de la 1 la SS (rangul maxim).

Punctele nodale ale relației au numărul de ordine J care ia valori de la $J = 1$ (punctul de alimentare) pînă la JJ (numărul de noduri ale sistemului). Numerotarea se face în sensul creșterii rangului, ținînd seamă că în fiecare punct de joncțiune avem trei puncte nodale confundate. Se parcurg succesiv nodurile laturilor aparținînd unui rang dat de la stînga spre dreapta (figura 6). Această numerotare este intrinsecă, fiind efectuată de către computer dacă se introduce șirul numerelor de puncte nodale pe fiecare ramură NGRID (L). Laturile cu puncte terminale au un număr impar de puncte nodale (fără a socoti punctul de joncțiune),

prima latură (fără punctul de alimentare) și laturile intermediare (fără punctul de joncțiune dinspre rangul mai scăzut) au un număr par de puncte nodale, deoarece joncțiunea o considerăm întotdeauna un punct de tip



NLAT	S
1	1
2	2
4	3
4	4
2	5
2	6
2	7
2	8

Fig. 6

h. *L* marchează numărul de ordine al laturii obținut după aceleași reguli ca la marcarea lui *J* (pe ranguri și de la stînga la dreapta); *L* variază între 1 și *LL* (numărul total de ramuri ale sistemului).

Punctele speciale (de joncţiune şi terminale) sînt marcate prin numărul de ordine M, iar punctele de joncţiune au numărul de ordine K.

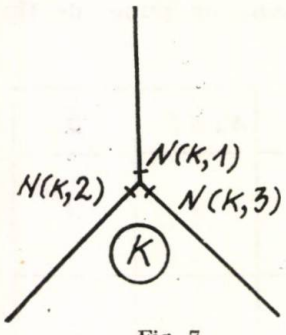


Fig. 7

Punctele de joncţiune, de fapt trei puncte confundate, se caracterizează prin matricea $N(K, W)$ conform figurii 7. Pe fiecare linie se trec valorile lui M corespunzătoare punctului de joncţiune dat. De fapt, deoarece are loc condiţia :

$$N(K, 3) = N(K, 2) + 2$$

evidentă din figura 6, rezultă că este suficient să se indice doar două din cele 3 coloane ale matricei N.

Numărul de laturi pentru fiecare rang S al sistemului este indicat prin şirul NLAT (S).

14. ANSAMBLUL DE DATE

Criteriul de optimizare al programului l-a constituit condiţia ca numărul de date necesar realizării calculului să fie minim. O mare parte dintre operaţiile legate de numerotarea punctelor reţelei sînt efectuate de către computer. Aceasta sporeşte elasticitatea programării permiţînd studierea rapidă a celor mai diverse situaţii. Pentru ilustrare indicăm ansamblul de date necesar pentru sistemul de irigaţii din figura 6 :

$SS = 8$, $TT = 20$ h (timpul total de studiu), DELTAT $= 1$ h, DELTAX $= 200$ m, $C = 40$ $m^{1/2}/s$, $B = 10$ m, CTG $= 1{,}75$ (panta laterală a secţiunii transversale), RATE $= 0{,}02$, SLOPE $= 0{,}00005$ (panta longitudinală), $LL = 19$ (numărul de laturi), $JO = 1000$, NLAT $=$ $= 1, 2, 4, 4, 2, 2, 2, 2$ (distribuţia numărului de laturi pe ranguri), $N\ (K, W) = (2, 3), (4, 7), (6, 11), (10, 15), (14, 19), (18, 23), (24, 27), (30, 31), (32, 35)$, NGRID $= 6, (6, 6,), (5, 6, 5, 6), (5, 6, 5, 5), (6, 5), (5, 6), (6, 5), (5, 5)$, ZOLD $(1) = 5$ m (adîncimea la punctul de alimentare), $AR = 9$ (numărul de puncte de interpolare în condiţiile la limită pentru punctele terminale), XX $= 10$ (numărul de puncte terminale), FINIT $= 5, 5, 5, 10, 10, 5, 5, 15, 15$ (valorile debitului de livrare în punctele de interpolare), TINIT $= 0, 2, 4, 5, 8, 9, 11, 12$ (momentele de timp în nodurile de interpolare, ultima valoare, TT, este introdusă automat), X $= 8, 12, 16, 20, 22, 26, 28, 34, 36, 38$ (valorile lui M în punctele terminale).

15. PROGRAMUL DE CALCUL

Pentru obţinerea rezultatelor s-a elaborat un program de calcul în limbajul de programare PL/1 care prezintă avantaje deosebite în privinţa folosirii economice a memoriei calculatorului electronic şi a simplităţii

instrucțiunilor de intrare și ieșire. O formă simplificată a organigramei de calcul este indicată în cele ce urmează pentru regimul de curgere nepermanent :

```
      DECLARE (SS, LL)
      GET LIST (SS, LL)
      BEGIN
      DECLARE NLAT
      GET LIST (NLAT)
      BEGIN
      DECLARE (N, NGRID)
      GET LIST (N, NGRID)
      BEGIN
      DECLARE (ZOLD, ZNEW)
      PROCEDURI
       T = 0
LSTART : CONDIȚII INIȚIALE
CONDIȚII LA LIMITA TERMINALE
    IT = 1
LAGAIN : PRIMUL PARCURS
    CONDIȚIILE LA LIMITA DE INTRARE
    AL DOILEA PARCURS
    IF IT = 2 GOTO LABEL 1
       IT = IT + 1
    ZITR = 0,5 (ZOLD + ZNEW)
    GOTO LAGAIN
LABEL1 : PRINT
   IF T> TT GOTO LREADY
     T = T + DELTAT
      ZOLD = ZNEW
     GOTO LSTART
LREADY : END
       DATELE
```

Iterația indicată prin IT servește la determinarea mărimilor cu indice (0) în formulele (21) și (22). S-au folosit blocuri proceduri pentru calculele din primul parcurs, alocîndu-se punctelor de tip Q indicele 0 și celor de tip h indicele 1. De asemenea s-a folosit o procedură pentru condițiile de trecere (39). Folosirea instrucțiunii BEGIN a permis o utilizare economică a memoriei calculatorului electronic, factor esențial în studiul rețelelor complexe. În cadrul ipotezelor admise, orice schemă de irigație se poate trata cu acest program, modificînd corespunzător numărul de date indicat la punctul 14.

16. REZULTATE NUMERICE

Pentru ilustrare vom prezenta mai jos rezultatele calculului cu datele indicate la punctul 14 pentru ramura 9, rang 4 (figura 6) dacă debitul în punctele terminale variază în timp după graficul din figura 5.

Pentru ramura 9, M ia valorile 17 și 18 în punctele extreme, iar J variază de la 54 la 60. Deoarece ramura nu conține puncte terminale, nodurile extreme vor fi de tip h (puncte de joncțiune).

Timp	Nivel (54)	Debit (55)	Nivel (56)	Debit (57)	Nivel (58)	Debit (59)	Nivel (60)
0	5.08431	25.20908	5.10024	25.19775	5.11623	25.18639	5.13227
1	5.08367	25.24023	5.09959	25.23267	5.11556	25.22559	5.13157
2	5.08365	25.30542	5.09955	25.29053	5.11550	25.27515	5.13151
3	5.08369	25.27905	5.09961	25.27075	5.11558	25.26294	5.13160
4	5.08373	25.27539	5.09964	25.26074	5.11560	25.24561	5.13162
5	4.88148	37.21802	4.88882	38.49829	4.89542	39.83838	4.90127
6	4.79290	48.78101	4.79374	48.04858	4.79534	47.28687	4.79777
7	4.77389	46.80933	4.77608	47.62549	4.77707	48.47461	4.77679
8	4.74840	50.29956	4.74589	49.64087	4.74476	48.96191	4.74514
9	4.99400	44.81836	5.00519	43.89624	5.01641	42.91919	5.02752
10	5.10304	26.32910	5.12118	26.51416	5.13944	26.70947	5.15751
11	5.08374	20.71143	5.09991	20.63525	5.11608	20.56201	5.13215
12	4.68083	52.45947	4.67841	55.05737	4.67453	57.77563	4.66923
13	4.40917	54.99023	4.39063	54.02808	4.37203	53.02832	4.35335
14	4.27980	63.54501	4.25026	65.27188	4.21715	67.11426	4.18017
15	4.15707	64.99504	4.11210	64.00612	4.06601	62.96852	4.01864
16	4.06394	66.21901	4.01690	67.70255	3.96317	69.27208	3.90181
17	4.01208	69.20692	3.94750	68.07487	3.88065	66.92296	3.8111
18	3.94385	68.28749	3.88340	69.73987	3.81262	71.22945	3.72952
19	3.90581	70.70120	3.82673	69.52747	3.74423	68.37399	3.65746
20	3.87637	70.32277	3.80518	71.59140	3.72042	72.85054	3.61884

BIBLIOGRAFIE

1. V. Blidaru, *Irigații și desecări*, EDP, București (1969).
2. F. M. Henderson, *Open Channel Flow*, Mc Millan, New York (1966).
3. M. Abbot, A. Verwey, *Some Aspects of the Design System „SIVA"*, XV-th Congress of the IAHR, Istanbul, Vol. 5. 1973.
4. F. Engelund, *Flow Resistance and Hydraulic Radius*. Copenhagen, Acta Polytechnica Scandinavica (1964).
5. R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*, Interscience Publ. Inc., New York (1967).
6. M. B. Abbot, F. Ionescu, *On the Numerical Computation of Nearly Horizontal Flows*, Journal of Hydraulic Research, **5**, *2*, (1967).
7. C. V. Davis (ed.), *Handbook of Applied Hydraulics*, Mc Graw Hill Book Co., New York (1969).

METODĂ DE CONSTRUIRE A PROFILULUI GENERAL AL VITEZEI MEDII A CURGERII TURBULENTE ÎN APROPIEREA UNUI PERETE RIGID

de V. PANAITESCU

Institutul politehnic București

Se propune o metodă de construire a profilului general al vitezei medii a curgerii turbulente în apropierea unui perete rigid prin considerarea domeniului de tranziție de la mișcarea laminară din substratul laminar la mișcarea turbulentă din stratul deplin turbulent pe baza utilizării principiului superpoziției efectelor viscozității moleculare și viscozității turbulente. Se obține pentru distribuția vitezelor medii o funcție continuă și netedă pe tot domeniul de definiție, deci pentru orice distanță de la perete, în concordanță cu datele experimentale.

1. INTRODUCERE

Cele mai multe dintre mișcările fluidelor, importante din punctul de vedere al aplicațiilor practice, sînt mișcările turbulente. Un caz de mișcare turbulentă al cărui studiu prezintă o mare importanță teoretică și practică îl constituie curgerea turbulentă în stratul de lîngă peretele plan. Chiar și în acest caz simplu lipsește o descriere generală a profilului vitezei în tot cîmpul curgerii. Se deosebesc trei domenii de curgere și anume substratul (filmul) laminar, domeniul de tranziție și domeniul deplin turbulent. Rezultate în concordanță cu datele experimentale se obțin pentru profilul de viteze în substratul laminar prin aplicarea teoriei curgerii laminare și pentru profilul de viteze în domeniul deplin turbulent prin aplicarea teoriilor semiempirice (de exemplu teoria Prandtl-Kármán). Problema obținerii unui profil al vitezei medii în domeniul de tranziție care să corespundă datelor experimentale și care să se racordeze neted cu profilul vitezei medii din substratul laminar și cu profilul vitezei medii din domeniul deplin turbulent este o problemă care este încă departe de a putea fi considerată rezolvată.

Determinarea formei profilului vitezei medii a curgerii turbulente din apropierea peretelui rigid are importanță teoretică fundamentală. Pe de altă parte rezolvarea unor probleme de hidrodinamică de mare actualitate, ca de exemplu calculul transmisiei termice turbulente, cal-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 4, 1974, P. 679–694

culul transferului de masă, unele probleme de meteorologie şi oceanologie etc., reclamă cunoaşterea unor formule analitice care să descrie variaţia profilului vitezei medii pentru toate valorile distanţei de la perete.

În această lucrare se propune o metodă efectivă de construire a profilului general al vitezei medii a curgerii turbulente în apropierea unui perete.

2. STABILIREA ECUAŢIILOR PROBLEMEI

Ecuaţiile generale ale mişcării turbulente ale unui fluid au fost stabilite de O. Reynolds [1] şi se pot scrie sub forma

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} = \overline{X}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \overline{u' \; u'_k} \right), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Se examinează mişcarea turbulentă staţionară plan-paralelă a unui fluid care curge în lungul axei Ox în semispaţiul $z > 0$ în ipoteza absenţei unui gradient al presiunii medii. În acest caz prima ecuaţie a lui Reynolds are forma

$$\nu \frac{\mathrm{d}^2 \overline{u}}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \overline{u'w'} = 0. \tag{2}$$

Se integrează această ecuaţie şi se obţine

$$\mu \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z} - \rho \, \overline{u'w'} = \tau_0, \tag{3}$$

în care $\mu = \rho\nu$ este coeficientul dinamic de viscozitate, iar τ_0 este tensiunea de frecare la perete.

Din consideraţii de analiză dimensională se poate deduce forma posibilă a funcţiei $\overline{u}(z)$. Astfel, dacă se introduce mărimea

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \tag{4}$$

numită de obicei „viteza dinamică" sau „viteza de frecare", dependenţa profilului vitezei medii $\overline{u}(z)$ de z, τ_0, ρ şi ν poate fi scrisă sub forma generală

$$\overline{u}(z) = u_* f\left(\frac{z u_*}{\nu} \right) \tag{5}$$

sau, sub formă adimensională,

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = f(\zeta), \text{ unde } \zeta = \frac{z u_*}{\nu}, \tag{5'}$$

în care ζ reprezintă distanța de la perete exprimată adimensional, iar $f(\zeta)$ este o funcție oarecare universală de o variabilă. Rezultatul foarte important (5) sau (5′) este numit în literatură „legea universală a turbulenței în apropierea unui perete rigid" și a fost dedus pentru prima oară de L. Prandtl, [2].

3. PREZENTAREA ȘI ANALIZA DATELOR DIN LITERATURĂ CU PRIVIRE LA FORMA PROFILULUI VITEZEI MEDII A CURGERII TURBULENTE ÎN APROPIEREA UNEI PERETE RIGID NETED

Forma funcției $f(\zeta)$ care intervine în legea universală (5′) poate fi determinată explicit pentru două cazuri limită: pentru valori mici și pentru valori mari ale argumentului ζ.

Primul caz limită se referă la stratul de fluid din imediata vecinătate a peretului numit „substratul laminar", în care rolul principal îl joacă faptul că tensiunile lui Reynolds $-\rho\overline{u'w'}$ sînt mult mai mici decît tensiunile vîscoase de frecare $\mu \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z}$. În limitele acestui substrat se poate socoti că $\mu \dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z} = \tau_0 = \text{const.}$ și prin urmare

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*^2}{\nu} z, \qquad \frac{\overline{u}}{u_*} = f(\zeta) = \zeta. \tag{6}$$

Grosimea substratului laminar este dată de formula $d_s = \alpha_s \dfrac{\nu}{u_*} = \alpha_s z_s$. În conformitate cu datele experimentale obținute de numeroși cercetători, constanta $\alpha_s = 5 \div 8$. Se admite deocamdată $\alpha_s = 5$, de exemplu conform indicațiilor date de A. S. Monin și A. H. Iaglom, [3].

Cel de-al doilea caz limită se referă la valorile lui z care depășesc mult valoarea $z_* = \dfrac{\nu}{u_*}$. Deoarece în curentul turbulent deplin, departe de pereții solizi, tensiunile turbulente sînt cu mult mai mari decît tensiunile vîscoase, rezultă că pentru valorile lui z suficient de mari, $z > d_1$, în ecuația (3) se poate neglija termenul $\mu \dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z}$ și se poate considera că $\tau_0 = -\rho\overline{u'w'}$. De aici se obține, pentru $z > d_1$ următoarea formulă logaritmică pentru profilul vitezelor

$$\overline{u}(z) = A u_* \ln z + A_1. \tag{7}$$

Pentru determinarea înălțimii frontierei inferioare a stratului limită logaritmic, $d_1 = \alpha_1 \dfrac{\nu}{u_*}$ se poate considera $\alpha_1 = 30$, potrivit datelor experimentale. Formula (7) a fost dedusă pentru prima oară, independent, de Th. von Kármán [4] și L. Prandtl [5]. Din compararea formulelor

(5) și (7) rezultă că mărimea A_1 trebuie prezentată sub forma $A_1 = Au_* \ln \frac{u_*}{\nu} + Bu_*$; cu aceasta, formula (7) devine

$$\overline{u}(z) = u_* \left(A \ln \frac{zu_*}{\nu} + B \right) \text{ pentru } z > d_1 = \alpha_1 \frac{\nu}{u_*}, \tag{8}$$

din care se deduce

$$\frac{\overline{u}(z)}{u_*} = f(\zeta) = A \ln \zeta + B \text{ pentru } \zeta > \alpha_1. \tag{9}$$

În mod tradițional în locul coeficientului A se folosește de cele mai multe ori mărimea $\varkappa = \frac{1}{A}$, numită constanta lui Kármán. Valorile numerice ale constantelor A (sau $\varkappa$) și B se determină pe baza datelor experimentale. Un mare număr de date experimentale au fost strînse și centralizate în figura 1, reprodusă din lucrarea lui J. Kestin și P. D. Richardson, [6]. Alături de punctele corespunzătoare experimentelor au fost trasate curba, notată cu *a*), $\frac{\overline{u}}{u_*} = \zeta$, corespunzătoare formulei (6) și curba, notată cu b), $\frac{\overline{u}}{u_*} = 2{,}5 \ln \zeta + 5{,}1$, corespunzătoare formulei (9) în care s-au admis pentru constantele A și B valorile $A = 2{,}5$ și $B = 5{,}1$ în conformitate cu D. Coles [7] (și care repreziată mediile diferitelor valori atribuite constantelor A și B de diferiții cercetători). Curbele *a*) și *b*) se intersectează într-un punct C, situat la distanța $d_s = d_1 = d_c = 11{,}1 \frac{\nu}{u_*}$.

Se constată că pentru valori mici ale distanței z de la peretele solid, $z < 5 \frac{\nu}{u_*}$, valorile experimentale $\frac{\overline{u}}{u_*}$ se plasează bine în jurul curbei teoretice a). De asemenea, se constată că pentru valori mari ale distanței z și anume pentru $30 \frac{\nu}{u_*} < z < 500 \frac{\nu}{u_*}$ există o bună concordanță între valorile $\frac{\overline{u}}{u_*}$ rezultate din experiențe și curba teoretică b). Pentru valorile foarte mari ale distanței de la perete, $z > 500 \frac{\nu}{u_*}$ se remarcă o deviere a rezultatelor experimentale față de curba teoretică, în sensul că vitezele obținute prin măsurători sînt în general mai mari decît cele care corespund repartiției teoretice. În domeniul intermediar $5 \frac{\nu}{u_*} < z < 30 \frac{\nu}{u_*}$ valorile experimentale $\frac{\overline{u}}{u_*}$ se abat evident de la valorile corespunzătoare curbelor teoretice.

În problemele hidrodinamice în care nu se cere o precizie prea mare se poate face ipoteza că profilul vitezei medii este dat de legea liniară (6)

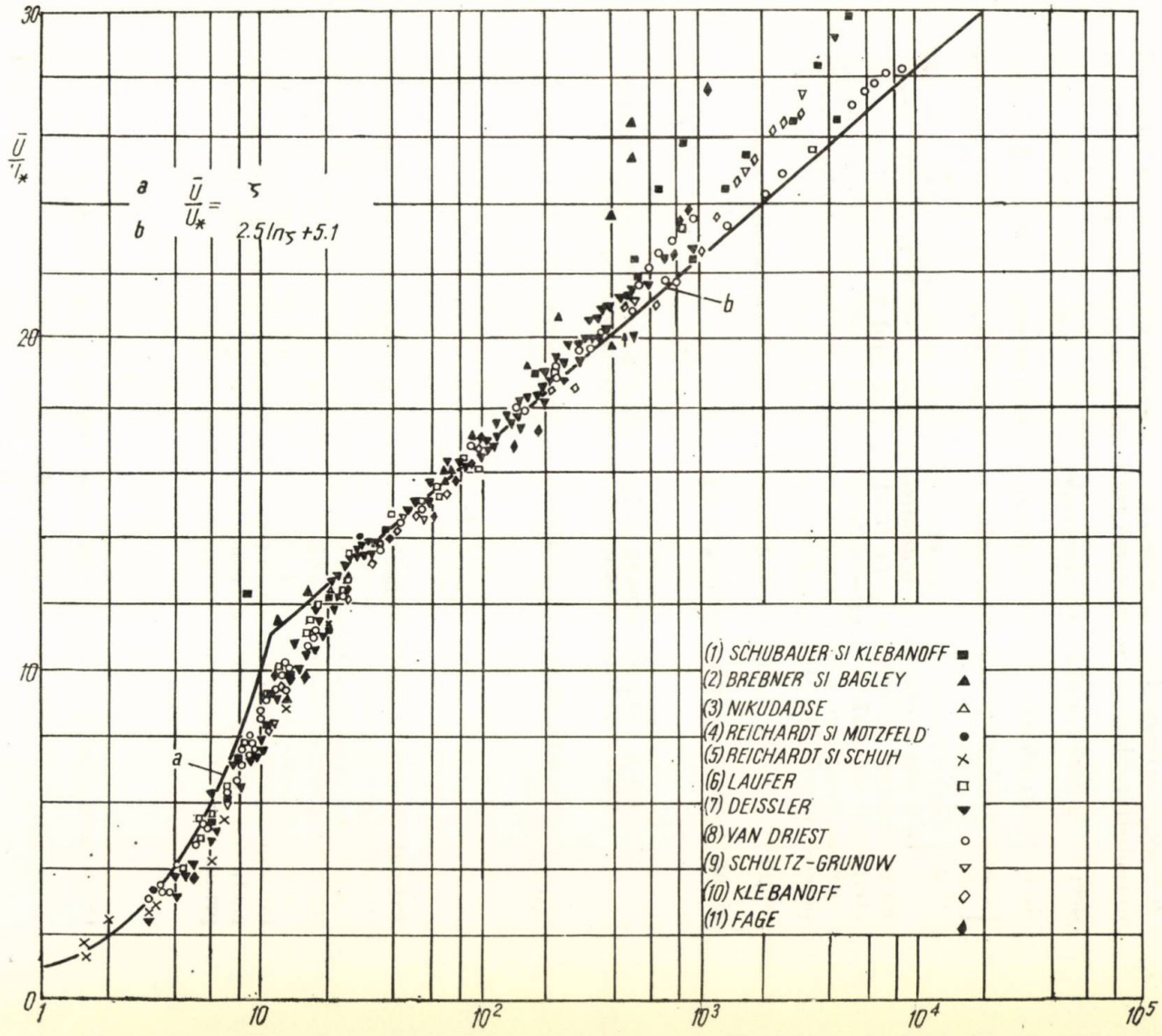


Fig. 1. — Profilul universal al vitezei medii după D. Coles (curbele *a*) şi *b*) în comparaţie cu rezultatele experimentale ale lui Schubauer şi Klebanoff (■), Brebner şi Bagley (▲), Nikuradse (△), Reichardt şi Motzfeld (●), Reichardt şi Schuh (×) Laufer (□), Deissler (▼), Van Driest (○), Schultz şi Grunow (▽), Klebanoff (◇), Fage (◆); (reproducere după J. Kestin şi P. D. Richardson, [6])

pentru distanțele $z < d_c = 11{,}1 \frac{\nu}{u_*}$ și de legea logaritmică (9) pentru $z > d_c$. În acest caz, punctul C de racordare al celor două legi de reprezentare a profilului $\frac{\overline{u}}{u_*}$ este un punct unghiular. Această ipoteză constă în neglijarea domeniului intermediar de tranziție de la mișcarea laminară din substratul laminar la mișcarea turbulentă din stratul deplin turbulent, deci în neglijarea zonei în care tensiunile $\mu \frac{d\overline{u}}{dz}$ și $-\rho \overline{u'w'}$ au același ordin de mărime; cu alte cuvinte se admite că imediat după substratul laminar $\left(\text{a cărui grosime trebuie considerată acum egală cu } d_c = 11{,}1 \frac{\nu}{u_*}\right)$ urmează stratul deplin turbulent. Este clar că această aproximație este grosieră.

În multe probleme de hidrodinamică (de exemplu la calculul transmisiei termice turbulente prin fluide, la calculul transferului de masă etc.) este necesară cunoașterea unor formule analitice care să descrie variația profilului vitezei medii pentru toate valorile distanței z de la perete. În acest scop diferiți autori au propus un număr de formule, de obicei empirice, pentru variația raportului $\frac{\overline{u}}{u^*} = f(\zeta)$ în general complicate și nu totdeauna suficient de exacte, [3].

4. EXPUNEREA METODEI PROPUSE PENTRU CONSTRUIREA PROFILULUI VITEZEI MEDII A CURGERII TURBULENTE ÎN APROPIEREA PERETELUI RIGID

Se reia ecuația curgerii în stratul de lîngă perete (3) care se transcrie adimensional

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\overline{u}}{u_*}\right) - \frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = 1. \tag{10}$$

Primul termen al părții stîngi al ecuației (3), respectiv (10), reprezintă contribuția viscozității moleculare, iar cel de-al doilea termen reprezintă contribuția pulsațiilor vitezei la formarea tensiunii de frecare τ_0. Se admite modelul clasic al mișcării turbulente în apropierea unui perete și anume se împarte cîmpul de curgere în trei domenii: substratul laminar, domeniul de tranziție și domeniul turbulenței depline. Se utilizează noțiunea de coeficient dinamic de viscozitate turbulentă $\mu' = \rho\nu'$ introdus pentru prima dată în literatură de J. Boussinesq [8].

$$\tau' = -\rho\overline{u'w'} = \mu' \frac{d\overline{u}}{dz}. \tag{11}$$

Cu aceasta ecuația de mișcare în apropierea unui perete rigid se scrie

$$(\mu + \mu') \frac{d\overline{u}}{dz} = \tau_0. \tag{12}$$

Se face ipoteza că această ecuaţie este valabilă peste tot în stratul de lîngă perete, cu menţiunea că în substratul laminar $\mu >> \mu'$, în domeniul de tranziţie μ şi μ' au acelaşi ordin de mărime, iar în domeniul turbulenţei deplinde $\mu << \mu'$. Admiterea valabilităţii ecuaţiei (12) în tot cîmpul curgerii de lîngă peretele rigid înseamnă de fapt acceptarea principiului superpoziţiei efectelor viscozităţii moleculare şi viscozităţii turbulente.

Spre deosebire de coeficientul dinamic de viscozitate moleculară μ, care este o mărime constantă ce caracterizează trăsăturile fizice ale fluidului, coeficientului dinamic de viscozitate turbulentă μ' nu păstrează o valoare constantă-independentă de distanţă de la perete şi caracterizează trăsăturile statistice ale mişcării pulsatorii.

Pentru expresia coeficientului dinamic de viscozitate turbulentă μ' au fost propuse diferite expresii care încearcă să stabilească o legătură între valoarea coeficientului μ' şi structura locală a curentului. Teoriile clasice semiempirice ale turbulenţei, de exemplu cele ale lui Prandtl şi Kármán, au ca punct de plecare ipoteza lui L. Prandtl care presupune că pulsaţiile vitezei u' şi w' sînt proporţionale cu produsul $l \frac{d\bar{u}}{dz}$, în care l este lungimea de amestec.

În această lucrare se propune pentru determinarea expresiei coeficientului dinamic de viscozitate turbulentă μ' o cale diferită de cea urmată de teoriile clasice. Ca punct de plecare se consideră expresia coeficientului dinamic de viscozitate moleculară,

$$\mu = a \rho \lambda_m c_m. \tag{13}$$

Această formulă clasică conoscută din teoria cinetică-moleculară, de exemplu [9], conţine următoarele mărimi: a, o constantă numerică egală aproximativ cu 0,3—0,4 în funcţie de modelul molecular adoptat de teorie; ρ, densitatea; λ_m, lungimea parcursului liber mijlociu; c_m, viteza de agitaţie termică a moleculelor. Pentru determinarea coeficientului dinamic de viscozitate turbulentă μ' se propune o formulă analoagă formulei (13) şi anume

$$\mu' = \rho l u_*, \tag{14}$$

în care ρ este densitatea, l este lungimea de amestec şi u_* este viteza dinamică. La baza acestei propuneri stau următoarele raţionamente. În locul vitezei de agitaţie termică a moleculelor c_m, care reprezintă o caracteristică fizică a fluidului, constantă pentru o anumită stare, se introduce o mărime de aceeaşi natură şi anume viteza dinamică u_* care este o mărime caracteristică mişcării turbulente în stratul de lîngă peretele rigid şi care este constantă, în sensul că valoarea sa nu depinde de distanţa de la perete. În locul parcursului liber mijlociu, mai exact în locul expresiei $a \lambda_m$, trebuie introdusă o mărime fizică de aceeaşi dimensiune, deci de natura unei lungimi, la alegerea căreia trebuie să se ţină seama că, aşa cum s-a arătat, coeficientul de viscozitate turbulentă caracterizează trăsăturile statistice al mişcării turbulente legate de prezenţa pulsaţiilor vitezei şi are o valoare care este în funcţie de distanţa de la perete; în aceste condiţii apare indicată introducerea lungimii de amestec l (ceea ce corespunde teoriilor

clasice Prandtl-Kármán sau Taylor [10], care utilizează această mărime pentru definirea noțiunii de viscozitate turbulentă).

Cu ajutorul expresiei (14), ecuația (12) de mișcare în apropierea peretelui se scrie

$$(\mu + \rho u_* l) \frac{d\bar{u}}{dz} = \tau_0. \tag{15}$$

După cum rezultă din datele experimentale, la distanțe suficient de mari de perete aportul viscozității turbulente la formarea tensiunii de frecare este cu mult mai mare decît aportul viscozității moleculare și, în consecință, se poate neglija μ față de $\rho u l$. Din ecuația (15) se obține

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{l}. \tag{16}$$

Prin urmare, pentru ca repartiția vitezelor în domeniul deplin turbulent al curgerii în apropierea unui perete să respecte legea logaritmică, dedusă teoretic și verificată experimental de numeroși cercetători, este necesar ca lungimea de amestec l să fie dată de o expresie de tipul

$$l = \varkappa z, \tag{17}$$

ceea ce confirmă ipoteza lui Prandtl cu privire la proporționalitatea dintre lungimea de amestec și distanța de la perete.

Se propune generalizarea relației (17). În primul rînd, ținînd seama de faptul că ipoteza (17) este valabilă numai în domeniul turbulent, se consideră necesar ca măsurarea distanței z să se facă nu de la perete, ci de la cota d corespunzătoare grosimii substratului laminar, deci

$$l = \varkappa(z - d) \text{ pentru } z > d. \tag{18}$$

Se remarcă imediat că pentru distanța z suficient de mari, dat fiind dimensiunea mică a substratului laminat, diferența dintre formulele (17) și (18) este cu totul neglijabilă. În al doilea rînd se face ipoteza că relația (18) este valabilă pentru orice distanță z mai mare decît grosimea substratului laminar, deci formula (18) se păstrează și în domeniul de tranziție, nu numai în domeniul deplin turbulent. Se va vedea că utilizarea acestei ipoteze conduce la rezultate în deplină concordanță cu datele experimentale. Mai mult chiar, dacă se face o ipoteză suplimentară asupra valorii constantei $\varkappa$ și anume

$$\varkappa = 0 \text{ pentru } z < d, \ \varkappa \neq 0 \text{ pentru } z \geqslant d, \tag{19}$$

atunci expresia lungimii de amestec (18) este valabilă pentru tot domeniul de curgere.

Se ține seama de ipotezele (18) și (19) făcute în legătură cu lungimea de amestec și din formula (14) se obține pentru coeficientul dinamic de viscozitate turbulentă relația

$$\mu' = \varkappa\rho(z-d)\ u_*. \tag{20}$$

Ecuația de mișcare (12) în apropierea unui perete rigid se scrie

$$[\mu + \varkappa\rho(z-d)u_*]\frac{d\bar{u}}{dz} = \tau_0. \tag{21}$$

Se ține seama de relația $\mu = \rho\nu$, de expresia (4) a vitezei dinamice u_* și se scrie sub formă adimensională cota curentă z și grosimea d a substratului laminar, $\zeta = \frac{zu_*}{\nu}$ și $\delta = \frac{du_*}{\nu}$; ecuația de mișcare (21) capătă următoarea exprimare adimensională

$$[1 + \varkappa(\zeta - \delta)]\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right) = 1 \tag{21'}$$

în care

$$\varkappa = 0, \text{ pentru } \zeta < \delta, \quad \varkappa \neq 0, \text{ pentru } \zeta \geqslant \delta. \tag{19'}$$

Se integrează ecuația (21') luînd în considerație relațiile (19') și condiția evidentă a aderenței la perete, $\bar{u} = 0$ pentru $\zeta = 0$; rezultă

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \begin{cases} \zeta \text{ pentru } 0 \leqslant \zeta < \delta, \\ \frac{1}{\varkappa}\ln\,[1 + \varkappa(\zeta - \delta)] + \text{const, pentru } \zeta \geqslant \delta. \end{cases} \tag{22}$$

Constanta se determină din condiția trecerii de la profilul laminar la profilul turbulent; condiția de racordare a celor două profile este dată de relația

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \delta, \text{ pentru } \zeta = \delta. \tag{23}$$

Se obține în final următoarea funcție universală pentru profilul de viteze al mișcării turbulente din apropierea unui perete plan rigid neted

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \begin{cases} \zeta \text{ pentru } 0 \leqslant \zeta < \delta, \\ \frac{1}{\varkappa}\ln\,[1 + \varkappa(\zeta - \delta)] + \delta, \text{ pen-tru } \zeta \geqslant \delta. \end{cases} \tag{24}$$

Se constată că prima parte a acestei funcții reprezintă variația vitezei în substratul laminar și coincide cu formula clasică (6) admisă teoretic de majoritatea cercetătorilor și confirmată experimental. Cea de-a doua parte a funcției (24) reprezintă o generalizare a formulei clasice (9) a lui Prandtl-Kármán, către care tinde asimptotic pentru distanțe ζ mari. Spre deosebire de formula (9) care a fost dedusă și verificată experimental numai pentru distanțe ζ mari, corespunzătoare domeniului deplin turbulent, partea a doua a funcției (24) este valabilă pentru orice distanță ζ care depășește grosimea substratului laminar. Se remarcă faptul că funcția (24) este o funcție de clasă C^1; într-adevăr, în punctul $\zeta = \delta$ de racordare

a celor două ramuri ale funcției $\frac{\bar{u}}{u_*}$ atît funcția, cît și derivata întîi sînt continue. Rezultă că funcția (24) este o funcție netedă în orice punct al său, inclusiv punctul $\zeta = \delta$. Se consideră acest rezultant important, deoarece în cazul în care se admite profilul clasic al vitezelor medii dat de formulele (6) și (9) punctul de racordare al celor două ramuri este un punct angular, ceea ce contravine realității fizice.

Examinarea funcției (24) permite acordarea unor semnificații fizice precise celor două constante $\varkappa$ și δ care intervin în scrierea funcției profilului vitezei medii. Pentru stabilirea semnificației mărimii $\varkappa$ se cercetează comparativ formulele (13) și (20) și se constată că mărimea $\varkappa$ care intervine în definirea coeficientului dinamic de viscozitate turbulentă joacă rolul constantei a cu ajutorul căreia se scrie expresia coeficientului dinamic de viscozitate moleculară. Semnificația fizică a celei de-a doua constante este evidentă și anume mărimea δ reprezintă grosimea substratului-limită laminar. Ținînd seama de semnificațiile fizice stabilite constantelor $\varkappa$ și δ precum și de însăși metoda de demonstrație a funcției (24), bazată pe utilizarea principiului superpoziției efectelor viscozității moleculare și viscozității turbulente, se pot preciza noi sensuri pentru aceste două constante și anume mărimea δ introduce influența viscozității moleculare, iar mărimea $\varkappa$ introduce influența viscozității turbulente la formarea profilului de viteze medii $\frac{\bar{u}}{u_*}$.

5. COMPARARE CU REZULTATELE TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE DIN LITERATURĂ

Pentru trasarea efectivă a profilului vitezei medii a curgerii turbulente în stratul de lîngă peretele rigid este necesară precizarea valorilor numerice ale mărimilor $\varkappa$ și δ. Se adoptă pentru constanta lui Kármán valoarea $\varkappa = 0{,}4$, valoare acceptată aproape general în literatură. Pentru grosimea substratului laminar se admite valoarea $\delta = 7{,}5$, ceea ce corespunde determinărilor experimentale ale unui număr mare de cercetători. Se trasează profilul vitezei medii a curgerii turbulente din apropierea peretelui plan neted dat de funcția universală dedusă din formula (24)

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \begin{cases} \zeta & \text{pentru } 0 \leqslant \zeta < 7{,}5, \\ 2{,}5 \ln [1 + 0{,}4(\zeta - 7{,}5)] + 7{,}5 & \text{pentru } \zeta \geqslant 7{,}5. \end{cases} \tag{24'}$$

Se compară în figura 2 profilul vitezei medii (24') propus în această lucrare cu profilul rezultat din racordarea curbelor (6) și (9), cu $A = 2{,}5$ și $B = 5{,}1$, în conformitate cu D. Coles [7],

$$\frac{\bar{u}}{u_*} \begin{cases} \zeta & \text{pentru } \zeta \leqslant 11{,}1, \\ 2{,}5 \ln \zeta + 5{,}1 & \text{pentru } \zeta > 11{,}1. \end{cases} \tag{25}$$

Profilul (25) este acceptat de un număr mare de cercetători (de ex. A. S. Monin, A. M. Iaglom [3], D. Coles [7], J. O. Hinze [11], J. Kestin, P. D. Richardson [6], etc.), fiind considerat suficient de apropiat datelor

experimentale pentru distanţe de la perete mici corespunzătoare substratului laminar şi pentru distanţe de la perete mari corespunzătoare domeniului deplin turbulent.

Din examinarea figurii rezultă următoarele: în domeniul substratului laminar, pentru distanţe $\zeta < 7{,}5$, profilul vitezei medii (24′) propus

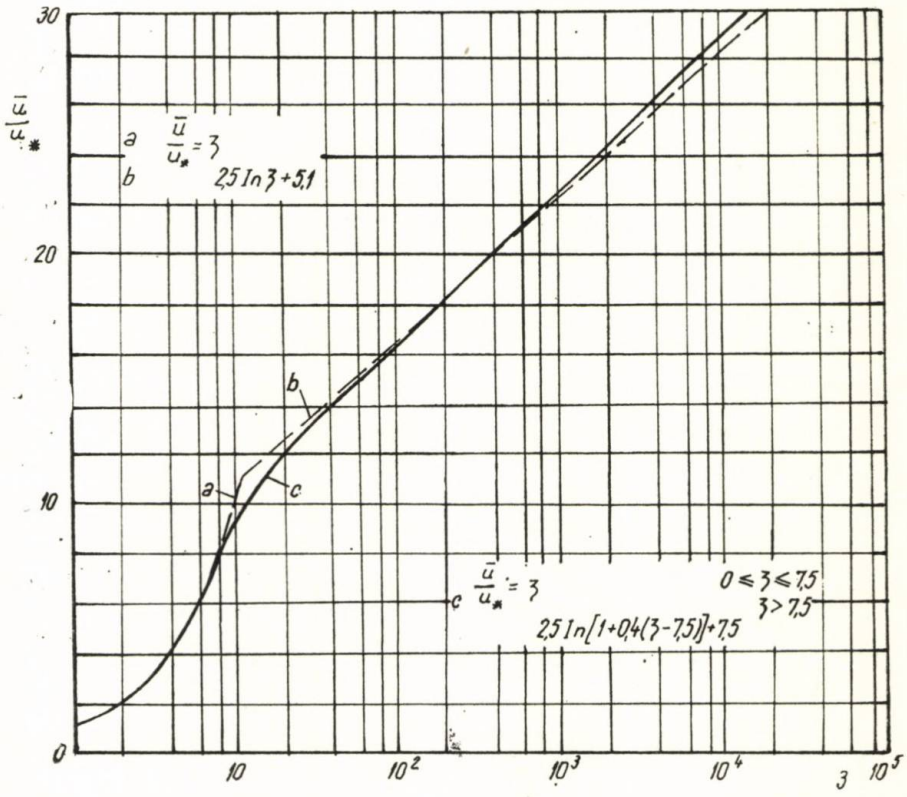


Fig. 2. — Comparaţie între profilul vitezei medii (25) acceptat în literatură (linie continuă) şi profilul propus al vitezei medii (24′) (linie întreruptă)

de această lucrare şi profilul (25) acceptat în literatură coincid; în domeniul de tranziţie pentru distanţe $7{,}5 < \zeta < 30$, profilul propus (24′) este reprezentat printr-o curbă cu variaţie continuă şi netedă, în timp ce profilul (25) din literatură prezintă un punct angular pentru $\zeta = 11{,}1$ (ceea ce, evident, nu este în concordanţă cu realitatea fizică); în domeniul turbulenţei depline, pentru distanţe $30 < \zeta < 500$, cele două profile de viteze medii (24′) şi (25), prezintă diferenţe cu totul neînsemnate; pentru distanţele ζ foarte mari, $\zeta > 500$, din domeniul deplin turbulent, se constată că profilul propus (24′) indică viteze medii ceva mai mari decît cele care rezultă din profilul (25).

Pentru compararea profilului propus (24′) al vitezei medii a curgerii turbulente în apropierea unui perete neted cu datele experimentale, se

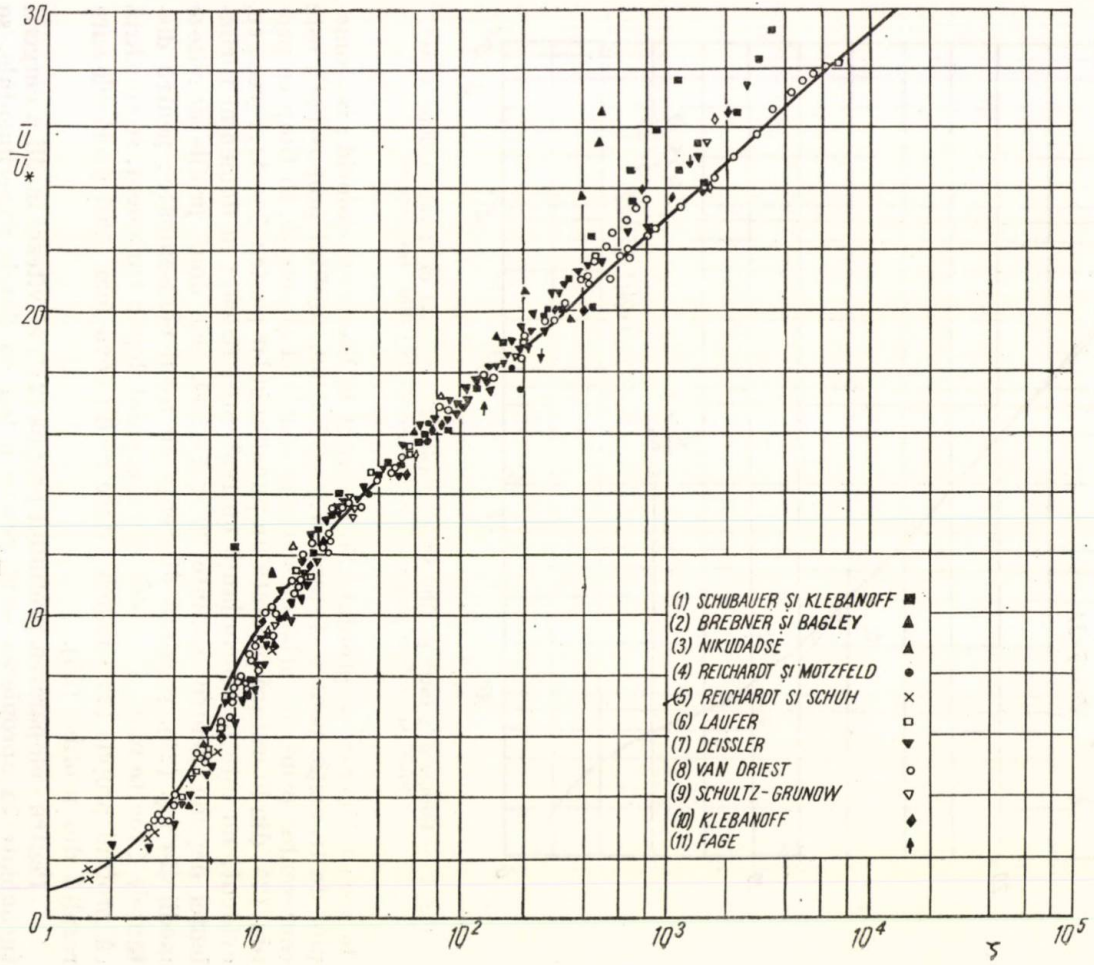


Fig. 3.—Comparație între profilul propus (24') al vitezei medii și rezultatele experimentale reproduse în figura 1.

utilizează din nou figura 1 reprodusă din lucrarea lui J. Kestin şi P. D. Richardson [6], care centralizează un număr foarte mare de date experimentale referitoare la vitezele medii pentru curgerile turbulente în stratul-limită pe placa plană netedă, în canale dreptunghiulare cu pereţii netezi şi în conducte netede. În figura 3 sînt reprezentate atît aceste date experimentale cît şi profilul propus (24'). Se remarcă imediat o bună concordanţă cu datele experimentale pentru toate distanţele ζ de la perete. Se subliniază îndeosebi faptul că profilul de viteze propus (25') descrie foarte bine domeniul de tranziţie de la curgerea în substratul laminar la curgerea în domeniul deplin turbulent. De asemenea, pentru distanţele foarte mari, $\zeta > 500$, profilul propus (24') se apropie mai mult de rezultatele experimentale decît profilul (25), care în lucrarea menţionată a lui J. Kestin şi P. D. Richardson este considerat mai bun decît profilele propuse de alţi cercetători, de exemplu de Th. von Kármán [14], M. Rannie [6], R. G. Deissler [15], D. B. Spalding [16], E. R. Van Driest [17].

Se examinează modul în care rezultatul obţinut este confirmat de rezultatele experimentale de mare finete ale lui J. Laufer [12]. Se propune studierea comparativă a variaţiei funcţiei universale adimensionale a corelaţiei dintre componentele longitudinală şi transversală ale pulsaţiei vitezei în stratul de lîngă perete obţinută de Laufer şi variaţia aceleiaşi funcţii obţinută din ecuaţia (10) a curgerii turbulente în apropierea peretelui prin folosirea profilului de viteze medii (24),

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = 1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right) = \frac{\varkappa(\zeta-\delta)}{1+\varkappa(\zeta-\delta)}. \tag{26}$$

Cu ajutorul acestei formule, pentru $\varkappa = 0{,}4$ şi $\delta = 7{,}5$, se calculează raportul $-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2}$ în zece puncte diferite şi se înscriu aceste valori în figura 4. Se constată o foarte bună concordanţă între rezultatele experimentale obţinute L. Laufer şi valorile calculate cu ajutorul formulei (26). Se precizează cu funcţia $-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2}$ dată de expresia (26) are sens numai pentru $\zeta > \delta$, deci în afara substratului laminar. Se observă că funcţia are o

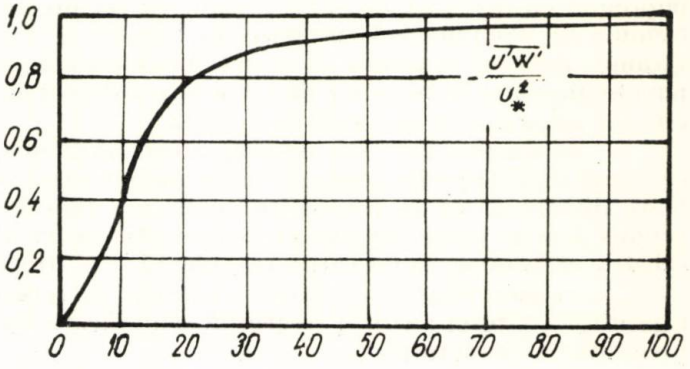


Fig. 4. — Funcţia universală adimensională a corelaţiei dintre componentele longitudinală şi transversală ale pulsaţiei vitezei în stratul de lîngă perete, în conformitate cu măsurătorile lui J. Laufer (linia continuă) şi formula (26) propusă (punctele).

direcţie asimptotică orizontală, de ecuaţie $-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} = 1$, ceea ce corespunde rezultatelor experimentale (J. Laufer [12], P. S. Klebanoff [13] etc.) şi faptului că la distanţe mari de perete regimul statistic al pulsaţiilor turbulente determină exclusiv caracterul curgerii, nedepinzînd de viscozitatea moleculară. Acest lucru rezultă direct din formula (26), constatîndu-se că la distanţe mari mărimea δ, care, conform semnificaţiei fizice stabilită anterior, introduce influenţa viscozităţii moleculare, are o contribuţie cu totul neglijabilă la determinarea valorii $-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2}$.

6. CONCLUZII

Principalul obiectiv al acestei lucrări constă în stabilirea unei formule universale logaritmice pentru profilul vitezei medii a curgerii turbulente în apropierea unui perete rigid. Această formulă este dedusă (pe baza utilizării noţiunii de viscozitate turbulentă introdusă prin coeficientul dinamic şi pentru care se propune o expresie diferită de cele clasice — tabela 1 —) prin aplicarea principiului superpoziţiei efectelor viscozităţii moleculare şi viscozităţii turbulente.

Tabela 1

Lungimea de amestec	Coeficientul dinamic de viscozitate turbulentă	Indicaţia bibliografică
$l = \varkappa z$	$\mu' = \varkappa^2 \rho z^2 \frac{d\bar{u}}{dz}$	Prandtl
$l = K\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)\Big/\left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)$	$\mu' = K^2\rho\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^3\Big/\left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)^2$	Kármán
$l = \varkappa(z - d)$	$\mu' = \varkappa\rho(z - d)u_*$	Metoda propusă

Forma obţinută pentru profilul vitezelor medii şi compararea cu rezultatele altor cercetători, sintetizată în tabela 2 şi figura 3, permite evidenţierea cîtorva concluzii:

— profilul vitezei medii este exprimat printr-o funcţie continuă, împreună cu derivata de ordinul întîi, pe tot domeniul de definiţie (alte formule de exemplu cele propuse de Prandtl şi Taylor, Coles, Kármán, Rannie, Deissler — tabela 2 — sînt reprezentate prin funcţii care au puncte angulare în punctele de racordare a domeniilor de curgere, ceea ce este în contradicţie cu realitatea fizică);

— forma profilului universal al vitezei medii este în bună concordanţă cu rezultatele experimentale ale unui număr mare de cercetători, pentru toate distanţele de la perete (se subliniază faptul că profilul de viteze propus descrie corect domeniul de tranziţie de la mişcarea laminară din substratul laminar la mişcarea turbulentă din stratul deplin turbulent);

— constantelor $\varkappa$ şi δ care intervin în scrierea funcţiei universale a profilului vitezei medii li se acordă semnificaţii fizice bine determinate, precizate în paragraful 4.

— folosind profilul de viteze propus, se obţine expresia analitică a funcţiei universale adimensionale a corelaţiei dintre componentele longitudinală şi transversală ale pulsaţiei vitezei în stratul de lîngă perete, verificată de rezultatele experimentale.

Metoda propusă pentru studiul curgerii turbulente în apropierea unui perete rigid conduce la rezultate în concordanţă cu cele experimentale, utile în rezolvarea unor probleme de hidrodinamică.

Primită la redacţie la 22 martie 1972

Tabela 2

Formula $\bar{u}_+ = \dfrac{\bar{u}}{u^*}$	Domeniul	Bibliografie
$\bar{u}_+ = \zeta$ $\bar{u}_+ = 2{,}5\ \ln\zeta + 5{,}5$	$0 \leqslant \zeta \leqslant 11{,}5$ $\zeta > 11{,}5$	Prandtl şi Taylor [6]
$\bar{u}_+ = \zeta$ $\bar{u}_+ = 2{,}5\ \ln\zeta + 5{,}1$	$0 \leqslant \zeta \leqslant 11{,}1$ $\zeta < 11{,}1$	Coles [7]
$\bar{u}_+ = \zeta$ $\bar{u}_+ = 5{,}0\ \ln\zeta - 3{,}05$ $\bar{u}_+ = 2{,}5\ \ln\ \zeta + 5{,}5$	$0 \leqslant \zeta \leqslant 5$ $5 < \zeta \leqslant 30$ $\zeta > 30$	Kármán [4]
$\bar{u}_+ = 14{,}53\ \mathrm{th}(\zeta/14{,}53)$ $\bar{u}_+ = 2{,}5 \ln\zeta + 5{,}5$	$0 \leqslant \zeta \leqslant 27{,}5$ $\zeta > 27{,}5$	Rannie [6]
$\dfrac{d\bar{u}_+}{d\zeta} = \dfrac{1}{1 + n^2\bar{u}_+\zeta[1 - \exp(-n^2\bar{u}_+\zeta)]}$ $\bar{u}_+ = 2{,}78 \ln\zeta + 3{,}8$	$0 \leqslant \zeta \leqslant 26$ $n = 0{,}124$ $\zeta > 26$	Deissler [15]
$\zeta = \bar{u}_+ + A\left[\exp B\bar{u}_+ - 1 - B\bar{u}_+ - \right.$ $\left. - \dfrac{1}{2}(B\bar{u}_+)^2 - \dfrac{1}{6}(B\bar{u}_+)^3 - \dfrac{1}{24}(Bu)^4 - \ldots\right]$	orice ζ $A = 0{,}1108$ $B = 0{,}4$	Spalding [16]
$\dfrac{d\bar{u}_+}{d\zeta} = \dfrac{1}{1 + \{1 + 4K^2\zeta[1 - \exp(-\zeta/A)]^2\}^{1/2}}$	orice ζ $K = 0{,}4$ $A = 26$	Van Driest [17]
$\bar{u}_+ = \begin{cases} \zeta & 0 \leqslant \zeta \leqslant \delta \\ \dfrac{1}{\varkappa} \ln[1 + \varkappa(\zeta - \delta)] + \delta & \zeta > \delta \end{cases}$	orice ζ $\varkappa = 0{,}4$ $\delta = 7{,}5$	metoda propusă

BIBLIOGRAFIE

1. O. Reynolds, *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, A, A, 186, (1895).
2. L. Prandtl, *Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*, Zs. angew. Math. Mech., **5**, 2, 136 — 139 (1925).
3. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, часть I, Изд. „Наука", Москва, (1965).
4. Th. von Kármán, *Mechanische Ahnlichkeit und Turbulens*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 58 — 76, (1930).
5. L. Prandtl, *Zur turbulenten Strömung in Rohren und Längsplatten*, Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst., Göttingen, *4*, 18 — 29, (1932).
6. J. Kestin, P. D. Richardson, *Heat transfer across turbulent, incompressible boundary layers*, Intern. J. Heat Mass Trasnfer, *6*, *2*, 147 — 189 (1963).
7. D. Goles, *The law of the wall in turbulent shear flow, 50 Jahre Grenzschichtforschung*. Vieweg Braunschweig, 153 — 163 (1955).
8. J. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mém. prés. par div. sav., Paris, (1877).
9. J. O. Hirschfelde, C. F. Curtiss, R. B. Bird, *Molecular theory of gases and liquids* N. Y. London, (1954).
10. G. I. Taylor, *The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion*, Proceedings of the Royal Society London, A, 135, (1932).
11. J. O. Hinze, *Turbulent pipe-flow*, Mécanique de la turbulence (Coll. Intern. de CNRS à Marseille), Paris. Ed. CNRS, 130 — 165, (1962).
12. J. Laufer, *The structure of turbulence in fully developed pipe flow*, Nat. Advis. Com. Aeronaut. Rep. 1033, (1954).
13. P. S. Klebanoff, *Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient* Nat. Advis. Com. Aeronaut., Rep. *1247* (1955).
14. Th. von Kármán, *Some aspects of the theory of turbulent motion*, Proc. Intern. Congr. Appl. Mech. Cambridge (1934).
15. R. G. Deissger, *Convective heat transfer and friction in flow of liquids*, Turbulent flow and heat transfer (ed. by. C. C. Lin), Princeton, Univ. Press. 288 — 328 (1959).
16. D. B. Spalding, *A single formula for the „law of the wall"*, J. Appl. Mech., **28** E, *3*, 455 — — 457 (1961).
17. E. R. Van Driest, *On turbulent flow near a wall*, J. Aeronaut. Sci., **23**, *11*, 1007 — 1011 (1956).

CONTRIBUȚII LA CALCULUL PLĂCILOR ORTOTROPE, CU NERVURI DE RIGIDIZARE PE O SINGURĂ PARTE

I.

Profesorului inginer ANDREI CARACOSTEA
în semn de omagiu cu prilejul împlinirii a
65 de ani de viață

de M. V. SOARE
Institutul de construcții București

Se indică modul general de deducere a ecuațiilor cu derivate parțiale ale plăcilor ortotrope, cu nervuri de rigidizare pe o singură parte, în metoda mixtă; necunoscutele sînt o funcție potențială F și săgeata w. Prin introducerea ipotezei simplificatoare că rigiditățile axiale D_x și D_y sînt infinite, ecuațiile de bază se reduc la o singură ecuație cu derivate parțiale de ordinul patru.
În continuare este dezvoltată soluția pentru cazul plăcilor de tip bandă și semibandă, cele două laturi opuse la distanță finită fiind simplu rezemate.

1. INTRODUCERE

Progresele tehnice remarcabile realizate în ultimele decenii în domeniul construcțiilor s-au datorat mai multor cauze dintre care vom cita: cunoașterea mai aprofundată a caracteristicilor materialelor de construcție, fabricarea unor noi materiale cu proprietăți fizice-mecanice superioare, perfecționarea concepțiilor de proiectare și progresul metodelor de calcul (din punct de vedere matematic și al tehnicii operatorii), analiza formelor constructive ale elementelor și perfecționarea metodelor de execuție și montaj.

În privința perfecționării concepțiilor de proiectare și a metodelor de calcul se menționează:

— folosirea structurilor multiplu static nedeterminate,
— luarea în considerare a comportării spațiale a structurilor complexe,
— aplicarea principiului cumulării funcțiunilor,
— utilizarea secțiunilor cu nervuri dese sau casetate, avantajoase din punct de vedere a repartiției transversale a sarcinilor.

Platelajele ușoare, ortotrope ale podurilor metalice răspund, în măsura în care este posibilă rezolvarea tuturor aspectelor enumerate precedent, în mod complet tuturor acestor cerințe actuale.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 4, 1974, P. 695–710

Plăcile ortotrope, alcătuite din table şi nervuri de rigidizare pe una sau două direcţii ortogonale, îmbină în mod avantajos lucrul de placă al tablei şi cel de grindă al nervurilor, permiţînd obţinerea unei mari rigidităţi la încovoiere şi la torsiune, cu un consum de metal minim.

Aceste calităţi, puse de mai multă vreme în evidenţă în construcţia de poduri metalice, încep să fie utilizate şi în alte domenii, cum ar fi în construcţiile hidrotehnice, la stavile.

Metodele de calcul sînt extrem de complexe şi în teoria plăcilor ortotrope se pot distinge mai multe etape atît din punct de vedere cronologic, cît şi al ipotezelor de bază. Această evoluţie ilustrează trecerea succesivă de la metode de calcul foarte simple care schematizează drastic distribuţia sarcinilor şi descărcarea elementelor componente, la metode de calcul complexe care iau în considerare conlucrarea efectivă dintre aceste elemente.

Documentate treceri în revistă ale stadiului actual al problemei au fost făcute recent de I. Beleş [2] şi I. Gh. Bucă [3] în tezele lor de doctorat.

Cea mai larg aplicată metodă pentru calculul plăcilor cu nervuri de rigidizare constă în netezirea*) structurii, adică în distribuirea nervurilor pe suprafaţa plăcii, astfel încît ansamblul să devină un mediu continuu ortotrop.

În categoria plăcilor ortotrope intră mai multe tipuri de structuri şi anume :

a) plăci cu ortotropie de material :
   — plăci armate cruciş, la care armarea pe cele două direcţii este mult diferită,
   — plăci din placaj ;
b) plăci cu ortotropie geometrică :
   — plăci ondulate,
   — plăci cu rigidizări simetrice sau nesimetrice (excentrice),
   — plăci celulare tip fagure,
   — reţele dese de grinzi.

Toate aceste tipuri de structuri pot fi studiate cu ajutorul aceleiaşi ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul patru

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Z(x, y),$$

în care rigidităţile K_x, K_y, H au expresii diferite pentru fiecare tip de structură considerată.

În cadrul studiului de faţă ne vom ocupa de plăcile cu rigidizări excentrice, întîlnite frecvent la podurile metalice şi în construcţiile hidrotehnice.

În paragrafele 2 şi 3 sînt dezvoltate relaţiile generale şi deducerea ecuaţiei cu derivate parţiale, iar în paragrafele 4 şi 5 este stabilită soluţia acestei ecuaţii, cu ajutorul seriilor trigonometrice cu coeficienţi variabili, pentru plăcile tip bandă.

*) Prin acest termen dorim să exprimăm în limba română echivalentul termenului german *verschmieren*.

2. RELAȚII GENERALE

Fie placa cu rigidizări excentrice reprezentată în figura 1.

Se presupune că atît placa, cît și nervurile de rigidizare au secțiune constantă în ambele direcții, care sînt ortogonale.

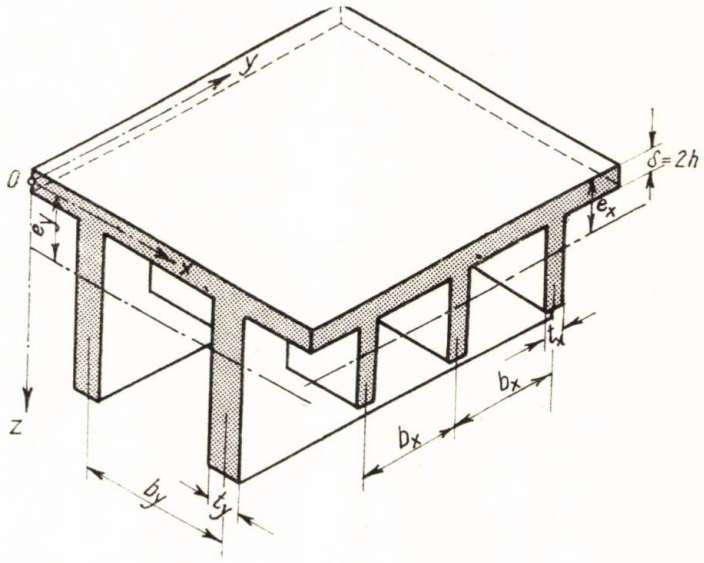


Fig. 1

Se alege sistemul de axe carteziene astfel încît planul xOy coincide cu planul median al plăcii, iar axa Oz este îndreptată în jos. Pentru cele ce urmează se definesc următoarele caracteristici geometrice și mecanice :

$\delta = 2h$ — grosimea plăcii,

b_x — interaxul nervurilor paralele cu axa Ox,

b_y — interaxul nervurilor paralele cu axa Oy,

A_x — aria secțiunii transversale a unei nervuri paralele cu axa Ox și a porțiunii de placă aferente (de lățime b_x),

A_y — aria secțiunii transversale a unei nervuri paralele cu axa Oy și a porțiunii de placă aferente (de lățime b_y),

u, v, w — deplasările unui punct curent al suprafeței mediane, în direcțiile axelor x, y, z,

$\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}$ alungiri specifice în direcțiile x și y, respectiv lunecarea specifică, raportate la planul median,

e_x — cota centrului de greutate al ariei A_x în raport cu planul xOy,

e_y — cota centrului de greutate al ariei A_y în raport cu planul xOy,

t_x — grosimea nervurilor paralele cu axa x,

t_y — grosimea nervurilor paralele cu axa y,
E, μ — modulul de elasticitate, respectiv coeficientul de contracţie transversală ale materialului.

La o cotă z se produc următoarele deformaţii specifice :

$$\varepsilon_x^{(z)} = \varepsilon_x - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y^{(z)} = \varepsilon_y - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$\gamma_{xy}^{(z)} = \gamma_{xy} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.$$

Starea de eforturi este definită de relaţiile cunoscute :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x^{(z)} + \mu\varepsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y^{(z)} + \mu\varepsilon_x), \tag{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy},$$

în care s-a ţinut seama că contracţia transversală nu se produce în plan transversal pe nervuri.

Distribuţia neuniformă a eforturilor unitare pe înălţimea plăcii ortotrope (se presupune valabilă ipoteza lui Bernoulli) produce eforturi şi momente care se obţin prin însumarea pe lăţimile aferente b_x, b_y şi apoi prin raportarea la unitatea de lăţime de placă,

$$N_x = \frac{1}{b_x}\int\frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}A_x + \frac{1}{b_x}\int_{-h}^{+h}\mu\frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_y b_x\,\mathrm{d}z.$$

În expresia precedentă au fost însumate separat eforturile unitare în nervură şi în placă. Separînd prima integrală în două şi notînd

$D = \dfrac{E\delta}{1-\mu^2}$ rigiditatea axială a plăcii,

$D_x = \dfrac{1}{b_x}\displaystyle\int\frac{E}{1-\mu^2}\,\mathrm{d}A_x$ rigiditatea axială a plăcii ortotrope în direcţia x,

$e_x = \dfrac{1}{b_x D_x}\displaystyle\int\frac{E}{1-\mu^2}z\,\mathrm{d}A_x$ poziţia centrului de greutate,

se obţine în final :

$$N_x = D_x\left(\varepsilon_x - e_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \mu D\varepsilon_y, \tag{3a}$$

şi analog

$$N_y = D_y\left(\varepsilon_y - e_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \mu D\varepsilon_x. \tag{3b}$$

Eforturile de lunecare pot fi preluate practic doar de placa propriu-zisă, deoarece nervurile au o rigiditate la lunecare neglijabilă pe o direcţie normală pe planul lor median ; de aceea, ele se exprimă cu ajutorul relaţiei din elasticitatea plană :

$$N_{xy} = N_{yx} = D\frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy}. \tag{3c}$$

Din relaţiile (3) pot fi explicitate deformaţiile specifice în funcţie de eforturi :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{D_xD_y - \mu^2D^2}\left(D_yN_x - \mu DN_y + D_xD_ye_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu DD_ye_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{D_xD_y - \mu^2D^2}\left(D_xN_y - \mu DN_x + D_yD_xe_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu DD_xe_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{(1+\mu)D}N_{xy}.$$

Eforturile pot fi exprimate cu ajutorul unui potenţial de tip Airy :

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad N_{xy} = N_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \tag{4}$$

Cu aceasta, expresiile precedente pentru deformaţiile specifice devin :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{D_xD_y - \mu^2D^2}\left(D_y\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu D\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + D_xD_ye_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu DD_ye_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{5}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{D_xD_y - \mu^2D^2}\left(D_x\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu D\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + D_yD_xe_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu DD_xe_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2}{(1+\mu)D}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}.$$

Ţinînd seama că deformaţiile specifice satisfac ecuaţia de compatibilitate

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} = 0, \tag{6}$$

obţinută prin eliminarea deplasărilor u şi v, şi introducînd expresiile (5) în (6), rezultă

$$D_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{D_x D_y - \mu D^2}{(1-\mu)D} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2\, \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \mu D D_x e_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} +$$

$$+ D_x D_y (e_x + e_y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} - \mu D D_y e_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{7}$$

Împărţind toţi termenii cu $D_x D_y$ şi notînd, după E. Giencke [4]

$\nu = \dfrac{D}{\sqrt{D_x D_y}}$, coeficientul rigidităţilor axiale,

$\overline{D} = D\,\dfrac{1-\mu}{1-\nu^2\mu}$ rigiditatea la lunecare a plăcii ortotrope,

ecuaţia (7) se scrie sub formă finală:

$$\frac{1}{D_y}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{2}{\overline{D}}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{1}{D_x}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \mu e_x \frac{D}{D_x}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} +$$

$$+ (e_x + e_y)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} - \mu e_y \frac{D}{D_y}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{8}$$

Aceasta este prima ecuaţie de bază căutată, utilizînd metoda mixtă.

Trecem mai departe la stabilirea expresiilor momentelor încovoietoare şi de torsiune.

Suprapunînd cuplurile eforturilor unitare din nervură şi din placă, se poate scrie:

$$M_x = \frac{1}{b_x}\int \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) z\, \mathrm{d}A_x + \frac{1}{b_x}\int \mu \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) z b_x\, \mathrm{d}z =$$

$$= \varepsilon_x \frac{1}{b_x}\int \frac{E}{1-\mu^2} z\, \mathrm{d}A_x - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{1}{b_x}\int \frac{E}{1-\mu^2} z^2\, \mathrm{d}A_x + \mu \varepsilon_y \frac{1}{b_x}\int_{-h}^{+h} \frac{E}{1-\mu^2} z b_x\, \mathrm{d}z -$$

$$- \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{1}{b_x}\int_{-h}^{+h} \frac{E}{1-\mu^2} z^2\, \mathrm{d}z.$$

Dacă se notează

$K = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ rigiditatea la încovoiere a plăcii,

$K_x = \dfrac{1}{b_x}\int \dfrac{E}{1-\mu^2} z^2 \, dA_x$ rigiditatea la încovoiere a plăcii ortotrope în direcţia x, raportată la planul centrelor de greutate $z = e_x$,

$K_x + D_x e_x^2$ rigiditatea la încovoiere a plăcii ortotrope în direcţia x, raportată la planul median al plăcii,

$$\int_{-h}^{+h} \frac{E}{1-\mu^2} z \, dz = 0,$$

expresia precedentă pentru M_x devine, după gruparea convenabilă a termenilor,

$$M_x = -\left(K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + e_x D_x \left(\varepsilon_x - e_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{9a}$$

şi, analog,

$$M_y = -\left(K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + e_y D_y \left(\varepsilon_y - e_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{9b}$$

Pentru deducerea momentelor de torsiune, este necesară o analiză mai atentă. În expresia (1) pentru $\gamma_{xy}^{(z)}$ se neglijează de la început termenul γ_{xy}, deoarece secţiunea poate prelua eforturi de lunecare doar prin placă. Avem atunci

$$M_{xy} = \frac{1}{b_x}\int \frac{E}{2(1+\mu)}\left(-2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}\right) z \, dA_x = -\frac{1}{b_x}\int_{-h}^{+h} \frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} z^2 b_x \, dz -$$

$$-\frac{1}{b_x}\int \frac{E}{2(1+\mu)} 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} z^2 \, dA_{xn},$$

în care a fost separat efectul plăcii de cel al nervurii, iar A_{xn} reprezintă aria secţiunii transversale a nervurii în direcţia x.

Ultima integrală reprezintă rigiditatea la torsiune a nervurii şi poate fi evaluată direct (ca pentru secţiuni înguste):

$$K_{xy} = \frac{Gt^2 A_{xn}}{3b_x}.$$

Prima integrală se efectuează ușor, dînd termenul cunoscut din teoria plăcilor plane izotrope, astfel încît, în final, rezultă

$$M_{xy} = -[K(1-\mu)+2K_{xy}]\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \tag{9c}$$

și, analog,

$$M_{yx} = -[K(1-\mu)+2K_{yx}]\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{9d}$$

Vom asocia acum relația

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(M_{xy}+M_{yx})+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-Z(x,y), \tag{10}$$

care înglobează ecuațiile diferențiale de echilibru de la plăcile plane.

Ducînd expresiile (9) în (10), se obține

$$(K_x+D_xe_x^2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(K+K_{xy}+K_{yx})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+(K_y+D_ye_y^2)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-$$

$$-D_xe_x\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2}-D_ye_y\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}=Z(x,y).$$

Înlocuind mai departe pe ε_x, ε_y în funcție de F, conform (5), și introducînd coeficientul de contracție transversală modificat

$$\bar{\mu}=\nu\mu,$$

rezultă în final

$$\left(K_x-\frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}^2}D_xe_x^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(K+K_{xy}+K_{yx}+\frac{\mu}{1-\bar{\mu}^2}De_xe_y\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+$$

$$+\left(K_y-\frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\mu}^2}D_ye_y^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\mu}{1-\bar{\mu}^2}\left(\frac{D}{D_y}e_x\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\frac{D}{D_x}e_y\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)-$$

$$-\frac{e_x+e_y}{1-\bar{\mu}^2}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2}=0. \tag{11}$$

Aceasta este a doua ecuație de bază căutată, în metoda mixtă.

3. SIMPLIFICAREA ECUAȚIILOR DE BAZĂ

Examinarea ecuațiilor (8) și (11) arată că, în cazul plăcilor ortotrope, cu nervuri disimetrice, efectul de șaibă nu poate fi separat de cel de placă.

Totuși, o simplificare considerabilă rezultă — așa cum a arătat E. Giencke [4] —, dacă se neglijează influența alungirilor în dreptul

centrelor de greutate (pe fiecare direcție) asupra săgeților; aceasta revine la a considera că rigiditățile axiale D_x și D_y sînt infinite.

Ținînd seama că, în acest caz,

$$\nu = 0, \quad \bar{D} = D(1-\mu), \quad \bar{\mu} = 0,$$

ecuațiile (8) și (11) se scriu sub forma mai simplă

$$\frac{2}{D(1-\mu)} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + (e_x + e_y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \tag{12a}$$

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(K + K_{xy} + K_{yx} + \mu D e_x e_y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} -$$

$$-(e_x + e_y) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = Z(x, y). \tag{12b}$$

Eliminînd pe $\partial^4 F / \partial x^2 \partial y^2$ între cele două ecuații și notînd rigiditatea la torsiune a plăcii ortotrope

$$H = K + K_{xy} + K_{yx} + \mu D e_x e_y + \frac{1-\mu}{4} D(e_x + e_y)^2, \tag{13}$$

se obține ecuația

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Z(x, y), \tag{14}$$

menționată la paragraful 1.

Ținînd seama de simplificările admise, primele două relații (5) se scriu

$$\varepsilon_x = e_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = e_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -\frac{2}{(1+\mu)D} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{15}$$

Rămîne acum să exprimăm toate mărimile secționale cu ajutorul săgeților w. Pentru verificarea eforturilor unitare, este mai comod să se treacă de la mărimile secționale raportate la planul median al plăcii, la cele raportate la linia centrelor de greutate pe fiecare direcție.

Fie $\bar{N}_x$, $\bar{N}_y$, $\bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx}$, $\bar{M}_x$, $\bar{M}_y$, $\bar{M}_{xy} = \bar{M}_{yx}$ noile mărimi.

Vom putea scrie, de exemplu,

$$\bar{N}_x = N_x; \quad \bar{M}_x = M_x - N_x e_x; \quad \bar{M}_{xy} = M_{xy} - N_{xy} e_x.$$

Făcînd toate înlocuirile avem pentru momentul încovoietor:

$$\bar{M}_x = -K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_x e_x \varepsilon_x - D_x e_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -$$

$$- e_x \left[D_x \left(\varepsilon_x - e_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu D e_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

După toate reducerile de termeni asemenea, rezultă

$$\bar{M}_x = -K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu(K + De_x e_y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\bar{M}_y = -K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu(K + De_x e_y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \tag{16}$$

$$\bar{M}_{xy} = -\left\{(1-\mu)\left[K + e_x(e_x + e_y)\frac{D}{2}\right] + 2K_{xy}\right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y},$$

$$\bar{M}_{yx} = -\left\{(1-\mu)\left[K + e_y(e_x + e_y)\frac{D}{2}\right] + 2K_{yx}\right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{17}$$

Forţele tăietoare rezultă din ecuaţiile de echilibru de placă

$$Q_x = \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yx}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x}$$

şi, ţinînd seama de (16) şi (17), au expresiile

$$Q_x = -K_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left[K + De_y\left(\frac{1+\mu}{2} e_x + \frac{1-\mu}{2} e_y\right) + 2K_{yx}\right] \frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y^2},$$

$$Q_y = -K_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left[K + De_x\left(\frac{1+\mu}{2} e_y + \frac{1-\mu}{2} e_x\right) + 2K_{xy}\right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}. \tag{18}$$

Eforturile pot fi exprimate, la rîndul lor, numai în funcţie de derivatele lui w, ţinînd seama de simplificarea admisă. Din (12a) se poate deduce direct

$$F = -D \frac{1-\mu}{2} (e_x + e_y) w, \tag{19}$$

fără a mai introduce funcţii de integrare, deoarece lunecările şi torsiunile trebuie să se corespundă atît în cîmp, cît şi pe contur.

Relaţiile (3) nu pot fi folosite direct deoarece prezintă nedeterminări; plecînd însă de la relaţiile (4), în care potenţialul F este dat de (19), avem:

$$\bar{N}_x = -D \frac{1-\mu}{2} (e_x + e_y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\bar{N}_y = -D \frac{1-\mu}{2} (e_x + e_y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{20}$$

$$\bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx} = +D \frac{1-\mu}{2} (e_x + e_y) \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}.$$

Datorită formulării (4), este evident că eforturile satisfac ecuațiile diferențiale de proiecții pe axele Ox și Oy.

În cele ce urmează, pentru simplitatea scrierii, mărimile secționale vor fi notate fără bară, păstrînd însă semnificațiile admise. Pentru exprimarea condițiilor la limită pentru margini libere, trebuie să fie menționate și forțele tăietoare generalizate

$$R_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -K_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left[(2-\mu)K + 2(K_{yx} + K_{xy}) + \right.$$

$$\left. + D\left(\frac{1-\mu}{2} e_x^2 + 2e_x e_y + \frac{1-\mu}{2} e_y^2\right)\right] \frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y^2}, \tag{21}$$

$$R_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -K_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left[(2-\mu)K + 2(K_{xy} + K_{yx}) + \right.$$

$$\left. + D\left(\frac{1-\mu}{2} e_x^2 + 2e_x e_y + \frac{1-\mu}{2} e_y^2\right)\right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}.$$

K. Trenks a studiat aceeași problemă prin metoda deformațiilor [9]; alegînd ca funcții necunoscute deplasările u, v, w, el stabilește un sistem de trei ecuații cu derivate parțiale, reductibile la o singură ecuație de ordinul opt. Pentru placa neîncărcată cu sarcini de suprafață, ecuația omogenă rezultantă are forma

$$a_1 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + a_2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6\, \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4\, \partial y^4} + a_4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2\, \partial y^6} + a_5 \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} = 0,$$

în care a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sînt constante depinzînd de elementele geometrice și statice ale plăcii ortotrope.

4. SOLUȚIA ECUAȚIEI OMOGENE

Vom presupune pentru cele ce urmează, că placa nu este încărcată cu sarcini distribuite pe suprafață și că ea este simplu rezemată pe două laturi opuse. Anulînd membrul drept al ecuației (14) aceasta devine omogenă:

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \tag{22}$$

Pentru cazul de rezemare considerat, pot fi căutate soluții prin serii trigonometrice cu coeficienți variabili [5], [7]:

$$w(x, y) = \sum_m W_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{23}$$

în care a reprezintă distanța dintre laturile paralele simplu rezemate.

Se arată că funcțiile W_m satisfac ecuația diferențială ordinară

$$W_n^{IV} - \frac{2m^2\pi^2}{a^2}\frac{H}{K_y}W_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4}\frac{K_x}{K_y}W_m = 0. \tag{24}$$

Soluțiile acestei ecuații sînt de forma

$$W_m(y) = \exp\left(r\frac{m\pi y}{a}\right),$$

în care r satisface ecuația caracteristică

$$r^4 - 2\frac{H}{K_y}r^2 + \frac{K_x}{K_y} = 0.$$

Rădăcinile r_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sînt reale și distincte, reale și duble sau complexe conjugate, după cum $H^2 - K_xK_y \gtrless 0$ [5], [7].

Ne vom situa în cazul cînd $H^2 - K_xK_y < 0$.

Rădăcinile r_i pot fi scrise sub forma

$$r_{1,2,3,4} = \pm\alpha \pm i\beta \tag{25}$$

în care

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{K_x}{K_y}} + \frac{H}{K_y}\right)}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{K_x}{K_y}} - \frac{H}{K_y}\right)}. \tag{26}$$

Între părțile reală și imaginară ale rădăcinilor r_i subsistă următoarele relații interesante:

$$\alpha\beta = \frac{\sqrt{K_xK_y - H^2}}{2K_y},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{\frac{K_x}{K_y}}; \quad \alpha^2 - \beta^2 = \frac{H}{K_y}.$$

Soluția generală a ecuației (22) se scrie așadar

$$w = \sum_m \exp\left(-\frac{\alpha m\pi y}{a}\right)\left(C_{1m}\cos\frac{\beta m\pi y}{a} + C_{2m}\sin\frac{\beta m\pi y}{a}\right) +$$

$$+ \exp\left(+\frac{\alpha m\pi y}{a}\right)\left(C_{3m}\cos\frac{\beta m\pi y}{a} + C_{4m}\sin\frac{\beta m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}. \tag{27}$$

Pentru placa ortotropă de tipul semibandă, adică avînd o latură la distanță finită ($y = 0$) și latura opusă aruncată la infinit, în relația (27) urmează să se anuleze partea a doua a soluției, conținînd exponențiala la putere pozitivă, luînd $C_{3m} = C_{4m} = 0$.

Pentru simplificarea scrierii, se notează funcţiile exponenţiale amortizate [1]:

$$\Phi_{1m} = \exp\left(-\frac{\alpha m\pi y}{a}\right)\cos\frac{\beta m\pi y}{a},$$
$$\Phi_{2m} = \exp\left(-\frac{\alpha m\pi y}{a}\right)\sin\frac{\beta m\pi y}{a} \tag{28}$$

şi se calculează derivatele lor pînă la ordinul trei inclusiv:

$$\Phi'_{1m} = -\frac{m\pi}{a}(\alpha\Phi_{1m} + \beta\Phi_{2m}),$$

$$\Phi''_{1m} = \frac{m^2\pi^2}{a^2}[(\alpha^2 - \beta^2)\Phi_{1m} + 2\alpha\beta\Phi_{2m}];$$

$$\Phi'''_{1m} = \frac{m^3\pi^3}{a^3}[-(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)\Phi_{1m} + (-3\alpha^2\beta + \beta^3)\Phi_{2m}];$$

$$\Phi'_{2m} = +\frac{m\pi}{a}(\beta\Phi_{1m} - \alpha\Phi_{2m}),$$

$$\Phi''_{2m} = \frac{m^2\pi^2}{a^2}[-2\alpha\beta\,\Phi_{1m} + (\alpha^2 - \beta^2)\Phi_{2m}],$$

$$\Phi'''_{2m} = \frac{m^3\pi^3}{a^3}[(3\alpha^2\beta - \beta^3)\Phi_{1m} - (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)\Phi_{2m}].$$

5. PLACA ORTOTROPĂ DE LUNGIME SEMIINFINITĂ

Cunoscînd soluţia generală pentru săgeţi, putem stabili expresiile tuturor mărimilor secţionale. Considerînd expresia săgeţilor w sub forma (23), din relaţiile (16), (17), (18) şi (20) rezultă

$$N_x = -D\frac{1-\mu}{2}(e_x + e_y)\sum_m W''_m \sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$N_y = +D\frac{1-\mu}{2}(e_x + e_y)\frac{\pi^2}{a^2}\sum_m m^2 W_m \sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$N_{xy} = N_{yx} = +D\frac{1-\mu}{2}(e_x + e_y)\frac{\pi}{a}\sum_m m W'_m \cos\frac{m\pi x}{a};$$

$$M_x = \sum_m \left[K_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} W_m - \mu(K + De_xe_y) W''_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$M_y = \sum_m \left[-K_y W''_m + \mu(K + De_xe_y) \frac{m^2\pi^2}{a^2} W_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \tag{29}$$

$$M_{xy} = -\frac{\pi}{a} \left\{ (1-\mu) \left[K + e_x(e_x + e_y) \frac{D}{2} \right] + 2K_{xy} \right\} \sum_m m W'_m \cos \frac{m\pi x}{a},$$

$$M_{yx} = -\frac{\pi}{a} \left\{ (1-\mu) \left[K + e_y(e_x + e_y) \frac{D}{2} \right] + 2K_{yx} \right\} \sum_m m W'_m \cos \frac{m\pi x}{a};$$

$$Q_x = \sum_m \left\{ K_x \frac{m^3\pi^3}{a^3} W_m - \frac{m\pi}{a} \left[K + De_y \left(\frac{1+\mu}{2} e_x + \frac{1-\mu}{2} e_y \right) + 2K_{yx} \right] W''_m \right\} \times$$

$$\times \cos \frac{m\pi x}{a},$$

$$Q_y = \sum_m \left\{ -K_y W'''_m + \left[K + De_x \left(\frac{1+\mu}{2} e_y + \frac{1-\mu}{2} e_x \right) + 2K_{xy} \right] \frac{m^2\pi^2}{a^2} W'_m \right\} \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi x}{a}. \qquad (m = 1,2,3,\ldots)$$

Vom trece acum la particularizarea soluției pentru $W_m(y)$, ținînd seama de forma soluției (27), neglijînd pentru semibandă exponențialele neamortizate și folosind notațiile (28). Rezultă astfel:

$$w = \sum_m (C_{1m}\Phi_{1m} + C_{2m}\Phi_{2m}) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\sum_m \frac{m\pi}{a} [(C_{1m}\alpha - C_{2m}\beta)\Phi_{1m} + (C_{1m}\beta + C_{2m}\alpha)\Phi_{2m}] \sin \frac{m\pi x}{a};$$

$$N_x = -D \frac{1-\mu}{2} (e_x + e_y) \frac{\pi^2}{a^2} \sum_m m^2 \{ [C_{1m}(\alpha^2 - \beta^2) - C_{2m} \cdot 2\alpha\beta]\Phi_{1m} +$$

$$+ [C_{1m} \cdot 2\alpha\beta + C_{2m}(\alpha^2 - \beta^2)]\Phi_{2m} \} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$N_y = +D \frac{1-\mu}{2} (e_x + e_y) \frac{\pi^2}{a^2} \sum_m m^2 (C_{1m}\Phi_{1m} + C_{2m}\Phi_{2m}) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$N_{xy} = N_{yx} = -D\frac{1-\mu}{2}(e_x + e_y)\frac{\pi^2}{a^2}\sum_m m^2(C_{1m}\alpha - C_{2m}\beta)\Phi_{1m} +$$

$$+ (C_{1m}\beta + C_{2m}\alpha)\Phi_{2m}]\cos\frac{m\pi x}{a};$$

$$M_x = \frac{\pi^2}{a^2}K_x\sum_m m^2\Big[(C_{1m}\Phi_{1m} + C_{2m}\Phi_{2m}) - \frac{\mu(K + De_xe_y)}{K_x}\{[(\alpha^2-\beta^2)C_{1m} -$$

$$- 2\alpha\beta C_{2m}]\Phi_{1m} + [2\alpha\beta C_{1m} + (\alpha^2 - \beta^2)C_{2m}]\Phi_{2m}\}\Big]\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$M_y = -\frac{\pi^2}{a^2}K_y\sum_m m^2\Big\{[(\alpha^2 - \beta^2)\,C_{1m} - 2\alpha\beta C_{2m}]\Phi_{1m} + [2\alpha\beta C_{1m} +$$

$$+(\alpha^2-\beta^2)C_{2m}]\Phi_{2m} + \mu\frac{K + De_xe_y}{K_y}(C_{1m}\Phi_{1m} + C_{2m}\Phi_{2m})\Big\}\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$M_{xy} = +\frac{\pi^2}{a^2}\Big\{(1-\mu)\Big[K + e_x(e_x + e_y)\frac{D}{2}\Big] + 2K_{xy}\Big\}\sum_m m^2[(C_{1m}\alpha -$$

$$- C_{2m}\beta)\Phi_{1m} + (C_{1m}\beta + C_{2m}\alpha)\Phi_{2m}]\cos\frac{m\pi x}{a}, \qquad (30)$$

$$M_{yx} = +\frac{\pi^2}{a^2}\Big\{(1-\mu)\Big[K + e_y(e_x + e_y)\frac{D}{2}\Big] + 2K_{yx}\Big\}\sum_m m^2[(C_{1m}\alpha + C_{2m}\beta)\Phi_{1m} +$$

$$+ (C_{1m}\beta + C_{2m}\alpha)\,\Phi_{2m}]\cos\frac{m\pi x}{a};$$

$$Q_x = \sum_m \frac{m^3\pi^3}{a^3}\Big(C_{1m}\Phi_{1m} + C_{2m}\Phi_{2m} - \Big[K + De_y\Big(\frac{1+\mu}{2}e_x + \frac{1-\mu}{2}e_y\Big) + 2K_{yx}\Big]\times$$

$$\times\{[(\alpha^2-\beta^2)C_{1m} - 2\alpha\beta C_{2m}]\Phi_{1m} + [(\alpha^2-\beta^2)C_{2m} + 2\alpha\beta C_{1m}]\Phi_{2m}\}\Big)\cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$Q_y = \sum_m \frac{m^3\pi^3}{a^3}\Big(K_y\{[-(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)C_{1m} + (3\alpha^2\beta - \beta^3)C_{2m}]\Phi_{1m} -$$

$$- [(3\alpha^2\beta - \beta^3)C_{1m} + (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)C_{2m}]\Phi_{2m}\} + \Big[K + De_x\Big(\frac{1+\mu}{2}e_y +$$

$$+ \frac{1-\mu}{2}e_x\Big) + 2K_{xy}\Big]\cdot[(-C_{1m}\alpha + C_{2m}\beta)\Phi_{1m} + (C_{1m}\beta - C_{2m}\alpha)\Phi_{2m}]\Big)\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

În particular, pentru $y=0$ corespunde

$$\Phi_{1m}(0) = 1, \quad \Phi_{2m}(0) = 0,$$

şi din relaţiile (30) rezultă

$$w(x,\ 0) = \sum_m C_{1m} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = -\sum_m \frac{m\pi}{a}(C_{1m}\alpha - C_{2m}\beta) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$N_y(x, 0) = +D\frac{1-\mu}{2}(e_x + e_y)\frac{\pi^2}{a^2}\sum_m m^2 C_{1m} \sin \frac{m\pi x}{a}, \tag{31}$$

$$M_y(x, 0) = \frac{\pi^2}{a^2}\sum_m m^2\{[-K_y(\alpha^2 - \beta^2) + \mu(K + De_xe_y)]C_{1m} +$$

$$+ 2\alpha\beta K_y C_{2m}\} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$Q_y(x,\ 0) = \frac{\pi^3}{a^3}\sum_m m^3\Big\{K_y(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2)C_{1m} - (3\alpha^2\beta - \beta^3)C_{2m}] -$$

$$-\left[K + De_x\left(\frac{1+\mu}{2}e_y + \frac{1-\mu}{2}e_x\right) + 2K_{xy}\right](C_{1m}\alpha - C_{2m}\beta)\Big\} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Constantele de integrare urmează să fie determinate din condiţii la limită, la marginea $y = 0$.

În partea a doua a studiului va fi studiată acţiunea unei sarcini liniare $P(x)$ şi, pe baza unor exemple de calcul, vor fi trase unele concluzii şi vor fi făcute unele observaţii critice asupra teoriei dezvoltate, bazate pe netezirea nervurilor de rigidizare.

Primit la redacţie la 11 februarie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Beleş, A. A., Soare M., *Paraboloidul eliptic şi hiperbolic în construcţii*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1964.
2. Beleş I., *Contribuţii la calculul construcţiilor metalice hidrotehnice, cu elementele de rezistenţă din tablă şi grinzi, ţinînd seama de efectul de conlucrare spaţială*, Teză de doctorat, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1972.
3. Buca I. Gh., *Contribuţii la definirea stării-limită de deformaţie a platelajelor ortotrope ale podurilor metalice*, Teză de doctorat, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1970.
4. Giencke E., *Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen*, Der Stahlbau, **24**, *6*, 128 — 129 (1955).
5. Girkmann, K., *Flächentragwerke*, Ed. 6-a, Springer-Verlag, Wien, 1963.
6. Massonnet, Ch., *Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques*, Association Internationale des Ponts et Charpentes, Mémoires, vol. 19, Zürich, 201 — 230, 1959.
7. Timoshenko, St. P., Wo:nowsky-Krieger, S., *Teoria plăcilor plane şi curbe*, Ed. 2-a (trad. din l. engleză), Ed. tehnică, Bucureşti, 1968.
8. Trenks, K., *Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten*, Der Bauingenieur, **29**, *10*, 372 — 377 (1954).
9. Troitsky, M. S., *Orthotropic Bridges. Theory and Design*, The James F. Lincoln. Arc Welding Foundation, Cleveland, Ohio, 1967.

CALCULUL RADIERELOR RIGIDE PE COLOANE

de G. ONU

I.T.A.N.A.

Se prezintă o metodă pentru calculul eforturilor în coloanele unei fundații cu radier rigid.

Se ia în considerație stratificația terenului de fundație, iar în cazul radierelor înalte, se ține seama și de înclinarea feței terenului natural.

Este prezentat un program scris în FORTRAN, pentru calculul acestui tip de fundație.

Utilizarea coloanelor forate la lucrările de construcții s-a dovedit a fi un procedeu de fundare de mare eficiență economică. Posibilitatea construirii radierului deasupra apelor subterane și în unele situații chiar deasupra nivelului apei de suprafață conduce în multe cazuri la soluții tehnice deosebit de ieftine.

În literatura tehnică sînt date metode pentru calculul acestui tip de fundație. Bibliografia cercetată relevă însă o limitare a domeniului de utilizare a acestor metode; restricția vine de la faptul că se desconsideră posibilitatea existenței în cadrul aceleași fundații a unor coloane cu rigidități diferite.

În general, proiectarea radierelor pe coloane forate este dificilă, din cauza unei slabe cunoașteri a fenomenului fizic, un aspect esențial insuficient studiat fiind constituit de interacțiunea coloană-teren. Considerarea încastrării elastice în teren, presupune adoptarea unei ipoteze referitoare la legea de variație a coeficientului de pat în lungul coloanelor. În lucrările [12], [8], [7] se recomandă considerarea unei variații continue a coeficientului de pat pe toată lungimea coloanelor. Această ipoteză nu este întotdeauna satisfăcătoare. În cazul pămînturilor neomogene, cu o stratificație diversă, coeficientul de pat poate varia după legi diferite

pe grosimea fiecărui strat de teren în parte. Pentru astfel de cazuri în [1] şi [4] se preconizează utilizarea unei legi de variaţie cu un punct de discontinuitate, iar în [11] se recomandă o repartiţie constantă pe straturi a coeficientului de pat.

În cele ce urmează, tratînd aspectul static al problemei, se va prezenta un algoritm şi un program pentru calculul radierelor pe coloane valabil în orice ipoteză de variaţie a coeficientului de pat. Se va examina cazul general de solicitare şi comportare în spaţiu, neimpunînd nici o restricţie asupra rigidităţii coloanelor şi a dispunerii acestora în cadrul fundaţiei.

Programul poate fi utilizat şi pentru calculul fundaţiilor pe piloţi.

Observaţie. Deoarece în continuare se fac referiri şi la coloanele unor matrice, pentru a evita eventualele confuzii se va înlocui peste tot unde apare cuvîntul coloană (din fundaţie) prin cuvîntul pilot.

1. METODA DE CALCUL

Se consideră un radier pe piloţi, infinit rigid, căruia i se afectează un sistem de axe de coordonate *oxyz* ca în figura 1.

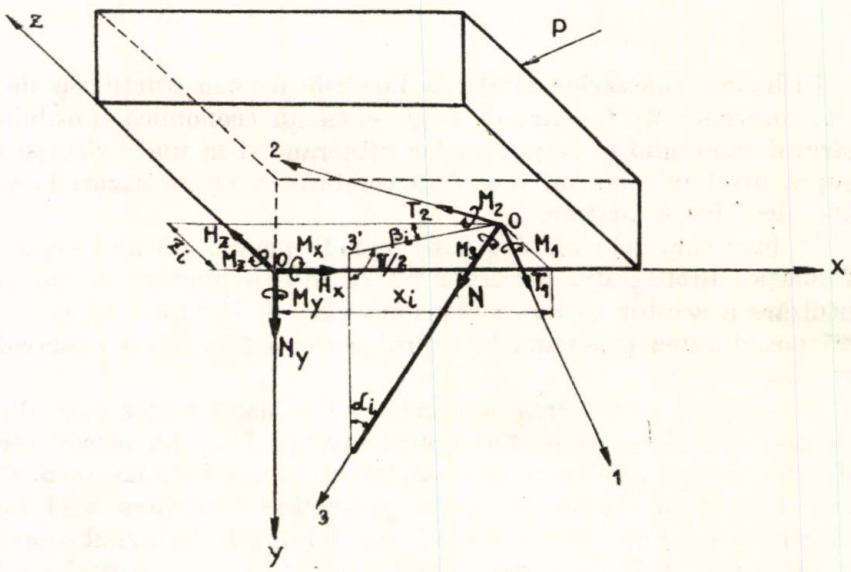


Fig. 1

Radierul este solicitat de o sarcină exterioară oarecare P ale cărei componente după direcţiile axelor ox, oz şi oy sînt forţele Hx, Hz, Ny şi momentele Mx, Mz, My. Sub acţiunea sarcinii exterioare piloţii se

deformează, iar radierul se deplasează într-o poziţie vecină. Noua poziţie a radierului este unic determinată dacă se cunosc translaţiile şi rotirile în lungul şi, respectiv, în jurul axelor ox, oz şi oy.

Pentru a determina aceste deplasări se poate proceda astfel:

— se introduc şase legături suplimentare, corespunzătoare celor şase grade de libertate ale radierului, legături care blochează translaţiile şi rotirile după direcţiile axelor sistemului de referinţă;

— se suprimă succesiv cîte o legătură şi se imprimă radierului o deplasare arbitrară pe direcţia legăturii suprimate, deplasare compatibilă cu restul legăturilor rămase;

— se calculează reacţiunile, forţe şi momente, care apar la capul piloţilor sub acţiunea deplasărilor arbitrar date;

— se proiectează reacţiunile după direcţiile axelor de coordonate şi se scriu şase condiţii de echilibru egalînd aceste proiecţii cu componentele sarcinii exterioare. Se obţine un sistem de şase ecuaţii liniare din care rezultă cele şase componente ale deplasării radierului.

Acest procedeu de calcul se încadrează în metoda generală a deplasărilor şi se pretează la o tratare matriceală.

2. SISTEMELE DE REFERINŢĂ

Vom numi sistemul axelor de coordonate $oxyz$, sistemul general de referinţă al radierului. În figura 1 este reprezentat radierul şi un pilot oarecare i. Poziţia pilotului i în cadrul sistemului general de referinţă este precizată prin:

— coordonatele x_i şi z_i ale capului pilotului;

— unghiul α_i făcut de pilot cu verticala;

— unghiul β_i făcut de proiecţia pilotului pe planul xoz (dreapta $03'$ din figura 1), cu axa ox.

Fiecare pilot are un sistem de referinţă propriu. Originea sistemului se găseşte la capul pilotului, axele sale fiind orientate astfel:

— axa $o1$, normală pe axul longitudinal al pilotului, este conţinută în planul vertical în care se găseşte pilotul;

— axa $o2$, normală pe axa $o1$, se găseşte în plan orizontal;

— axa $o3$ se confundă cu axul longitudinal al pilotului.

În cazul piloţilor verticali, axele $o1$, $o2$ şi $o3$ sînt paralele cu axele ox, oz şi respectiv oy.

În figura 2 sînt reprezentate cele cinci poziţii pe care le poate ocupa un pilot faţă de sistemul general de referinţă; pentru fiecare poziţie se indică orientarea axelor sistemului propriu în raport cu axele sistemului general de referinţă.

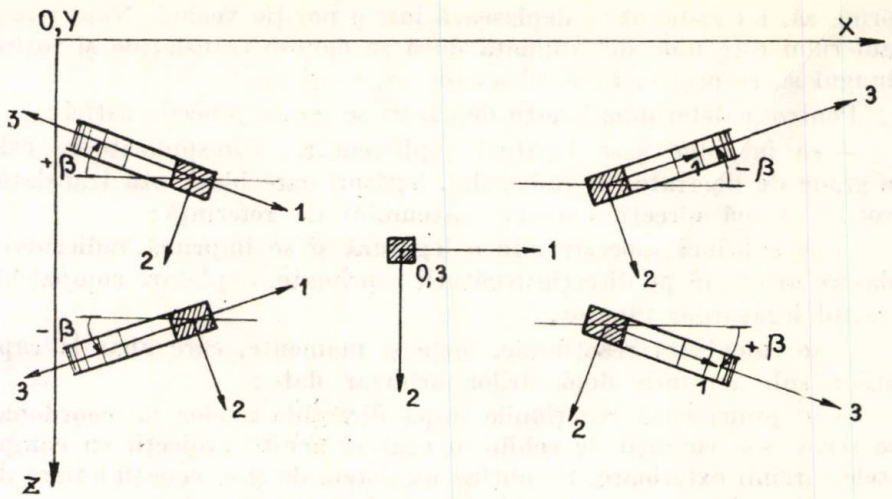


Fig. 2

3. SOLICITĂRILE PILOȚILOR

În cazul cel mai general de solicitare a radierului, în piloți apar forțe axiale, momente încovoietoare, forțe tăietoare și momente de torsiune. Deoarece sistemul de referință propriu al pilotului are o orientare arbitrară în raport cu încărcarea exterioară, pilotul se consideră supus unei solicitări de încovoiere după două direcții.

Se notează :

$$S_i = \begin{vmatrix} N \\ T_1 \\ T_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} \delta_3 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Vectorul S_i are drept elemente solicitările de la capul pilotului i, după direcțiile axelor sistemului de referință propriu (fig. 1).

Vectorul Δ_i are drept elemente deplasările capului pilotului i în sistemul de referință propriu, deplasări produse prin încărcarea radierului cu sarcina exterioară.

Trecerea de la deplasări la solicitări se realizează prin transformarea

$$S_i = R_i \cdot \Delta_i, \tag{2}$$

în care R_i este matricea de rigiditate a pilotului i

$$R_i = \begin{vmatrix} K_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{t1} & 0 & 0 & -K_{m1} & 0 \\ 0 & 0 & K_{t2} & K_{m2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{m2} & K_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{m1} & 0 & 0 & K_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_u \end{vmatrix}_i . \tag{3}$$

Semnificaţia elementelor matricei R_i rezultă prin particularizare, considerînd pe rînd cîte un singur element diferit de zero în vectorul Δ_i din relaţia (2).

4. CONVENŢIE DE SEMNE

Forţele tăietoare şi forţa axială sînt pozitive dacă sînt orientate în sensul pozitiv a axelor de coordonate.

Momentele încovoietoare şi momentul de torsiune sînt pozitive dacă vectorii-moment sînt orientaţi în sensul pozitiv al axelor şi se adoptă regula şurubului stîng.

Deplasările, translaţii şi rotiri, sînt pozitive dacă se produc în sensul pozitiv al forţelor şi momentelor.

Pentru componentele încărcării exterioare şi pentru deplasările radierului se adoptă aceeaşi convenţie de semne.

Toate solicitările reprezentate în figura 1 sînt pozitive.

5. RIGIDITĂŢILE PILOŢILOR

Se consideră un pilot asupra căruia acţionează succesiv încărcările : $N = 1$, $M_t = 1$, $M = 1$ şi $H = 1$ (fig. 3). Rigidităţile pilotului pot fi exprimate în funcţie de deplasările produse de aceste încărcări :

$$\begin{aligned} K_n &= 1/y_N, \\ K_t &= \varphi_M/\delta, \\ K_i &= y_H/\delta, \\ K_m &= \varphi_H/\delta = y_M/\delta, \\ K_u &= 1/\varphi_t \quad (\varphi_t = \text{rotirea de torsiune produsă de momentul de răsucire } M_t = 1). \end{aligned} \tag{4}$$

A fost utilizată notaţia : $\delta = \varphi_M \cdot y_H - y_M^2$.

În matricea R_i rigidităţile K_t, K_i, şi K_m sînt afectate de indicele 1 sau 2, după cum se referă la direcţia de solicitare 1 sau 2.

Valorile rigidităţilor depind de dimensiunile pilotului, mărimea modulului de elasticitate al pilotului, poziţia acestuia în ansamblul fundaţiei şi de natura terenului de fundaţie. Rigidităţile care caracterizează comportarea pilotului la încovoiere (K_i, K_t, K_m) sînt funcţie şi de legea de variaţie a coeficientului de pat în lungul pilotului, iar în cazul radierelor înalte depind şi de lungimea liberă a pilotului. Dacă faţa terenului este înclinată, piloţii vor avea rigidităţi diferite chiar dacă terenul de fundaţie este omogen.

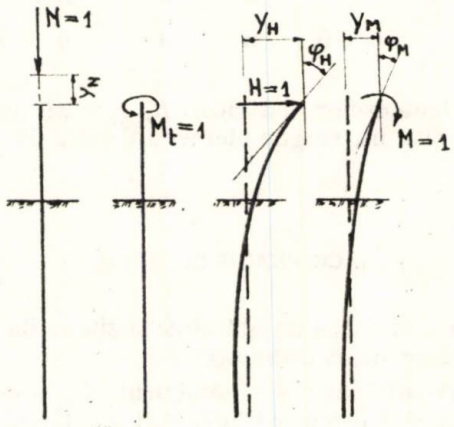


Fig. 3

Utilizarea piloţilor de probă constituie cea mai bună cale de determinare a rigidităţilor de calcul. După stabilirea, pe baza măsurătorilor a deplasărilor elastice ale capului pilotului, se calculează, cu ajutorul relaţiilor (4), rigidităţile căutate.

Determinarea pe cale pur analitică a rigidităţilor de calcul este recomandabilă numai în cazurile în care se cunosc bine caracteristicile terenului de fundaţie.

Pentru calculul rigidităţii axiale, în [8] se recomandă utilizarea următoarei relaţii :

$$K_n = A_c/(l_c/E_c + b_1/b_2).$$

Semnificaţia termenilor :

A_c = aria secţiunii pilotului (m^2),

l_c = lungimea pilotului (m),

b_1 = $d/5$; dacă diametrul d este mai mare de 5 metri, se va lua $b_1 = 1$.

b_2 = valoarea coeficientului de pat la nivelul vîrfului pilotului (t/m^3).

Pentru valoarea rigidităţii la torsiune K_u, în [8] se recomandă să se ia un procent din valoarea rigidităţii la încovoiere K_i :

$$K_u = 0{,}2K_i.$$

Dacă rigidităţile la încovoiere sînt diferite pe direcţiile principale 1 şi 2, rigiditatea la torsiune se poate calcula cu relaţia aproximativă

$$K_u = 0{,}1(K_{i1} + K_{i2}).$$

Pentru determinarea rigidităţilor care caracterizează comportarea la încovoiere a piloţilor se va da în continuare a metodă de calcul care ia în consideraţie succesiunea reală a stratificaţiei pămîntului şi ţine cont de panta terenului natural.

6. CALCULUL DEPLASĂRILOR y_H, φ_H, y_M ŞI φ_M

Piloţii radierului se consideră grinzi pe mediu elastic. Se admite că în orice punct al grinzii reacţiunea terenului este proporţională cu săgeata, factorul de proporţionalitate fiind coeficientul de pat.

În cele ce urmează se va considera că contactul dintre pilot şi mediul elastic se face prin intermediul unui număr finit de legături punctuale astfel încît pilotul poate fi asimilat cu o grindă pe reazeme elastice (fig. 4*a*).

6.1. DETERMINAREA REACŢIUNILOR UNITARE

Caracteristicile elastice ale reazemelor depind de mărimea coeficientului de pat în dreptul fiecărui reazem; depind deci de natura

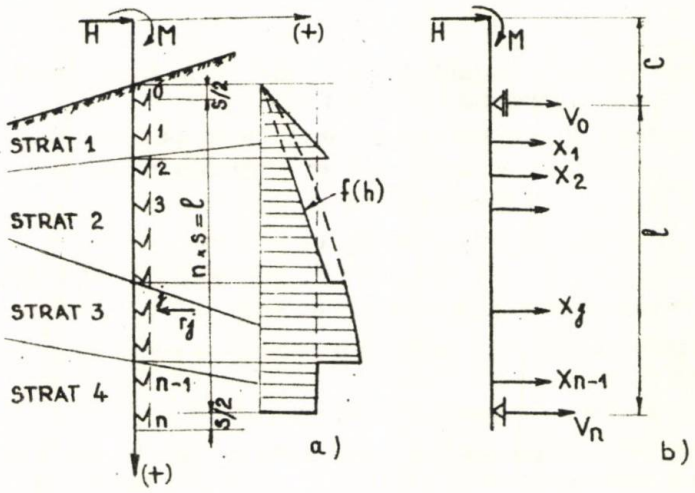


Fig. 4

stratului de teren în care se găseşte reazemul considerat şi de adîncimea acestuia.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

Vectorul coloană R_s conţine reacţiunile unitare ale tuturor reazemelor elastice ale pilotului

$$R_s = \begin{vmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{vmatrix} . \tag{5}$$

Se mai notează :

$$R_s^* = \begin{vmatrix} r_1 & & & & & \\ & r_2 & & & 0 & \\ & & r_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r_j & \\ & & & & & \ddots \\ & 0 & & & & \\ & & & & & r_{n-1} \end{vmatrix} . \tag{5'}$$

Elementul curent r_j reprezintă reacţiunea din reazemul j corespunzătoare unei săgeţi unitare şi se calculează cu relaţia

$$r_j = f(h) \cdot C_0 \cdot S \cdot d^*, \tag{6}$$

în care

h este distanţa măsurată pe verticală de la faţa terenului natural pînă la reazemul considerat,

$f(h)$ — legea de variaţie a coeficientului de pat cu adîncimea. După [12] se recomandă utilizarea următoarelor legi de variaţie :

$f(h) = 1$ pentru argile compacte,

$f(h) = h$ pentru terenuri necoezive,

$f(h) = \sqrt{h}$, sau altă variaţie parabolică, pentru alte terenuri.

$f(h)$ trebuie considerat fără dimensiuni.

În figura 4*a* este reprezentată o variaţie a coeficientului de pat în lungul unui pilot.

C_0 — valoarea coeficientului de pat (t/m³).

În [2] este intabulat un coeficient m_0 (t/m⁴) care caracterizează variaţia cu adîncimea a coeficientului de pat. C_0 se va lua egal cu valoarea lui m_0 corespunzătoare adîncimii de un metru.

S — distanţa între legături. Utilizînd calculatorul, distanţa între legături poate fi luată oricît de mică, practic însă, este suficientă o distanţă egală cu jumătate din diametrul pilotului,

d^* — diametrul de calcul al pilotului. În [8] se recomandă ca aceasta să se determine cu relaţia

$$d^* = 0{,}9 \cdot (d + 1) \cdot \left(\beta + \frac{1 - \beta}{6} \frac{a_1}{a_2}\right), \tag{7}$$

în care

d este diametrul pilotului (m),

a_1 — lumina între piloţi (m),

a_2 — adîncimea de introducere a pilotului în teren (m),

β — 1, 0.6, 0.5, sau 0.45 după cum numărul piloţilor dintr-un rînd este egal cu 1, 2, 3 sau mai mare de 3.

6.2. CALCULUL GRINZII PE REAZEME ELASTICE

Gradul de nedeterminare statică al grinzii din figura 4*a* este egal cu numărul reazemelor intermediare ($n-1$). Se alege drept formă de bază grinda cu console, rezemată în dreptul legăturilor 0 şi n (fig. 4*b*), necunoscutele statice fiind reacţiunile din reazemele 1, 2,..., $n-1$.

Utilizînd metoda generală a forţelor, sistemul ecuaţiilor de condiţie are forma :

$$A \cdot X_p + B_p = 0, \tag{8}$$

unde

$$A = \| a_{ij} \| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

reprezintă matricea coeficienţilor necunoscutelor statice;

$$B_p = [B_H, B_M] = \| b_{ip} \| \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \ (p = H, M)$$

reprezintă matricea termenilor liberi;

$$X_p = [X_H, X_M] = \| x_{ip} \| \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \ (p = H, M)$$

reprezintă matricea necunoscutelor statice.

B_H, B_M, X_H şi X_M sînt vectori coloană,

i reprezintă indicele de linie.

Ecuaţia matriceală (8) rezolvată pentru încărcările H şi M are soluţia (9)

$$[X_H, X_M] = -A^{-1} \cdot [B_H, B_M]. \tag{9}$$

Calculul elementelor a_{ij} şi b_{ip} se face prin metoda micilor deplasări ([9], [10]).

6.2.1. *Matricea coeficienţilor.* Se calculează mai întîi săgeţile grinzii simple rezemate $o-n$, în dreptul legăturilor intermediare, produse de o

forță unitară concentrată în deschidere. Forța se consideră aplicată în una din secțiunile 1, 2, ..., $n-1$. Matricea de influență a momentelor încovoietoare este

$$L_M = \frac{l}{n^2} \cdot I_{n-1}, \tag{10}$$

în care I_{n-1} reprezintă matricea naturală centrifugală de ordinul $n-1$.

Sarcinile elastice se obțin din relația matriceală

$$W_j = \frac{S}{6E_c \cdot I_c} \cdot B^{(4,1)} \cdot M_j, \tag{11}$$

în care

E_c este modulul de elasticitate al pilotului,

I_c, momentul de inerție al pilotului,

$B^{(4,1)}$ este o matrice Jakobi cu $n-1$ linii,

M_j este vectorul diagramei de momente produse de sarcina $q=1$ aplicată în secțiunea j.

Dacă în locul vectorului M_j se introduce matricea L_M, se obține matricea sarcinilor elastice:

$$W = \frac{l^2}{6 \cdot E_c \cdot I_c \cdot n^3} \cdot B^{(4,1)} I_{n-1}. \tag{12}$$

Produsul $L_M \cdot W$ dă matricea săgeților:

$$Y_A = \frac{l^3}{6 \cdot E_c \cdot I_c \cdot n^5} \cdot I_{n-1} \cdot B^{(4,1)} \cdot I_{n-1}. \tag{13}$$

Deoarece

$$I_{n-1} \cdot B^{(\alpha,\beta)} \cdot I_{n-1} = I_{n-1} \cdot (\alpha + 2\beta) - I_{n-1} \cdot \beta \cdot n,$$

(relația 12,28 din [10]), vom avea

$$Y_A = \frac{l^3}{E_c \cdot I_c \cdot n^5} \cdot \left(I_{n-1}^2 - \frac{n}{6} \cdot I_{n-1} \right). \tag{14}$$

Pentru a obține săgețile totale trebuie adăugat efectul cedării reazemelor o și n.

Se notează cu N_k și N_k^* vectorii șirului primelor k numere naturale:

$$N_k = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k \end{vmatrix}, \qquad N_k^* = \begin{vmatrix} k \\ k-1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Săgeţile produse în deschidere prin cedarea reazemelor o şi n se exprimă funcţie de aceşti vectori :

$$Y_A^* = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{r_0}\cdot N_{n-1}^*\cdot N_{n-1}^{*T} + \frac{1}{r_n}\cdot N_{n-1}\cdot N_{n-1}^T\right), \tag{16}$$

r_0, r_n sînt reacţiunile unitare ale reazemelor o şi n.

Matricea A are alcătuirea :

$$A = Y_A + Y_A^* + R_s^{*-1}. \tag{17}$$

6.2.2. *Matricea termenilor liberi.* Se consideră grinda din figura 4*b* încărcată cu o sarcină oarecare pe consolă. Se notează cu M_{op} momentul încovoietor de pe reazemul o şi cu V_{op} şi V_{np} reacţiunile produse de această încărcare.

Vectorul sarcinilor elastice se calculează cu relaţia (18).

$$W_p = \frac{l\cdot M_{op}}{E_c\cdot I_c\cdot n^2}\cdot N_{n-1}^*. \tag{18}$$

Săgeţile produse de momentul încovoietor M_{op}, în secţiunile $1,2,\ldots,$ $n-1$ ale grinzii se determină astfel :

$$Y_p' = \frac{l}{n^2}\cdot I_{n-1}\cdot W_p = \frac{l^2\cdot M_{op}}{E_c\cdot I_c\cdot n^4}\cdot I_{n-1}\cdot N_{n-1}^*. \tag{19}$$

Datorită cedării reazemelor o şi n apar săgeţile suplimentare Y_p'',

$$Y_p'' = \frac{V_{op}}{n\cdot r_0}\cdot N_{n-1}^* + \frac{V_{np}}{n\cdot r_n}\cdot N_{n-1}. \tag{20}$$

Săgeţile totale se calculează cu relaţia (21)

$$Y_p = \left(\frac{l^2\cdot M_{op}}{E_c\cdot I_c\cdot n^4} I_{n-1} + \frac{V_{op}}{n\cdot r_0}\right)\cdot N_{n-1}^* + \frac{V_{np}}{n\cdot r_n}\cdot N_{n-1}. \tag{21}$$

Dacă M_{op}, V_{op} şi V_{np} se înlocuiesc cu valorile corespunzătoare celor două cazuri de încărcare avute în vedere, relaţia (21) furnizează matricea termenilor liberi din (8).

— Pentru $H = 1$ şi $M = 0$,

$$M_{op} = c, \quad V_{op} = -\left(1 + \frac{c}{l}\right); \quad V_{np} = \frac{c}{l};$$

— Pentru $H = 0$, $M = 1$, (22)

$$M_{op} = 1, \quad V_{op} = -\frac{1}{l}, \quad V_{np} = \frac{1}{l}$$

(în fig. 4*b*, reacţiunile V_{op} şi V_{np} sînt reprezentate în sensul pozitiv).

Cu ajutorul eforturilor din legături, determinate cu relaţia (9), se calculează deplasările la capul pilotului precum şi eforturile şi săgeţile în lungul lui.

6.2.3. *Deplasările la vîrful consolei formei de bază.* Se consideră cunoscute componentele matricei X_p, produse de încărcările $H = 1$ şi $M = 1$. Corespunzător acestor încărcări, în reazemele o şi n, apar reacţiunile V^x_{op} şi V^x_{np}:

$$V^x_{op} = |V^x_{OH},\ V^x_{OM}| = \frac{1}{n}\cdot N^{*T}_{n-1}\cdot [X_H,\ X_M],$$
$$V^x_{np} = |V^x_{nH},\ V^x_{OM}| = \frac{1}{n}\cdot N^{T}_{n-1}\cdot [X_H,\ X_M]. \tag{23}$$

Rotirea fibrei medii a formei de bază în dreptul reazemului o, produsă de forţele X_p, se calculează cu relaţia

$$\varphi_{op} = |\varphi_{OH},\ \varphi_{OM}| = \frac{1}{n}\cdot N^{*T}_{n-1}\cdot W_p, \tag{24}$$

$$W_p = [W_H,\ W_M] = \frac{l^2}{6E_c\cdot I_c\cdot n^3}\cdot B^{(4,1)}\cdot I_{n-1}\cdot [X_H, X_M] \tag{25}$$

reprezintă matricea sarcinilor elastice corespunzătoare diagramelor de momente produse de forţele X_H şi X_M pe forma de bază.

Săgeata şi rotirea la vîrful consolei produse de necunoscutele statice X_p, se determină cu relaţiile

$$y'_p = \frac{V^x_{op}}{r_0} + \left(\frac{V^x_{op}}{r_0} - \frac{V^x_{np}}{r_n}\right)\cdot\frac{c}{l} - c\cdot\varphi_{op},$$
$$\varphi'_p = \left(\frac{V^x_{op}}{r_0} - \frac{V^x_{np}}{r_n}\right)\cdot\frac{1}{l} - \varphi_{op} \quad (p = H,\ M). \tag{26}$$

Săgeata şi rotirea totală se calculează adăugînd şi efectul acţiunii directe a încărcării exterioare (H sau M) asupra formei de bază:

$$y_p = \frac{c^2\cdot(l+c)}{3\cdot E_c\cdot I_c} - \left(\frac{V_{op}}{r_o} + \frac{V_{np}}{r_n}\right)\cdot\frac{c}{l} - \frac{V_{op}}{r_0} + y'_p,$$
$$\varphi_p = \frac{c\cdot(2l+3c)}{6\cdot E_c\cdot I_c} - \left(\frac{V_{op}}{r_0} + \frac{V_{np}}{r_n}\right)\cdot\frac{1}{l} + \varphi'_p \quad (p = H,\ M). \tag{27}$$

Pentru a obţine valorile efective ale deplasărilor y_H, φ_H, φ_M, y_M, va trebui să se introducă în relaţiile (27) expresiile reacţiunilor date de relaţiile (22), iar în (23) şi (25) soluţiile (9) corespunzătoare încărcării cu $H = 1$ ori $M = 1$.

7. DEPLASĂRILE RADIERULUI

Se imprimă radierului un set de şase deplasări arbitrare, trei translaţii şi trei rotaţii, în lungul şi, respectiv, în jurul axelor sistemului general de referinţă. Matricea diagonală Δ^* conţine aceste deplasări :

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} \Delta_y & & & & & \\ & \Delta_x & & & 0 & \\ & & \Delta_z & & & \\ & & & \theta_x & & \\ & 0 & & & \theta_z & \\ & & & & & \theta_y \end{vmatrix} . \tag{28}$$

Transformarea

$$\Delta_i^* = \Delta^* \cdot D_i \tag{29}$$

furnizează deplasările capului pilotului i în sistemul de referinţă propriu. Fiecare linie a matricei Δ_i^* are ca elemente deplasările pilotului raportate la sistemul de referinţă propriu, corespunzătoare unei singure deplasări arbitrare din cele şase imprimate radierului.

D_i este deci o matrice de transformare a deplasărilor :

$$D_i = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha\cdot\cos\beta & \cos\alpha\cdot\cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha\cdot\sin\beta & \cos\alpha\cdot\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ -z\cdot\cos\alpha & -z\cdot\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\cdot\cos\beta & -\sin\beta & -\sin\alpha\cdot\cos\beta \\ x\cdot\cos\alpha & x\cdot\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\cdot\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha\cdot\sin\beta \\ -\omega\cdot\sin\alpha & \omega\cdot\cos\alpha & -v & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix}_i , \tag{30}$$

$$v = z\cdot\sin\beta + x\cdot\cos\beta\,; \quad \omega = z\cdot\cos\beta - x\cdot\sin\beta \tag{30'}$$

(unghiurile α şi β trebuie să fie considerate afectate cu indicele i).

Componentele reacţiunilor pilotului i, raportate la sitemul de referinţă propriu, provocate de fiecare deplasare arbitrar dată radierului, se calculează cu relaţia

$$S_i^* = \Delta^* \cdot D_i \cdot R_i . \tag{31}$$

Dacă se însumează pe coloane elementele matricei S_i^*, se obţin reacţiunile rezultante :

$$S_i^T = - E_v \cdot S_i^* , \tag{31'}$$

E_v, este un vector linie cu toate elementele egale cu unitate.

S_i^T este transpusul vectorului S_i din relaţiile (1).

Semnul minus se datorește faptului că reacțiunile radierului se consideră cu semne contrarii eforturilor de la capul pilotului.

Proiectarea componentelor reacțiunilor (elementele matricei S_i^*) după direcțiile axelor sistemului general de referință se realizează înmulțind la dreapta matricea S_i^* cu transpusa matricei D_i:

$$V_i^* = \Delta^* \cdot D_i \cdot R_i \cdot D_i^T, \tag{32}$$

cu relația (32') se calculează reacțiunile rezultante raportate la sistemul general de referință:

$$V_i = \Delta^* \cdot D_i \cdot R_i \cdot D_i^T \cdot E_v^T. \tag{32'}$$

Se notează cu Δ vectorul coloană care conține cele șase deplasări date radierului (elementele de pe diagonala matricei Δ^*).

Deoarece matricea R_i este simetrică în raport cu diagonala principală și deci $R_i = R_i^T$, are loc egalitatea:

$$\Delta^* \cdot D_i \cdot R_i \cdot D_i^T \cdot E_v^T = D_i \cdot R_i \cdot D_i^T \cdot \Delta. \tag{33}$$

Se notează cu P vectorul componentelor încărcării exterioare (pct. 2)

$$P = \begin{vmatrix} N_y \\ H_x \\ H_z \\ M_x \\ M_z \\ M_y \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Radierul se găsește în echilibru dacă este îndeplinită condiția

$$\sum_{i=1}^{m} V_i = P, \tag{35}$$

în care m reprezintă numărul piloților fundației.

Ținînd seama de egalitatea (33), relația (35) devine:

$$\left[\sum_{i=1}^{m} D_i \cdot R_i \cdot D_i^T\right] \cdot \Delta = P. \tag{35'}$$

Înmulțind la stînga egalitatea (35') cu inversa matricei din paranteză, se obțin deplasările reale ale radierului

$$\Delta = \left[\sum_{i=1}^{m} D_i \cdot R_i \cdot D_i^T\right]^{-1} \cdot P. \tag{36}$$

Observație. La relația (35') se putea putea ajunge pe o cale mai scurtă observînd că

$$S_i = - R_i \cdot D_i^T \cdot \Delta. \tag{36'}$$

Am ales totuși calea descrisă deoarece oferă mai multe posibilități de verificare pe parcurs.

8. CALCULUL STATIC AL UNUI PILOT

Se consideră schema statică din figura 4*b* solicitată simultan de H, M şi eforturile din legăturile 1, 2,..., $n-1$. Vectorul X are drept elemente aceste eforturi:

$$X = H \cdot X_H + M \cdot X_M. \tag{37}$$

Vectorii X_H şi X_M se obţin din soluţia (9).

Pentru H şi M se consideră două ipoteze de încărcare:

$$\begin{aligned} &1)\ H = T_1, \quad M = M_2, \\ &2)\ H = T_2, \quad M = M_1, \end{aligned} \tag{38}$$

T_1, T_2, M_1 şi M_2 se capătă din relaţia (31') sau (36').

Relaţii de calcul:

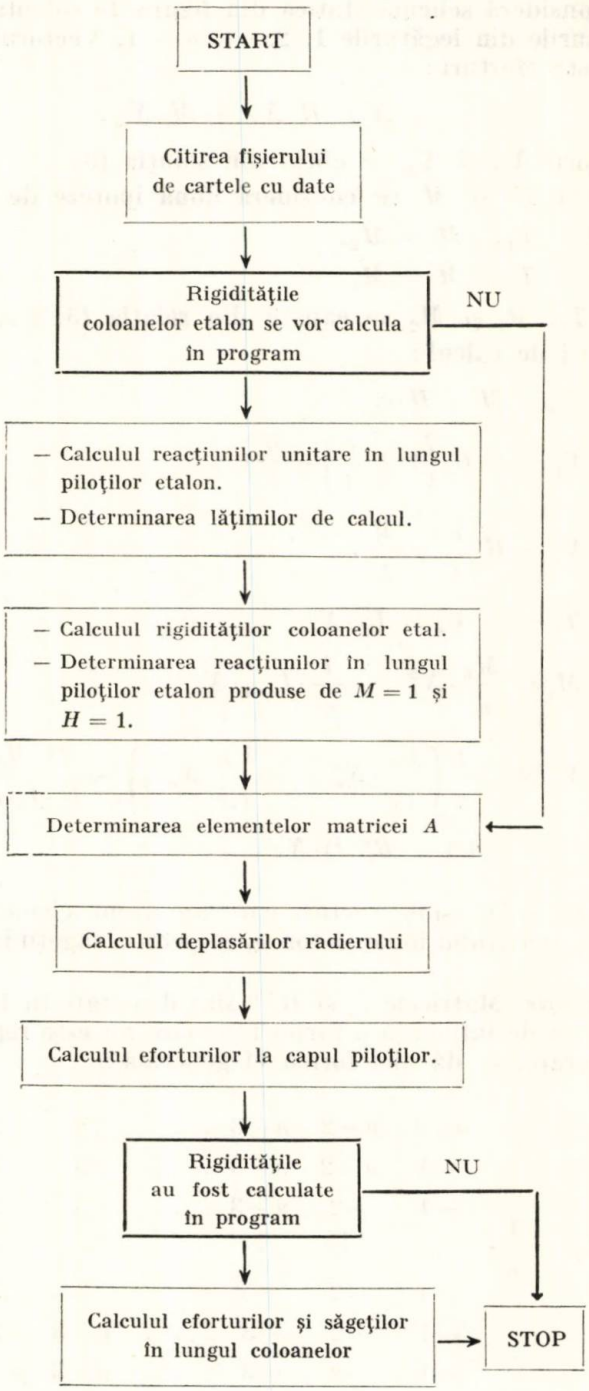
$$\begin{aligned} M_0 &= M + H \cdot c, \\ V_0 &= -H \cdot \left(1 + \frac{c}{l}\right) - \frac{M}{l}, \\ V_n &= H \cdot \frac{c}{l} + \frac{M}{l}, \\ T_l &= -V_n - L_T \cdot X, \\ M_l &= \frac{M_0}{n} \cdot N^*_{n-1} - \frac{l}{n^2} \cdot I_{n-1} \cdot X, \\ Y_l &= -\frac{1}{n}\left(\frac{V_0}{r_0} \cdot N^*_{n-1} + \frac{V_n}{r_n} \cdot N_{n-1}\right) - \frac{l^2 \cdot M_0}{E_c \cdot I_c \cdot n^4} \cdot I_{n-1} \cdot N^*_{n-1} + \\ &\quad + (A - R_s^{*-1}) \cdot X, \end{aligned} \tag{39}$$

T_l, M_l şi Y_l sînt vectori care au drept elemente valorile forţei tăietoare, momentului încovoietor şi, respectiv, săgeţii în punctele 1,2,..., $n-1$.

Observaţie. Matricele I_n şi $B^{(4,1)}$ sînt discutate în lucrarea [9]. Deoarece matricea de influenţă a forţei tăietoare nu este reprodusă nicăieri în această lucrare, se dă aici forma ei generală:

$$L_T = \frac{1}{n} \cdot \begin{vmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n-3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n-3 & n-2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Schema bloc a programului RADIER



9. PREZENTAREA PROGRAMULUI

Programul RADIER destinat calculului fundaţiilor pe coloane sau piloţi este scris în Fortran şi solicită o memorie operativă de circa 70 KB. Nu are nevoie de discuri sau benzi de lucru. Datele se introduc pe cartele perforate.

În vederea completării cartelelor de date este necesar să se fixeze sistemul general de referinţă ca în figura 1.

Toate coloanele fundaţiei se consideră dispuse în rînduri. Rîndurile, întotdeauna paralele cu axa ox, se numerotează astfel încît cele care se repetă ca dispoziţie, să primească acelaşi număr.

Se aleg coloanele pentru care urmează să se calculeze rigidităţile. Acestea, numite coloane etalon, se numerotează succesiv. Restul coloanelor fundaţiei primesc numărul coloanei etalon cu care se aseamănă, avînd aceleaşi rigidităţi şi aceeaşi orientare (unghiurile α şi β identice).

În vederea economisirii memoriei calculatorului, numărul coloanelor etalon a fost limitat la maximum zece. Evident, în funcţie de calculatorul utilizat, această limită poate fi schimbată operînd modificări corespunzătoare în partea de declaraţii a programului.

Programul poate fi utilizat în două variante de introducere a datelor :

a) Dacă nu se cunosc rigidităţile coloanelor etalon, este necesar să se dea date asupra stratificaţiei terenului.

Programul furnizează deplasările radierului, eforturile la capul coloanelor precum şi variaţia eforturilor şi săgeţilor în lungul coloanelor.

b) Dacă rigidităţile coloanelor etalon au fost determinate anticipat, nu se vor mai da caracteristicile terenului. În acest caz programul furnizează deplasările radierului şi eforturile la capul coloanelor.

Pentru a se facilita completarea cartelelor de date, fiecare instrucţiune de intrare este însoţită de comentarii asupra datelor care trebuie citite.

10. EXEMPLU DE CALCUL

În figura 5 este reprezentată schematic o fundaţie pe piloţi. Se consideră că radierul fundaţiei este situat la 2,5 m deasupra terenului şi că stratificaţia pămîntului este orizontală. Fundaţia are cinci tipuri de piloţi, conform numerotării din figură. Din cei patru piloţi tip 1, se alege drept pilot etalon cel situat în originea sistemului general de referinţă.

Cazul 1. Piloţii se consideră dublu-articulaţi. În această situaţie cazul examinat este identic cu exemplul dat la pag 31 în [6].

În continuare sînt descrise cartelele de date necesare. După numărul cartelei, se indică, în paranteză, numărul instrucţiunii de citire corespunzătoare

— cartela 1 (1) comentarii ;
— cartela 2 (2) DO = 0,6 ; NUC=1 ; E=2000000 ; KP=1000.
— cartela 3 (3) NY = 450 ; HX=15 ; HZ=−48 ; MX=−513 ;
MZ = 1167 ; MY = 127,5 ; NOR=2 ; NOL = 1 ;
KETA = 5 ; KETY = 2 ; NP = 4 ; SZ = 2,0.

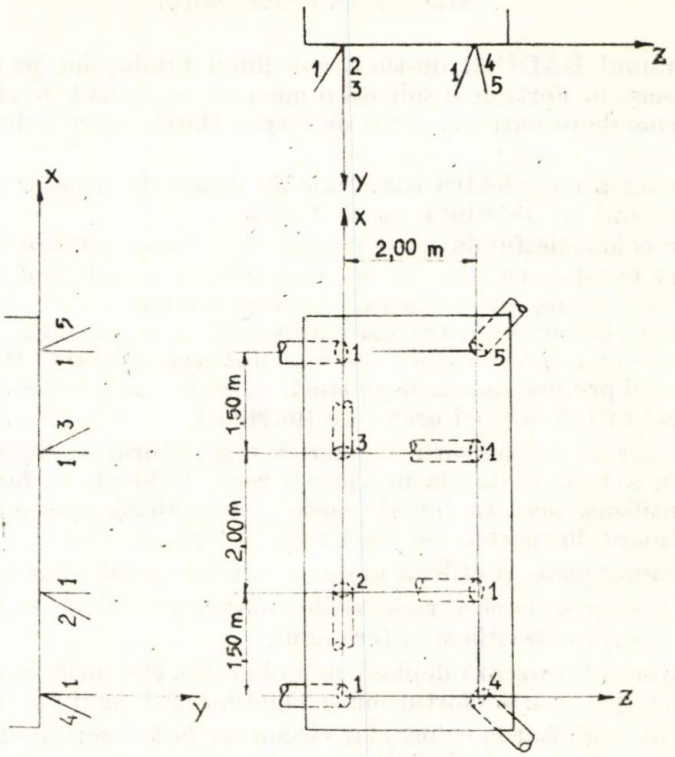


Fig. 5

— cartela 4 (4) NPIL(1) = 4; NPIL(2) = 4.
— cartela 5 (5) KTY (1) = 1; KTY(2) = 2.
— cartela 6 (6) OX(2,1) = 1,5; OX(3,1) = 2,0; OX(4,1) = 1,5.
— cartela 7 (7) OX(2,2) = 1,5; OX(3,2) = 2,0; OX(4,2) = 1,5.
— cartela 8 (8) LPIL(1) = 10,0.
— cartela 9 (9) KT (1,1) = 1; KT(2,1) = 2; KT(3,1)=3; KT(4,1) = 1.
— cartela 10 (10) KE (1,1)=1; KE(2,1)=2; KE(3,1) = 3.
— cartela 11 (9) KT(1,2)=4; KT(2,2)=1; KT(4,2) = 5.
— cartela 12 (10) KE(1,2) = 4; KE(4,2) = 5.
— cartela 13 (11) DECX (2) = 2,59; DECX(3)=−2,59; DECX (4) = 1,83; DECX(5) = −1,83.
— cartela 14 (12) DECZ (1) = 1,59; DECZ(4) = −1,83; DECZ(5) = −1,83.

Datele nemenţionate se consideră nule.

Eforturile axiale din piloţi obţinute cu ajutorul programului :

	Pilot 1	Pilot 2	Pilot 3	Pilot 4
Rînd 1 :	75,0 t	46,2 t	8,1 t	59,9 t
Rînd 2 :	66,2 t	78,0 t	52,3 t	80,3 t.

Rezultatele obţinute sînt identice cu cele date în [6].

Cazul 2. Se ţine seama de încastrarea piloţilor în radier şi teren. Cartelele de date necesare în acest caz sînt cele date pentru cazul precedent, cu următoarele modificări :

— cartela 2 KP = 0
— cartela 3 NOL = 4.

În plus, se adaugă 4 cartele suplimentare cu date referitoare la stratificaţia terenului :

— cartela 15 (13) Y(1,1) = 2,5 ; X(2,1) = 10,0 ; Y(2,1) = 2,5 ; Z(3,1) = 8,0 ; Y(3,1) = 2,5 ; KPAT(1) = 80.
— cartela 16 (13) Y(1,2) = 4,8 ; X(2,2) = 10,0 ; Y(2,2) = 4,8 ; Z(3,2) = 8,0 ; Y(3,2) = 4,8 ; KPAT(2) = 600.
— cartela 17 (13) Y(1,3) = 8,7 ; X(2,3) = 10,0 ; Y(2,3) = 8,7 ; Z(3,3) = 8,0 ; Y(3,3) = 8,7 ; KPAT(3) = 1500 ; KR(3) = 2.
— cartela 18 (13) Y(1,4) = 11,5 ; X(2,4) = 10,0 ; Y(2,4) = 11,5 ; Z(3,4) = 8,0 ; Y(3,4) = 11,5.

În continuare se dau principalele rezultate obţinute la imprimantă.

Primită la redacţie la 3 noiembrie 1972

EXEMPLU DIN F. SCHIEL CU PILOŢI INCASTRAŢI

SOLICITĂRILE RADIERULUI :

FORŢA VERTICALĂ NY = 450.0 TONE,
FORŢA ORIZONTALĂ HX = 15.0 TONE,
FORŢA ORIZONTALĂ HZ = −48.0 TONE,
MOMENT ÎNCOVOIETOR MX = −513.0 TM,
MOMENT ÎNCOVOIETOR MZ = 1167.0 TM,
MOMENT DE TORSIUNE MY = 127.5 TM,

DISPUNEREA RÎNDURILOR DE PILOŢI :
RÎNDUL 1 TIP 1 OZ = 0.00 METRI
RÎNDUL 2 TIP 2 OZ = 2.00 METRI

DISPUNEREA PILOŢILOR ÎN RÎNDURI
(RÎNDURILE DE PILOŢI SÎNT PARALELE CU AXA OX)

RÎNDUL 1 PILTOUL 1 TIP 1 (1) DX = 0.00 METRI
RÎNDUL 1 PILOTUL 2 TIP 2 (2) DX = 1.50 METRI
RÎNDUL 1 PILOTUL 3 TIP 3 (3) DX = 3.50 METRI
RÎNDUL 1 PILOTUL 4 (TIP 1 (0) DX = 5.00 METRI

DISPUNEREA PILOŢILOR ÎN RÎNDURI
(RÎNDURILE DE PILOŢI SÎNT PARALELE CU AXA OX)

RÎNDUL 2 PILOTUL 1 TIP 4 (4) DX = 0.00 METRI
RÎNDUL 2 (PILOTUL 2 (TIP 1 (0) DX = 1.50 METRI
RÎNDUL 2 PILOTUL 3 (TIP 1 (0) DX = 3.50 METRI
RÎNDUL 2 PILOTUL 4 TIP 5 (5) DX = 5.00 METRI

ELEMENTE GEOMETRICE ALE PILOȚILOR ETALON

TIP	LUNGIME	PR-OX	PR-OZ	SIN(A)	COS(A)	SIN(B)	COS(B)
1	10.00	0.0	2.6	0.259	0.966	1.000	0.000
2	10.00	2.6	0.0	0.259	0.966	0.000	1.000
3	10.00	−2.6	0.0	−0.259	0.966	0.000	1.000
4	10.00	1.8	−1.8	0.259	0.966	−0.707	0.707
5	10.00	−1.8	−1.8	−0.259	0.966	0.707	0.707

SOLICITĂRILE RADIERULUI
ÎN IPOTEZA DE ÎNCĂRCARE NR. 1

N = 450.00 T. HX = 15.00 T. HZ = −48.00 T.
MX = −513.00 TM MZ = 1167.00 TM MY = 127.50 TM

DEPLASĂRILE RADIERULUI
ÎN IPOTEZA DE ÎNCĂRCARE NR. 1

DELTA-Y = 0.0066 M. DELTA−X = 0.0035 DELTA-Z = −0.0015 M.
ROT-OX = −0.00054 ROT-OZ = 0.00015 ROT-OY = −0.00002

SOLICITĂRILE COLOANELOR (PILOȚILOR) (IN T ȘI TM)

SIR	PILOT	N	T-1	T-2	M-1	M-2	MT
1	1	53.3	−0.6	−1.0	−3.5	3.1	−0.1
1	4	58.8	−0.5	−1.0	−3.5	2.7	−0.1
2	2	63.1	−0.5	−1.0	−3.5	2.6	−0.1
2	3	65.3	−0.4	−1.0	−3.5	2.5	−0.1
1	2	44.8	1.6	−1.2	−5.2	−5.6	0.2
1	3	61.4	0.3	−1.1	−5.1	−1.0	−0.2
2	1	51.3	2.2	−0.1	−1.3	−8.5	0.1
2	4	67.2	−0.9	−1.5	−6.0	4.1	−0.1

PILOT (COLOANA) TIP 1
RÎNDUL 1 POZIȚIA 1
SOLICITĂRI LA CAPITEL:
N = 53.31T. T-1 = −0.58 T. T-2 = −1.03 T.
M-1 = −3.54 TM M-2 = 3.10 TM MT = −0.08 TM

SOLICITĂRI ȘI DEFORMAȚII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI) ÎN DIRECȚIA PRINCIPALĂ:

SECȚIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEȚI
1	2.89	−0.58	1.41	−0.001	−0.045
2	3.51	−0.58	1.06	−0.003	−0.045
3	4.13	−0.57	0.70	−0.005	−0.042
4	4.75	−0.55	0.36	−0.012	−0.036
5	5.36	−0.50	0.05	−0.047	−0.029
6	5.98	−0.33	−0.15	−0.044	−0.022
7	6.60	−0.17	−0.25	−0.037	−0.016
8	7.22	−0.03	−0.27	−0.027	−0.010
9	7.84	0.07	−0.23	−0.016	−0.005
10	8.45	0.13	−0.15	−0.003	−0.001
11	9.07	0.14	−0.06	0.011	0.003
12	9.69	0.10	−0.01	0.026	0.007

SOLICITĂRI ŞI DEFORMAŢII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI) ÎN DIRECŢIA SECUNDARĂ :

SECŢIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEŢI
1	2.89	−1.03	0.58	−0.005	−0.229
2	3.51	−1.01	−0.05	−0.014	−0.191
3	4.13	−0.95	−0.64	−0.018	−0.153
4	4.75	−0.89	−1.18	−0.039	−0.117
5	5.36	−0.74	−1.64	−0.136	−0.085
6	5.98	−0.24	−1.79	−0.112	−0.057
7	6.60	0.18	−1.68	−0.079	−0.034
8	7.22	0.47	−1.38	−0.044	−0.017
9	7.84	0.64	−0.99	−0.009	−0.003
10	8.45	0.67	−0.57	0.026	0.008
11	9.07	0.58	−0.22	0.061	0.016
12	9.69	0.35	−0.03	0.095	0.024

PILOT (COLOANA) TIP 1
RÎNDUL 1 POZIŢIA 4

SOLICITĂRI LA CAPITEL :

N =58.78T. T−1 = −0.48 T. T−2 = −1.03 T.
M−1=−3.54TM M−2 = 2.72 TM MT = −0.08 TM

SOLICITĂRI ŞI DEFORMAŢII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI) ÎN DIRECŢIA PRINCIPALĂ :

SECŢIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEŢI
1	2.89	−0.48	1.33	−0.001	−0.024
2	3.51	−0.48	1.04	−0.002	−0.027
3	4.13	−0.47	0.74	−0.003	−0.027
4	4.75	−0.46	0.46	−0.008	−0.025
5	5.36	−0.43	0.20	−0.034	−0.021
6	5.98	−0.30	0.01	−0.033	−0.017
7	6.60	−0.18	−0.10	−0.029	−0.013
8	7.22	−0.07	−0.14	−0.023	−0.008
9	7.84	0.01	−0.13	−0.014	−0.005
10	8.45	0.07	−0.09	−0.005	−0.001
11	9.07	0.09	−0.04	0.006	0.002
12	9.69	0.06	−0.00	0.017	0.004

SOLICITĂRI ŞI DEFORMAŢII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI) ÎN DIRECŢIA SECUNDARĂ :

SECŢIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEŢI
1	2.89	−1.03	0.58	−0.005	−0.229
2	3.51	−1.01	−0.05	−0.014	−0.191
3	4.13	−0.95	−0.64	−0.018	−0.153
4	4.75	−0.89	−1.18	−0.039	−0.117
5	5.36	−0.74	−1.64	−0.136	−0.085
6	5.98	−0.24	−1.79	−0.112	−0.057
7	6.60	0.18	−1.68	−0.079	−0.034

8	7.22	0.47	−1.38	−0.044	−0.017
9	7.84	0.64	−0.99	−0.009	−0.003
10	8.45	0.67	−0.57	0.026	0.008
11	9.07	0.58	−0.22	0.061	0.016
12	9.69	0.35	−0.03	0.095	0.024

PILOT (COLOANA) TIP 2
RÎNDUL 1 POZIȚIA 2

SOLICITĂRI LA CAPITEL:

N = 53.23 T. T−1 = −0.58 T. T−2 = −1.03 T.
M-1 = −3.54 TM M-2 = 3.10 TM MT = −0.08 TM

SOLICITĂRI ȘI DEFORMAȚII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI) ÎN DIRECȚIA PRINCIPALĂ:

SECȚIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEȚI
1	2.89	−0.58	1.41	−0.001	−0.045
2	3.51	−0.58	1.06	−0.003	−0.045
3	4.13	−0.57	0.70	−0.005	−0.042
4	4.75	−0.55	0.36	−0.012	−0.036
5	5.36	−0.50	0.05	−0.047	−0.029
6	5.98	−0.33	−0.15	−0.044	−0.022
7	6.60	−0.17	−0.25	−0.037	−0.016
8	7.22	−0.03	−0.27	−0.027	−0.010
9	7.84	0.07	−0.23	−0.016	−0.005
10	8.45	0.13	−0.15	−0.003	−0.001
11	9.07	0.14	−0.06	0.011	0.003
12	9.69	010.	−0.01	0.026	0.007

SOLICITĂRI ȘI DEFORMAȚII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI) ÎN DIRECȚIA SECUNDARĂ:

SECȚIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEȚI
1	2.89	−1.03	0.58	−0.005	−0.029
2	3.51	−1.01	−0.05	−0.014	−0.191
3	4.13	−0.95	−0.64	−0.018	−0.153
4	4.75	−0.89	−1.18	−0.039	−0.117
5	5.36	−0.74	−1.64	−0.136	−0.085
6	5.98	−0.24	−1.79	−0.112	−0.057
7	6.60	0.18	−1.68	−0.079	−0.034
8	7.22	0.47	−1.38	−0.044	−0.017
9	7.84	0.64	−0.99	−0.009	−0.003
10	8.45	0.67	−0.57	0.026	0.080
11	9.07	0.58	−0.22	0.061	0.016
12	9.69	0.35	−0.03	0.095	0.024

PILOT (COLOANA) TIP 3
RÎNDUL 1 POZIȚIA 3

SOLICITĂRI LA CAPITEL:

N = 58.78 T. T−1 = −0.48 T. T−2 = −1.03 T.
M−1 = −3.54 M−2 = 2.72 TM MT = −0.08 TM

SOLICITĂRI ŞI DEFORMAŢII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTLUI)
ÎN DIRECŢIA PRINCIPALĂ:

SECŢIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEŢI
1	2.89	−0.48	1.33	−0.001	−0.024
2	3.51	−0.48	1.04	−0.002	−0.027
3	4.13	−0.47	0.74	−0.003	−0.027
4	4.75	−0.46	0.46	−0.008	−0.025
5	5.36	−0.43	0.20	−0.034	−0.021
6	5.98	−0.30	0.01	−0.033	−0.017
7	6.60	−0.18	−0.10	−0.029	−0.013
8	7.22	−0.07	−0.14	−0.023	−0.008
9	7.84	0.01	−0.13	−0.014	−0.005
10	8.45	0.07	−0.09	−0.005	−0.001
11	9.07	0.09	−0.04	0.006	0.002
12	9.69	0.06	−0.00	0.017	0.004

SOLICITĂRI ŞI DEFORMAŢII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI)
ÎN DIRECŢIA SECUNDARĂ:

SECŢIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEŢI
1	2.89	−1.03	0.58	−0.005	−0.229
2	3.51	−1.01	−0.05	−0.014	−0.191
3	4.13	−0.95	−0.64	−0.018	−0.153
4	4.75	−0.89	−1.18	−0.039	−0.117
5	5.36	−0.74	−1.64	−0.136	−0.085
6	5.98	−0.24	−1.79	−0.112	−0.057
7	6.60	0.18	−0.68	−0.079	−0.034
8	7.22	0.47	−1.38	−0.044	−0.017
9	7.84	0.64	−0.99	−0.009	−0.003
10	8.45	0.67	−0.57	0.026	0.008
11	9.07	0.58	−0.22	0.061	0.016
12	9.69	0.35	−0.03	0.095	0.024

PILOT (COLOANA) TIP 4
RÎNDUL 2 POZIŢIA 1
SOLICITĂRI LA CAPITEL:

N = 51.31T. T−1 = 2.18 T. T−2 = −0.12 T.
M−1 = −1.28TM M−2 = 8.53 TM MT = 0.13 TM

SOLICITĂRI ŞI DEFORMAŢII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI)
ÎN DIRECŢIA PRINCIPALĂ:

SECŢIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEŢI
1	2.89	2.18	−2.23	0.010	0.409
2	3.51	2.14	0.90	0.025	0.347
3	4.13	2.05	0.37	0.034	0.283
4	4.75	1.93	1.56	0.074	0.221
5	5.36	1.65	2.58	0.262	0.162
6	5.98	0.68	3.00	0.220	0.111
7	6.60	−0.13	2.92	0.161	0.069
8	7.22	−0.73	2.46	0.096	0.036
9	7.84	−1.09	1.79	0.029	0.010
10	8.45	−1.20	1.05	−0.039	−00.11
11	9.07	−1.05	0.40	−0.0108	−0.029
12	9.69	−0.65	0.05	−0.176	−0.045

SOLICITĂRI ŞI DEFORMAŢII ÎN LUNGUL COLOANEI (PILOTULUI) ÎN DIRECŢIA SECUNDARĂ :

SECŢIUNE	COTA	T	M	PRESIUNI	SĂGEŢI
1	2.89	−0.12	0.93	0.001	0.041
2	3.51	−0.12	0.86	0.002	0.028
3	4.13	−0.13	0.78	0.002	0.018
4	4.75	−0.14	0.69	0.004	0.011
5	5.36	−0.15	0.59	0.008	0.005
6	5.98	−0.18	0.48	0.002	0.001
7	6.60	−0.19	0.36	−0.003	−0.001
8	7.22	−0.18	0.25	−0.007	−0.003
9	7.84	−0.16	0.15	−0.009	−0.003
10	8.45	−0.12	0.08	−0.011	−0.003
11	9.07	−0.08	0.03	−0.011	−0.003
12	9.69	−0.04	0.00	−0.011	−0.003

BIBLIOGRAFIE

1. F. Andres *Beanspruchung vertikaler Phähle unter Horizontalschub*, Schweizer Bauzeitung 1966, S 826—830.
2. H. Lehr, *Fundaţii, exemple de calcul*, Bucureşti E.T. 1967.
3. P, Mazilu, *Statica construcţiilor* vol. II, Bucureşti E.T. 1955, 1959.
4. F. Neumayer, *Varfahren zur Berechnung in den Badei eingespanter Phähle*, Bauingenieur *43* (1968). S. 162—166.
5. Rudolf Aschenbrenner, *Three—dimensional analysis of pile foudations* J.S.D., vol. 93/1967, pg, 201.
6. F. Schiel *Statik der Pfahlwerke*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
7. H. G. Schmidt, *Grossbohr pfählen unter Waagerechter Belastung*, Bauingenieur *46* (1971) S. 233—237.
8. K. S. Silin, H. M. Golotov U. V. Karspinsky, *Fundamenti opormostov*, Moskova 1966.
9. A. F. Smirnov. *Stabilitatea statică şi dinamică a construcţiilor*, trad. din l. rusă, Bucureşti, Editura tehnică a transporturilor 1951.
10. A. F. Smirnov, *Ustoicivosti i Kolebania soorujenii* Moskva. 1958.
11. U. H. Smoltczyk, *Die Einspannung im beliebig geschichteten Baungrud* Bauingenieur *38* (1963) S. 388—396.
12. E. Titze, *Über den seitlichen Boderwidestand bei Pfahlgründungen* Berlin, W. Ernst U. Sohn 1943.
13. A Vaicum, *Fundaţii încastrate*, Bucureşti, E. A. 1970.
14 O. Ç. Zienkiewicz *The Finite Element Method*, Mc. GRAW—HIIL LONDON 1967.

```
      PROGRAM RADIER
      REAL NY,MZ,MX,MY,INERT,KP,KU,KF,KM,KI,KPAT,LPIL,BIX(6,7)
      REAL *4 ANTET(23)/'     DELTA-Y          DELTA-X          DELTA-Z
     &  ROT-OX          ROT-OZ          ROT-OY        '/
      INTEGER *2 KTY,KT,KE,NPIL,KR
      DIMENSION SIS(6,6),BEX(40,7),RIG(10,5,2),AEX(40,40),ZE(40,20,2)
      DIMENSION TITLU(20),OX(32,5),OZ(32),SWS(6,6),EFORT(14,6)
      COMMON /XZX/ SINA(10),SINB(10),COSA(10),COSB(10),DECX(10),DECZ(10)
      COMMON /ZXZ/ LPIL(10),KTY(32),KT(32,32),KE(32,32),NPIL(5)
      COMMON /YXY/ X(3,10),Z(3,10),Y(3,10),KPAT(10),KR(10),F(10),C(10)
      COMMON /YYY/ DES(10),CUN(10),NED(10),RA(10,40),DXZ(10,2)
      COMMON /UFP/ KP,KU,KF,KM,KI
      COMMON /ART/ NART(10,2)
      COMMON /LIS/ LIST,NS
      EQUIVALENCE (KOEOY,KOECZ)
      DATA M7,M9 /97,99/
    1 READ(M7,1000,END=9999) TITLU                                        R
      WRITE(M9,1000) TITLU
 1000 FORMAT(20A4)
      READ(M7,1004) DO,CO,CH,NUC,JY,IY,NS,LIST,E,KP,KU,KF,KM,KI,KTOP      R
C     DO = DIAMETRUL COLOANELOR (METRI)
C     CO = LATURA SECTIUNII PATRATE A PILOTILOR (METRI)
C          IF(DO=0),CO # 0.   IF(CO=0),DO # 0.
C     CH = (DIAMETRUL COLOANEI LA CAPITEL) / (DIAMETRUL DIN PAMINT)
C     NUC = NUMARUL IPOTEZELOR DE INCARCARE
C          IF(NUC=0), NUC=7.  IF(NUC=1) SE CONSIDERA ACTIUNEA SIMUL-
C          TANA A INCARCARILOR DATE PE CARTELA 3. IF(NUC=2) SE CON -
C          SIDERA SI IPOTEZA DE INCARCARE NUMAI CU NY. ETC.
C     JY # 0 COMANDA CITIREA A 'KETA' CARTELE CU RIGIDITATI DIFERITE
C          PENTRU FIECARE PILOT ETALON. (IF(JY#0)->IY=0 $I INVERS)
C     IY # 0 COMNADA CITIREA UNEI CARTELE CARE CONTINE MATRICEA NART;
C          DACA IY # 0, EXISTA PILOTI ARTICULATI IN RADIER.
C          IY POATE FI DIFERIT DE ZERO NUMAI DACA NOL > 1 .
C     NS - PRECIZEAZA NUMARUL LEGATURILOR COLOANEI CU TERENUL
C        ( PAS = NS * DO = DISTANTA DINTRE LEGATURI; IF(NS=0) PAS=DO/2 )
C     LIST # 0 COMANDA TIPARIREA DATELOR INTERMEDIARE.
C     E = MODULUL DE ELASTICITATE AL BETONULUI DIN PILOTI (T/M**2)
C     KP = RIGIDITATEA LA FORTA AXIALA (E*A/L)          - T/M -
C     KU = RIGIDITATEA LA TORSIUNE     (G*IP/L)         - T*M -
C     KF = RIGIDITATEA LA TRANSLATIE (12*E*I/L**3)      - T/M -
C     KM = RIGIDITATEA RECIPROCA      (6*E*I/L**2)      -  T  -
C     KI = RIGIDITATEA LA INCOVOIERE (4*E*I/L)          - T*M -
C     DACA PE CARTELA DE DATE ESTE TRECUTA UNA DIN ACESTE RIGIDITATI
C          SE VA CONSIDERA CA TOTI PILOTII AU RIGIDITATEA RESPECTIVA;
C          RIGIDITATILE CARE LIPSESC SE VOR CALCULA IN PROGRAM.
C     DACA JY # 0, VALORILE KP...KI SE VOR NEGLIJA IN CONTINUARE.
C     IF(KTOP.NE.0) SE LISTEAZA NUMAI EFORTURILE DELA CAPITEL
 1004 FORMAT(3F5.4,5I1,5F10.6,F9.5,I1)
      G = 0.425 * E
      IF(NUC.EQ.0) NUC = 7
```

```
      DO 2 I = 1,40
      DO 2 J = 1,7
    2 BEX(I,J) = 0.
      DO 3 I = 1,40
      DO 3 J = 1,40
    3 AEX(I,J) = 0.
      READ(M7,1001) NY,HX,HZ,MX,MZ,MY,NOR,NOL,KDEC,KDECY,KETA,KETY,NP,SZ   R
C     NOR = NUMARUL RINDURILOR PE PILOTI.
C     IF(NOR.GT.1.&.SZ.EQ.0) SE CITESTE DZ(NOR).
C     NOL = NUMARUL STRATELOR DIN FORAJE.    DACA PE CARTELA PRECEDENTA
C           AU FOST TRECUTE TOATE RIGIDITATILE PILOTILOR SE VA LUA NOL=1.
C     DACA JY # 0 , SE VA LUA NOL = 1 .
C     KDEC - ARATA DACA EXISTA PILOTI INCLINATI.
C     IF(KDEC = 0) EXISTA PILOTI INCLINATI CEL PUTIN IN DIRECTIA OX.
C     KDECY - ARATA DACA EXISTA PILOTI INCLINATI IN DIRECTIA Y-Z.
C     IF(KDECY.EQ.0) EXISTA PILOTI INCLINATI IN AMBELE DIRECTII.
C     KETA = NUMARUL PILOTILOR ETALON D.P.D.V. AL STRATIFICATIEI,
C            SAU AL INCLINARII PILOTILOR.
C     DACA KDEC = 0 , KETA # 0 .
C     KETA MAXIM  = 10
C     KETY = NUMARUL RINDURILOR ETALON (CU ASEZARE IDENTICA PE OX)
C     KETY MAXIM = 5
C     NP = NUMARUL PILOTILOR DE PE UN RIND (LA RINDURI IDENTICE)
C     IF(NP = 0)  ESTE NECESAR SA SE CITEASCA VECTORUL NPIL
C     SZ = DISTANTA DINTRE RINDURI (DACA E CONSTANTA).
 1001 FORMAT(6F10.4,7I2,F6.3)
      WRITE(M9,2005) NY,HX,HZ,MX,MZ,MY
      IF(NOR.EQ.0) NOR = 1
      IF(NOR.EQ.1) KETY = 1
      IF(KETY.EQ.1)NPIL(1) = NP
      IF(KETA.EQ.0)KETA = 1
      IF(KETY.GT.1)READ(M7,1002) (NPIL(K),K=1,KETY)                        R
C     NPIL(K) = NUMARUL PILOTILOR DIN RINDUL ETALON TIP K.
      IF(KETY.GT.1)READ(M7,1002) (KTY(J),J=1,NOR)                          R
C     KTY(J) CONTINE NUMARUL TIPULUI SIRULUI ETALON AFERENT.
 1002 FORMAT(40I2)
      DZ(1) = 0.
      DO 5 J = 2,NOR
    5 DZ(J) = SZ
      IF(KETY.GT.1) GOTO 7
      DO 6 K = 1,NOR
    6 KTY(K) = 1
    7 CONTINUE
      IF(NOR.GT.1.AND.SZ.EQ.0) READ(M7,1003)(DZ(J),J=1,NOR)                R
C     DZ(32) CONTINE DISTANTELE DINTRE RINDURILE DE PILOTI.
      DO 8 K = 1,KETY
      NR = NPIL(K)
    8 READ(M7,1003) (DX(I,K),I=1,NR)                                       R
C     DX(32,5) CONTINE DIST. INTRE PILOTI IN SIRURILE ETALON.
      IF(KETA.GE.1) READ(M7,1003) (LPIL(K),K=1,KETA)                       R
```

```
C       LPIL(K) = LUNGIMEA PILOTULUI TIP K.
 1003 FORMAT(16F5.3)
      KETAK = 2
      IF(KETA.GT.2) KETAK = KETA
      DO 9 K = 2,KETAK
      IF(LPIL(K).EQ.0) LPIL(K) = LPIL(K-1)
    9 CONTINUE
      DO 10 K = 1,KETY
      NR = NPIL(K)
      DO 10 I = 2,NR
      IF(DX(I,K).EQ.0.) DX(I,K) = DX(I-1,K)
      IF(DX(I,K).GT.0.) DX(I,K) = 0.
   10 CONTINUE
      DO 15 K = 1,KETY
      NR = NPIL(K)
      DO 15 I = 2,NR
   15 DX(I,K) = DX(I-1,K) + DX(I,K)
      IF(NOR.EQ.1) GOTO 21
      DO 20 J = 2,NOR
   20 DZ(J) = DZ(J-1) + DZ(J)
   21 CONTINUE
      WRITE(M9,2006) (I,KTY(I),DZ(I),I=1,NOR)
      IF(KETA.EQ.1) GOTO 35
      DO 30 J = 1,NOR
      L = KTY(J)
      NR = NPIL(L)
      READ(M7,1005) (KT(I,J),I=1,NR)
   30 READ(M7,1005) (KE(I,J),I=1,NR)
C       KT(I,J) - TIPUL PILOTULUI I DIN RINDUL J. (IF(KT(I,J) = 0),
C                 PILOTUL (I,J) ESTE DE TIPUL PILOTULUI (I-1,J).
C       KE(I,J) - INDICA DACA PILOTUL I DIN RINDUL J ESTE SAU NU PILOT
C                 ETALON;(IF(KE(I,J) = 0), PILOTUL (I,J) NU ESTE ETALON)
 1005 FORMAT(40I2)
      IF(KETA.GT.1) GOTO 45
   35 DO 40 J = 1,NOR
      KT(1,J) = 1
      KE(1,J) = 0
      DO 40 I = 2,32
      KT(I,J) = 0
   40 KE(I,J) = 0
      KE(1,1) = 1
   45 CONTINUE
      DO 51 J = 1,NOR
      L = KTY(J)
      NR = NPIL(L)
      DO 50 I = 2,NR
      IF(KT(I,J).EQ.0) KT(I,J) = KT(I-1,J)
   50 CONTINUE
      WRITE(M9,2007)(J,I,KT(I,J),KE(I,J),DX(I,L),I=1,NR)
   51 CONTINUE
```

```
      DO 54 K = 1,KETA
      DECX(K) = 0.
   54 DECZ(K) = 0.
      IF(KDEC.NE.0) GOTO 55
      READ(M7,1006) (DECX(K),K=1,KETA)                                  R
C     DECX(K) =PROIECTIA PILOTULUI LPIL(K) PE XOZ, PROIECTATA PE AXA OX.
C     PROIECTIA ESTE POZITIVA DACA PILOTUL INTERSECTEAZA PLANUL ZOY
      IF(KDECZ.NE.0) GOTO 55
C     DECZ(K) =PROIECTIA PILOTULUI LPIL(K) PE XOZ, PROIECTATA PE AXA OZ.
C     PROIECTIA ESTE POZITIVA DACA PILOTUL INTERSECTEAZA PLANUL XOY
      READ(M7,1006) (DECZ(K),K=1,KETA)                                  R
 1006 FORMAT(10F8.5)
   55 CONTINUE
      DO 60 K = 1,KETA
      DX = ABS(DECX(K))
      DZ = ABS(DECZ(K))
      IF(DX.EQ.0)  DX = 1.
      IF(DZ.EQ.0)  DZ = 1.
      TGA = SQRT(DECX(K)**2 + DECZ(K)**2)
      IF(TGA.NE.0) TGA=1./SQRT((LPIL(K)/TGA)**2-1.)
      SINA(K) = TGA / SQRT(1.+ TGA*TGA)
      IF(DECX(K).NE.0) SINA(K) = SINA(K) * DECX(K) / DX
      COSA(K) =  1. / SQRT(1.+ TGA*TGA)
      TGB = ABS(DECZ(K)) / DX
      IF(DECX(K).EQ.0) TGB = 0.1 E+35
      SINB(K) = TGB / SQRT(1.+ TGB*TGB) * DECZ(K) / DZ
      IF(DECX(K).NE.0) SINB(K) = SINB(K) * DECX(K) / DX
      COSB(K) = SQRT(1.- SINB(K) * SINB(K))
   60 CONTINUE
      WRITE(M9,2004)
      WRITE(M9,2008)(I,LPIL(I),DECX(I),DECZ(I),SINA(I),COSA(I),
     &               SINB(I),COSB(I),I=1,KETA)
      IF(NDL.LT.2) GOTO 70
      DO 65 K = 1,NDL
      READ(M7,1007)(X(L,K),Z(L,K),Y(L,K),L=1,3),KPAT(K),F(K),C(K),KR(K)  R
      AKA = F(K) * 3.1415927 / 200.
      F(K)= SIN(AKA) / COS(AKA)
   65 CONTINUE
C     X,Z,SI Y CONTIN COORD. PUNCTELOR PLANELOR DE SEPARATIE A STRATELOR
C           DE TEREN; CITE 3 PUNCTE PENTRU FIECARE STRAT.
C     KPAT(K) = COEF. DE PAT VARIABIL IN PROFUNZIMEA STRATULUI;
C               SE DA IN T/M**4 LA 1 M. DELA PATA TERENULUI.
C     F(K) & C(K) SINT DOI VECTORI DISPONIBILI.
C     KR(K) = INDICA LEGEA DE VARIATIE A COEF. DE PAT IN ADINCIME.
C     IF(KR(K)=0), COEF. DE PAT VARIAZA LINIAR CU ADINCIMEA.
C     IF(KR(K)=1), COEF. DE PAT ESTE CONSTANT PE ADINCIME.
C     IF(KR(K)=2), COEF. DE PAT VARIAZA PROPORTIONAL CU SQRT(ADINCIME).
 1007 FORMAT(12F5.1,19X,I1)
      WRITE(M9,2009)
      WRITE(M9,2010)
```

```
     &(I,(X(L,I),Z(L,I),Y(L,I),L=1,3),KPAT(I),KR(I),I=1,NDL)
   70 CONTINUE
      DO 71 J = 1,2
      DO 71 I = 1,10
   71 NART(I,J) = 0
      IF(DO.EQ.0) GOTO 75
      A = DO * DO * 3.1415927 / 4.
      INERT = A * DO * DO / 16.
      DU = .9 *(DO + 1.)
      GOTO 80
   75 A = CO * CO
      INERT = A * A / 12.
      DO = CO * 2. / SQRT(3.1416)
      DU = CO + 0.01
   80 EI = E * INERT
      EIO = E * CH ** 4
      IF(EIO.EQ.0.) EIO = EI
      IF(JY.NE.0) READ(M7,1009) ((NART(I,M),M=1,2),I=1,10)                    R
C     NART(I,M) # 0, ARATA CA PILOTUL TIP I ESTE ARTICULAT IN
C                    RADIER PE DIRECTIA M (M = 1 SAU 2).
C                    IF(NART(I,M)=0) PILOTUL I ESTE INCASTRAT IN DIR. M.
 1009 FORMAT(2011)
      IF(NDL.GT.1) CALL STRAT(UX,DZ,M9,NDL,NOR,DU,DO,E,RIG,KETA)
      IF(NDL.GT.1) CALL SLAD(M9,KETA,AEX,ZE,BEX,RIG,EI,EIO,KU)
      IF(NDL.NE.1) GOTO 84
      IF(JY.NE.0) GOTO 82
      DO 81 I = 1,KETA
      DO 81 J = 1,2
      RIG(I,1,J) = KP
      RIG(I,2,J) = KI
      RIG(I,3,J) = KM
      RIG(I,4,J) = KF
   81 RIG(I,5,J) = KU
      GOTO 84
   82 CONTINUE
      DO 83 I = 1,KETA
   83 READ(M7,1008) ((RIG(I,K,J),K=1,5),J=1,2)                              R
C     RIG(I,1,J) = RIGIDIT. AXIALA      ( PILOT I, DIRECTIA J = 1, 2 )
C     RIG(I,2,J) = RIGIDIT. LA INCOVOIERE      (   - " -    )
C     RIG(I,3,J) = RIGIDIT. RECIPROCA          (   - " -    )
C     RIG(I,4,J) = RIGIDIT. LA TRANSLATIE      (   - " -    )
C     RIG(I,5,J) = RIGIDIT. LA TORSIUNE        (   - " -    )
C     PE FIECARE CARTELA SE TREC RIGIDITATILE PENTRU UN TIP DE PILOT;
C **     MAI INTII PENTRU DIRECTIA 1, APOI PENTRU DIRECTIA 2.
 1008 FORMAT(10F8.2)
   84 CONTINUE
      DO 85 I=1,6
      DO 85 J=1,6
   85 SIS(I,J) = 0.
      CALL COESIS(M9,KETA,NOR,UX,DZ,RIG,SIS)
```

```
      DO 86 I = 1,40
      DO 86 J = 1,7
   86 BEX(I,J) = 0.
      BEX(1,1) = NY
      BEX(2,1) = HX
      BEX(3,1) = HZ
      BEX(4,1) = MX
      BEX(5,1) = MZ
      BEX(6,1) = MY
      BEX(1,2) = NY
      BEX(2,3) = HX
      BEX(3,4) = HZ
      BEX(4,5) = MX
      BEX(5,6) = MZ
      BEX(6,7) = MY
      DO 90 I = 1,6
      DO 90 J = 1,7
   90 BIX(I,J)=BEX(I,J)
      DO 95 I = 1,6
      DO 95 J = 1,6
   95 AEX(I,J)= SIS(I,J)
      IF(LIST.NE.0) WRITE(M9,2001)
     &((AEX(J,I),I=1,6),(BEX(J,I),I=1,7),J=1,6)
      CALL SISTEM(AEX,BEX,6,1,7)
      PRINT 2011, ANIET
      DO 96 I = 1,7
      WRITE(M9,2012)I,(BEX(J,I),J=1,6)
   96 CONTINUE
      DO 110 I = 1,NUC
      WRITE(M9,2002) I,(BIX(J,I),J=1,6)
      WRITE(M9,2003)I,(BEX(J,I),J=1,6)
      IKAR = 10
      DO 100 N = 1,6
      DO 100 J = 1,6
      SWS(N,J) = 0.
      IF(N.EQ.J) SWS(N,J) = BEX(N,I)
  100 CONTINUE
      CALL SOLCIT(IKAR,SWS,EFORT)
      IF(KTOP.NE.0) GO TO 110
      IF(NUL.GT.1) CALL EFUDEP(M9,NDR,ZE,EFORT,KETA)
  110 CONTINUE
      GOTO 1
 2001 FORMAT('1'/////'        SISTEMUL DE ECUATII :',(/'0',6F12.1,7F7.1))
 2002 FORMAT('1'////'0    SOLICITARILE RADIERULUI '/'     IN IPOTEZA DE
     &INCARCARE NR.',I2, /'      N  =',F9.2,' T.    MX =',F9.2,' T.    MZ =
     &',F9.2,' T. '/'      MX =',F9.1,' TM    MZ =',F9.1,' TM    MY =',
     &  F9.1,' TM' )
 2003 FORMAT(////'0    DEPLASARILE RADIERULUI '/'      IN IPOTEZA DE INCAR
     &CARE NR.',I2, /'      DELTA-Y =',F7.4,' M.   DELTA-X =',F7.4,'   DE
     &LTA-Z =',F7.4,' M.'/'      ROT-OX  =',F8.5,5X,'ROT-OZ  =',F8.5,2X,
```

```
     &'ROT-OY  =',F8.5)
2004 FORMAT('1'///'0      ELEMENTE GEOMETRICE ALE PILOTILOR ETALON ' /
     &'0  TIP  LUNGIME  PR-OX  PR-OZ  SIN(A)  COS(A)  SIN(B)  COS(B)')
2005 FORMAT(//'0    SOLICITARILE RADIERULUI : ' /
     &'0     FORTA VERTICALA NY     =',F8.1,' TONE ,'/
     &'0     FORTA ORIZONTALA HX    =',F8.1,' TONE ,'/
     &'0     FORTA ORIZONTALA HZ    =',F8.1,' TONE ,'/
     &'0     MOMENT INCOVOIETOR MX =',F9.1,' TM ,'  /
     &'0     MOMENT INCOVOIETOR MZ =',F9.1,' TM ,'  /
     &'0     MOMENT DE TORSIUNE MY =',F9.1,' TM.'  )
2006 FORMAT(//'0    DISPUNEREA RINDURILOR DE PILOTI :'/
     &('0    RINDUL',I2,'   TIP',I2,'   OZ =',F5.2,' METRI'))
2007 FORMAT('1'///'0    DISPUNEREA PILOTILOR IN RINDURI  '/'    (RINDURI
     &LE DE PILOTI SINT PARALELE CU AXA OX)' / (
     &'0     RINDUL',I3,'     PILOTUL',I3,'     TIP',I2,' (',I2,')',
     &'    OX =',F5.4,' METRI'))
2008 FORMAT(('0',I4,3X,F6.2,3X,F5.1,2X,F5.1,4(2X,F6.3)))
2009 FORMAT('1'////'0    CARACTERISTICILE TERENULUI DE FUNDATIE '/'0
     &STRAT   X(1)   Z(1)   Y(1)   X(2)   Z(2)   Y(2)   X(3)   Z(3)   Y(
     &3)   K=PAT   KR')
2010 FORMAT('0',I6,2X,9F7.1,F9.1,I4)
2011 FORMAT('1'///'0    DEPLASARILE RADIERULUI :'//'0',25X,23A4)
2012 FORMAT('0     PUTEREA.',I2,' -->     ',9(2X,F11.8,2X))
9999 STOP
     END


     SUBROUTINE STRAT(OX,OZ,M9,NOL,NOR,DU,DC,E,RIG,KETA)
     DIMENSION OX(32,5),OZ(32),SOP(30),RIG(10,5,2)
     DIMENSION CP(10),DIX(10),DIZ(10)
     INTEGER *4 KIKY
     INTEGER *2 KTY,KT,KE,NPIL,KR
     REAL *4 LPIL,KPAT,KP,KU,KF,KM,K1
     COMMON /XZX/ SINA(10),SINB(10),COSA(10),COSB(10),DECX(10),DECZ(10)
     COMMON /ZXZ/ LPIL(10),KTY(32),KT(32,32),KE(32,32),NPIL(5)
     COMMON /YXY/ X(3,10),Z(3,10),Y(3,10),KPAT(10),KR(10),H(10),O(10)
     COMMON /YYY/ DES(10),CON(10),NED(10),RA(10,40),OXZ(10,2)
     COMMON /UFP/ KP,KU,KF,KM,K1
     COMMON /LIS/ LIST,NS
     EQUIVALENCE (CP(1),KPAT(1))
     DETER(X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2,X3,Y3,Z3) = X1*Y2*Z3 + X2*Y3*Z1 + X3*Y1*Z2
    &   - Z1*Y2*X3 - Z2*Y3*X1 - Z3*Y1*X2
     IF(LIST.NE.0)
    &WRITE(M9,85)
     DO 60 J = 1,NOR
     L = KTY(J)
     NR = NPIL(L)
     DO 60 I = 1,NR
     IF(KE(I,J).EQ.0) GOTO 60
     K = KE(I,J)
```

```
      XO = DX(I,L)
      ZO = DZ(J)
      YO = 0.
      DOX = - DECX(K) / LPIL(K)
      DOZ = - DECZ(K) / LPIL(K)
      DO 5 M = 1,30
    5 SDP(M) = 0.
      DO 10 N = 1,NDL
      U1 = X(1,N)
      U2 = Y(1,N)
      U3 = Z(1,N)
      V1 = X(2,N)
      V2 = Y(2,N)
      V3 = Z(2,N)
      W1 = X(3,N)
      W2 = Y(3,N)
      W3 = Z(3,N)
      A5 =  DETER(U2,U3,1.,V2,V3,1.,W2,W3,1.)
      B5 = -DETER(U1,U3,1.,V1,V3,1.,W1,W3,1.)
      C5 =  DETER(U1,U2,1.,V1,V2,1.,W1,W2,1.)
      D5 = -DETER(U1,U2,U3,V1,V2,V3,W1,W2,W3)
      CAPA = -(A5*XO + B5*YO + C5*ZO + D5) / (A5*DOX + B5*1. + C5*DOZ)
      XI = XO + CAPA * DOX
      YI = YO + CAPA * 1.0
      ZI = ZO + CAPA * DOZ
      IF(YI.LT.0.) YI = 0.
      S = SQRT((XO-XI)**2 + (ZO-ZI)**2 + (YO-YI)**2)
      SDP(N) = S
      IF(S.GE.LPIL(K)) GOTO 15
   10 CONTINUE
   15 CONTINUE
      DIX(K) = DO
      IF(DC.LT.1) GOTO17
      IF(NR.EQ.1) GOTO 17
      IF(I.EQ.1)  BO = DX(2,L)-DX(1,L) - DC
      IF(I.EQ.NR) BO = DX(NR,L)-DX(NR-1,L) - DC
      IF(I.GT.1.AND.I.LT.NR) BO = (DX(I+1,L)-DX(I-1,L))/2. -DC
      HE = (1. + DC) * 3.
      HO = LPIL(K) - SDP(1)
      IF(HO.LT.HE) HE = HO
      NK = NR
      HC = HE * 0.6
      IF(BO.GE.HC) GOTO 17
      ASSIGN 16 TO KIKY
      GOTO 70
   16 DIX(K) = DO
   17 DIZ(K) = DO
      IF(DC.LT.1) GOTO 19
      IF(NDR.EQ.1) GOTO 19
      IF(J.EQ.1) BO = DZ(2) - DZ(1) - DC
```

```
      IF(J.EQ.NOR) BO=OZ(NOR) - OZ(NOR-1) - DC
      IF(J.GT.1.AND.J.LT.NOR) BO = (OZ(J+1) - OZ(J-1)) / 2. - DC
      IF(BO.GE.HC) GOTO 19
      NK = NOR
      ASSIGN 18 TO KIKY
      GOTO 70
   18 DIZ(K) = DO
   19 DO = 1.
      PAS = DC /2.
      IF(NS.NE.0) PAS = DC * NS
      IF(DC.LE.0.6) PAS = 0.6
      NB =(LPIL(K) - SOP(1)) / PAS
      IF(NB.GT.40) NB = 40
      PAS =(LPIL(K) - SOP(1)) / NB
      SOP(1) = SOP(1) + PAS/2
      C = SOP(1)
      IF(C.GT.SOP(2)) SOP(2) = C
      B = LPIL(K) - C - PAS / 2.
      CON(K) = C
      DES(K) = B
      NED(K) = NB
      IF(LIST.NE.0)
     &WRITE(M9,90) I,J,K,N,(SOP(M),M=1,N)
      F = PAS /2.
      DO 30 II = 1,NB
      DO 20 JJ = 2,N
      DEP = SOP(JJ) - C + PAS/2.
      IF(F.LE.DEP) GOTO 25
   20 CONTINUE
   25 JK = JJ - 1
      JU = JK-1
      C7 = COSA(K)
      CRE = CREK(F,JK,C7)
      FS = F - PAS/2.
      FJ = F + PAS/2.
      DET = SOP(JK)-C+PAS/2.
      IF(JK.EQ.1) DET=0.
      IF(DET.LE.FS) OXO = CP(JK)/2. * CRE
      IF(DET.GT.FS) OXO = CP(JK) * (F-DET)/PAS * CRE
      IF(DET.GT.FS) OXO = OXO + CP(JU) * (DET-FS)/PAS * CREK(F,JU,C7)
      IF(DEP.GE.FJ) OXO = OXO + CP(JK)/2.*CRE
      IF(DEP.LT.FJ) OXO = OXO + CP(JK)*(DEP-F)/PAS * CRE
      IF(DEP.LT.FJ) OXO = OXO + CP(JJ)*(FJ-DEP)/PAS * CREK(F,JJ,C7)
      CX=OXO
      RA(K,II) = OXO * DO * PAS
C     RA(K,II) = REACTIUNE UNITARA PENTRU DO = 1.
   30 F = F + PAS
      IF(LIST.NE.0)
     &WRITE(M9,95) DIX(K),DIZ(K),C,B,PAS,NED(K),(RA(K,K3),K3=1,NB)
      IF(KP.NE.0) RIG(K,1,1)=KP
```

```
      RIG(K,5,1)=KU
      IF(KP.NE.0) GOTO 40
      U7 = DC / 5.
      IF(U7.GT.1) U7 = 1.
      RIG(K,1,1)=0.785 * DC*DC / (LPIL(K)/E + U7/CX)
   40 CONTINUE
   60 CONTINUE
      GOTO 80
   70 U = 1.
      IF(NK.EQ.2) U = 0.6
      IF(NK.EQ.3) U = 0.5
      IF(NK.GE.4) U = 0.45
      U = U + (1. - U) * BO / HE / 0.6
      DO = DU * U
      GOTO KIKY,(16,18)
   80 CONTINUE
      DO 83  KY = 1,KETA
      COZ = ABS(COSB(KY))
      SOZ = ABS(SINB(KY))
      SC = 1.570796
      IF(COZ.NE.0) SC = ATAN(SOZ/COZ)
      DXZ(KY,1) = DIX(KY) + (DIZ(KY) - DIX(KY)) * SC / 1.570796
      DXZ(KY,2) = DIZ(KY) + (DIX(KY) - DIZ(KY)) * SC / 1.570796
   83 CONTINUE
      IF(LIST.NE.0) WRITE(M9,100)(I,DXZ(I,1),DXZ(I,2),I=1,KETA)
   85 FORMAT('1      SEGMENTAREA COLOANELOR (PILOTILOR) ETALON ')
   90 FORMAT(///'0    PILOTUL NR.',I3,' DE PE RINDUL',I3,' DE TIP',I2,
     &'.  NUMAR DE SEGMENTE :',I3//'     COTELE PUNCTELOR DE INTERSECTIE
     &DINTRE PILOT SI STRATELE TERENULUI :'/ (14F8.2))
   95 FORMAT(///'0    D-X =',F5.2,' M.    D-Z =',F5.2,' M.     CONS.=',F5.2,
     &' M.     DESCHIDERE DE CALCUL :',F6.2,' M.' /'     DISTANTA DINTRE L
     &EGATURI :',F5.2,' M.     NUMARUL LEGATURILOR :',I3 /
     &'0   REACTIUNI ELASTICE (T/M) : '/(10F12.2))
  100 FORMAT(////'0     LATIMI DE CALCUL PRINCIPALE'/'0  TIP-PILOT    D-PR.
     &     D-SEC'/(18,F12.3,F9.3))  *
      RETURN
      END


      SUBROUTINE SLAD(M9,KETA,YY,ZE,ZZ,RIG,EI,EIC,RIGTOR)
      REAL *4 IRAK(3) /'PRINCIPALE :'/,IRAN(3) /'SECUNDARE : '/
      DIMENSION YY(40,40),ZZ(40,7),ZE(40,20,2),RIG(10,5,2),R(40),CBA(2),
      COMMON /XZX/ SINA(10),SINB(10),COSA(10),COSB(10),DECX(10),DECZ(10)
      COMMON /YYY/ DES(10),CON(10),NED(10),RA(10,40),DXZ(10,2)
      COMMON /ART/ NART(10,2)
      COMMON /LIS/ LIST,NS
      DATA CBA/' P=1 M=1'/
      DO 80 KY = 1,KETA
      M = 1
      BEC = DXZ(KY,M)
```

```
    1 CONTINUE
      NR = NED(KY)
      N  = NR - 2
      B  = DES(KY)
      C  = CON(KY)
      IY = NART(KY,M)
      S = B/(NR-1)
      DO 5 I = 1,NR
    5 R(I) = RA(KY,I)*BEC
C     CALCULUL COEF. DE INFL.
      DO 10 I = 1,N
      X = I * S
      Y = B - X
      DO 10 J = 1,N
      V = J * S
      W = B - V
      YIN = (Y*W/R(1) + X*V/R(NR))/B/B
      YIJ = X*W*(B*B - X*X - W*W)/B/EI/6.
      IF(X.GT.V) YIJ = Y*V*(B*B -Y*Y -V*V)/B/EI/6.
      YY(I,J)= YIN + YIJ
      IF(I.EQ.J) YY(I,I) =YY(I,I) + 1./R(I+1)
   10 CONTINUE
      IF(LIST.NE.0) WRITE(M9,101) KY,BEC
      IF(LIST.EQ.0) GOTO 16
      DO 15 I = 1,N
   15 WRITE(M9,102) I,(YY(I,J),J=1,N)
   16 CONTINUE
C     CALCULUL TERMENILOR LIBERI
      DO 30  J = 1,2
      V1 = C/B + 1.
      V2 = C/B
      CU = C
      IF(J.EQ.1) GOTO 20
      V1 = 1./B
      V2 = 1./B
      CU = 1.
   20 DO 25 I = 1,N
      X = I * S
      Y = B - X
      YIN = V1/R(1)*Y/B - V2/R(NR)*X/B
      YIJ = CU*X*Y/B * (B+Y)/6./EI
   25 ZZ(I,J) = YIN -YIJ
      IF(LIST.EQ.0) GOTO 30
      WRITE(M9,103) (BA(J),(ZZ(I,J),I=1,N)
   30 CONTINUE
      CALL SISTEM(YY,ZZ,N,1,2)
C     CALCULUL EFORTURILOR IN LEGATURI
      DO 60 J = 1,2
      F = 0.
      SF = 0.
```

```
      DW = 0.
      DO 35 I = 1,N
      SF = SF + ZZ(I,J)
      F = F * S
   35 DW = DW + F * ZZ(I,J)
      DW = DW / B
      SW = SF - DW
      IF(J.EQ.1) ZE(1 ,KY   ,M)=(C+B)/B - SW
      IF(J.EQ.1) ZE(NR,KY   ,M)=-C/B - DW
      IF(J.EQ.2) ZE(1 ,KY+10,M)=1./B - SW
      IF(J.EQ.2) ZE(NR,KY+10,M)=-1/B - DW
      IF(J.EQ.2) GOTO 45
      DO 40 I = 1,N
   40 ZE(I+1,KY,M) = ZZ(I,1)
      GOTO 55
   45 DO 50 I = 1,N
   50 ZE(I+1,KY+10,M)=ZZ(I,2)
   55 KI = KY
      IF(J.EQ.2) KI = KY + 10
      IF(LIST.EQ.0) GOTO 60
      WRITE(M9,104) GBA(J),(ZE(I,KI,M),I=1,NR),SW,DW
   60 CONTINUE
C     ROTIRE & SAGEATA DIN P = 1.
      FIP1 = C*C/EIC/2.
      FIP2 = C*B/EI/3.
      FIP3 =(ZE(1,KY,M)/R(1) - ZE(NR,KY,M)/R(NR))/B
      FIP4 = 0.
      DO 65 K = 1,N
      I = K + 1
      V = K * S
      W = B - V
   65 FIP4 = FIP4 + ZE(I,KY,M) * V * W *(1.+W/B)/6./EI
      YP1 = FIP1 * C /1.5
      YP2 = FIP2 * C
      YP3 = FIP3 * C + ZE(1,KY,M)/R(1)
      YP4 = FIP4 * C
      IF(LIST.EQ.0) GOTO 66
      WRITE(M9,105) FIP1,FIP2,FIP3,FIP4,YP1,YP2,YP3,YP4
   66 CONTINUE
C     ROTIRE & SAGEATA DIN M = 1.
      KI = KY + 10
      FIM1 = C/EIC
      FIM2 = B/3./EI
      FIM3 = (ZE(1,KI,M)/R(1) - ZE(NR,KI,M)/R(NR))/B
      FIM4 = 0.
      DO 70 K = 1,N
      I = K + 1
      V = K * S
      W = B - V
   70 FIM4 = FIM4 + ZE(I,KI,M) * V * W *(1.+W/B)/6./EI
```

```
      YM1 = FIM1* C /2.
      YM2 = FIM2* C
      YM3=FIM3*C+ZE(I,KI ,M)/R(I)
      YM4 = FIM4* C
      IF(LIST.EQ.0) GOTO 74
      WRITE(M9,106) FIM1,FIM2,FIM3,FIM4,YM1,YM2,YM3,YM4
   74 CONTINUE
      FIP = FIP1 + FIP2 + FIP3 + FIP4
      YP  = YP1  + YP2  + YP3  + YP4
      FIM = FIM1 + FIM2 + FIM3 + FIM4
      YM  = YM1  + YM2  + YM3  + YM4
C     CALCULUL RIGIDITATILOR
      RT = 1. / (YP - YM * FIP / FIM)
      RTM= RT * FIP / FIM
      RM = 1. / (FIM - FIP * YM / YP)
      RMT= RM * YM / YP
      IF(IY.NE.0) RM = 0.
      IF(IY.NE.0) RTM= 0.
      IF(IY.NE.0) RMT= 0.
      IF(IY.NE.0) RT = 1./YP
      IF(M.EQ.2) RIG(KY,1,2)=RIG(KY,1,1)
      RIG(KY,2,M) = RM
      RIG(KY,3,M) = RTM
      RIG(KY,4,M) = RT
      IF(RIGTOR.NE.0) RIG(KY,5,M)=RIGTOR
      IF(RIGTOR.EQ.0.AND.M.EQ.1) RIG(KY,5,1)=0.2*RIG(KY,2,1)
      IF(RIGTOR.EQ.0.AND.M.EQ.2)RIG(KY,5,1)=.1*(RIG(KY,2,1)+RIG(KY,2,2)
      IF(M.EQ.2) RIG(KY,5,2)=RIG(KY,5,1)
      IF(LIST.EQ.0) GOTO 75
      WRITE(M9,107) KY,(RIG(KY,I,M),I=1,5),RMT
   75 IF(M.EQ.2) GOTO 80
      AA = ABS(BEC - DXZ(KY,2)
      IF(AA.GT.0.05) GOTO 78
      IY = NART(KY,2)
      IF(IY.NE.0) RM = 0.
      IF(IY.NE.0) RTM= 0.
      IF(IY.NE.0) RMT= 0.
      IF(IY.NE.0) RT = 1./YP
      RIG(KY,1,2)=RIG(KY,1,1)
      RIG(KY,2,2) = RM
      RIG(KY,3,2) = RTM
      RIG(KY,4,2) = RT
      RIG(KY,5,2)=RIG(KY,5,1)
      DO 76 I=1,NR
      ZE(I,KY+10,2)=ZE(I,KY+10,1)
   76 ZE(I,KY,2)=ZE(I,KY,1)
      GOTO 80
   78 M = 2
      BEC = DXZ(KY,M)
      GOTO 1
```

```
   80 CONTINUE
      WRITE(M9,108)
      DO 85 KY = 1,KETA
      WRITE(M9,109) KY
      WRITE(M9,110) IRAK,     (RIG(KY,I,1),I=1,5)
      WRITE(M9,110) IRAN,     (RIG(KY,I,2),I=1,5)
   85 CONTINUE
  101 FORMAT('1  COEFICIENTII DE INFLUENTA PENTRU PILOT (COLOANA) TIP',
     & I2,'   LATIME DE CALCUL =',F6.3,' METRI')
  102 FORMAT('0  ECUATIA ',I2,/ (8G15.6))
  103 FORMAT(///'0  TERMENI LIBERI PENTRU',A4,/(8G15.6))
  104 FORMAT(///'0  EFORTURI IN LEGATURI PRODUSE DE',A4,/(8F15.6))
  105 FORMAT(///'0  ROTIRI SI SAGETI-CAPITEL DIN P = 1',/(4G16.6))
  106 FORMAT( /'0  ROTIRI SI SAGETI-CAPITEL DIN M = 1',/(4G16.6))
  107 FORMAT(///'0  RIGIDITATILE PILOTULUI (COLOANEI)',I2,///'   KL =',
     &F8.2,' T/M    KM =',F8.2,' TM    KTM=',F8.2,' T    KT =',F8.2,
     &' T/M  KTORS=',F8.2,' T        KMT=',F8.2,'TM.')
  108 FORMAT('1      RIGIDITATILE COLOANELOR (PILOTILOR) ETALON ' /
     &       '      DUPA DIRECTIILE PRINCIPALE PROPRII : ' // )
  109 FORMAT(//'       COLOANA(PILOT) TIP',I2)
  110 FORMAT(/'      RIGIDITATI ',3A4    /
     &'      RIGIDITATEA AXIALA (T/M)          =',F10.1    /
     &'      RIGIDITATE LA INCOVOIERE (TM.) =',F10.1    /
     &'      RIGIDITATEA RECIPROCA T<-->M    =',F10.1    /
     &'      RIGIDITATE LA TRANSLATIE (T/M) =',F10.1    /
     &'      RIGIDITATE LA RASUCIRE (TM.)   =',F10.1    )
      RETURN
      END


      SUBROUTINE COEFIS(M9,KETA,NOR,DX,DZ,RIG,SIS)
      INTEGER *2 KTY,KT,KE,NPIL,KR
      REAL *4 R(6,6) /36*0./, D(6,6) /36*0./,LPIL
      DIMENSION DX(32,5),DZ(32),RIG(10,5,2),SIS(6,6),TAB(6,6),SAS(6,6)
      DIMENSION SKS(6,6),EFORT(14,6),TUB(6,6),EF(6)
      COMMON /ZXZ/ LPIL(10),KTY(32),KT(32,32),KE(32,32),NPIL(5)
      COMMON /XZX/ SINA(10),SINB(10),COSA(10),COSB(10),DECX(10),DECZ(10)
      COMMON /LIS/ LIST,NS
      KR = 0
      GOTO 1
      ENTRY SOLCIT(IKAR,SKS,EFORT)
10000 WRITE(M9,105)
      KR = 5
    1 IN = 4
      IF(KR.EQ.0) IKAR = 0
      DO 30 KY = 1,KETA
      R(1,1) = RIG(KY,1,1)
      R(2,2) = RIG(KY,4,1)
      R(2,5) =-RIG(KY,3,1)
      R(3,3) = RIG(KY,4,2)
```

```
      R(3,4) = RIG(KY,3,2)
      R(4,3) = RIG(KY,3,2)
      R(4,4) = RIG(KY,2,2)
      R(5,2) =-RIG(KY,3,1)
      R(5,5) = RIG(KY,2,1)
      R(6,6) = RIG(KY,5,1)
      D(1,1) = COSA(KY)
      D(2,1) =-SINA(KY) * COSB(KY)
      D(3,1) =-SINA(KY) * SINB(KY)
      D(1,2) = SINA(KY)
      D(2,2) = COSA(KY) * COSB(KY)
      D(3,2) = COSA(KY) * SINB(KY)
      D(2,3) =-SINB(KY)
      D(3,3) = COSB(KY)
      D(4,4) = COSA(KY) * COSB(KY)
      D(5,4) = COSA(KY) * SINB(KY)
      D(6,4) = SINA(KY)
      D(4,5) = -SINB(KY)
      D(5,5) =  COSB(KY)
      D(4,6) =-SINA(KY) * COSB(KY)
      D(5,6) =-SINA(KY) * SINB(KY)
      D(6,6) = COSA(KY)
      DO 30 I = 1,NOR
      N = KTY(I)
      NR= NPIL(N)
      Z = DZ(I)
      D(4,1) = -Z * COSA(KY)
      D(4,2) = -Z * SINA(KY)
      DO 30 J = 1,NR
      KC = KE(J,I)
      IF(KI(J,I),NE,KY) GOTO 30
      X = DX(J,N)
      W = Z * COSB(KY) - X * SINB(KY)
      D(5,1) = X * COSA(KY)
      D(6,1) = -W * SINA(KY)
      D(5,2) =  X * SINA(KY)
      D(6,2) =  W * COSA(KY)
      D(6,3) = X * COSB(KY) + Z * SINB(KY)
      D(6,3) = -D(6,3)
      IF(IKAR.EQ.0) GOTO 9
      DO 2 K = 1,6
      DO 2 L = 1,6
      TUB(K,L) = 0.
      DO 2 M = 1,6
    2 TUB(K,L) = TUB(K,L) + SKS(K,M)*D(M,L)
      DO 3 K = 1,6
      DO 3 L = 1,6
      TAB(K,L) = 0.
      DO 3 M = 1,6
    3 TAB(K,L) = TAB(K,L) + TUB(K,M)*R(M,L)
```

```
      DO 4 K = 1,6
      EF(K) = 0.
      DO 4 L = 1,6
    4 EF(K) = EF(K) + TAB(L,K)
      WRITE(M9,106) I,J,(EF(M),M=1,6)
      LI = 0
      IF(J.EQ.1.AND.I.EQ.1) LI = 1
      IF(J.EQ.NR.AND.I.EQ.1)LI = 2
      IF(J.EQ.1.AND.I.EQ.NOR) LI=3
      IF(J.EQ.NR.AND.I.EQ.NOR)LI=4
      IF(LI.EQ.0) GOTO 6
      DO 5 M = 1,6
    5 EFORT(LI,M) = EF(M)
    6 CONTINUE
      IF(KC.EQ.0.AND.LI.EQ.0) GOTO 30
      IN = IN + 1
      DO 7 M = 1,6
    7 EFORT(IN,M) = EF(M)
    8 CONTINUE
      GOTO 30
    9 CONTINUE
      DO 10 K = 1,6
      DO 10 L = 1,6
      TAB(K,L) = 0.
      DO 10 M = 1,6
      TAB(K,L) = TAB(K,L) + D(K,M)*R(M,L)
   10 CONTINUE
      IF(LIST.NE.0) WRITE(M9,101) KY,((R(K,L),L=1,6),K=1,6)
      IF(LIST.NE.0.AND.KC.NE.0) WRITE(M9,102) ((D(K,L),L=1,6),K=1,6)
      IF(LIST.NE.0.AND.KC.NE.0) WRITE(M9,103) ((TAB(K,L),L=1,6),K=1,6)
      DO 15 K = 1,6
      DO 15 L = 1,6
      SAS(K,L)= 0.
      DO 15 M = 1,6
      SAS(K,L)= SAS(K,L) + TAB(K,M)*D(L,M)
   15 CONTINUE
      IF(LIST.NE.0.AND.KC.NE.0) WRITE(M9,104) ((SAS(K,L),L=1,6),K=1,6)
      DO 20 K = 1,6
      DO 20 L = 1,6
   20 SIS(K,L) = SIS(K,L) + SAS(K,L)
   30 CONTINUE
  101 FORMAT('0      COLOANA ETALON TIP',I2 /'0      MATRICEA DE RIGIDITAT
     &E'/(6F12.3))
  102 FORMAT('0      MATRICEA DE TRANSFORMARE A DEPLASARILOR ' /(6F15.5))
  103 FORMAT('0      MATRICEA TAB = D * R'/ (6F15.5))
  104 FORMAT('0      MATRICEA SAS = D * R * D-TRANSPUS'/(6F15.5))
  105 FORMAT('1      SOLICITARILE COLOANELOR (PILOTILOR)  (IN T $I TM)'/'
     &0  $IR  PILOT',5X,'N',7X,'T-1',6X,'T-2',6X,'M-1',6X,'M-2',7X,'MT')
  106 FORMAT('0',I4,I6,1X,6F9.1)
      RETURN
```

```
      END


      SUBROUTINE SISTEM(A,B,NA,KL,KJ)
      DIMENSION A(40,40),B(40,7)
      DO 10 K=1,NA
      DO 10 I=1,NA
      IF(K-I)2,10,2
    2 IF(A(I,K))3,10,3
    3 V=A(I,K)/A(K,K)
      DO 5 J=K,NA
    5 A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)*V
      DO 8 KI=KL,KJ
    8 B(I,KI)=B(I,KI)-B(K,KI)*V
   10 CONTINUE
      DO 15 I=1,NA
      DO 15 KI=KL,KJ
   15 B(I,KI)=B(I,KI)/A(I,I)
      RETURN
      END


      SUBROUTINE EFODEP(M9,NOR,ZZ,EFORT,KETA)
      INTEGER *2 KTY,KT,KE,NPIL
      REAL *4 IRA(3,2)/'PRINCIPALA :SECUNDARA : '/,LPIL
      DIMENSION ZZ(40,20,2),EFORT(14,6)
      DIMENSION R(40),ET(40),EM(40),TM(40),ZT(40),ZM(40),SD(40),P(40)
      COMMON /ZXZ/ LPIL(10),KTY(32),KT(32,32),KE(32,32),NPIL(5)
      COMMON /XZX/ SINA(10),SINB(10),COSA(10),COSB(10),DECX(10),DECZ(10
      COMMON /YYY/ DES(10),CON(10),NED(10),RA(10,40),DXZ(10,2)
       COMMON /LIS/ LIST,NS
      LYK = 4
      DO 30 K = 1,NOK
      KV = KTY(K)
      NP = NPIL(KV)
      DO 30 M = 1,NP
      LUK = 0
      IF(M.EQ.1.AND.K.EQ.1) LUK = 1
      IF(M.EQ.1.AND.K.EQ.1) GOTO 2
      IF(M.EQ.NP.AND.K.EQ.1) LUK = 2
      IF(M.EQ.NP.AND.K.EQ.1) GOTO 2
      IF(M.EQ.1.AND.K.EQ.NOR) LUK = 3
      IF(M.EQ.1.AND.K.EQ.NOR) GOTO 2
      IF(M.EQ.NP.AND.K.EQ.NOR) LUK = 4
      IF(M.EQ.NP.AND.K.EQ.NOR) GOTO 2
      IF(KE(M,K).NE.0) GOTO 1
      GOTO 30
    1 LYK = LYK + 1
      IF(M.EQ.1.AND.K.EQ.1)    GOTO 30
      IF(M.EQ.1.AND.K.EQ.NOR)  GOTO 30
```

```
      IF(M.EQ.NP.AND.K.EQ.1)   GOTO 30
      IF(M.EQ.NP.AND.K.EQ.NDR) GOTO 30
    2 CONTINUE
      J = KT(M,K)
      NR= NED(J)
      C = CON(J)
      D = DES(J)
      S = D /(NR-1)
      LL = LUK
      IF(LUK.EQ.0) LL = LYK
      DO 30 L = 1,2
      ETO = EFORT(LL,L+1)
      EMO = EFORT(LL,5)
      IF(L.EQ.2) EMO =-EFORT(LL,4)
      DO 5 N = 1,NR
      ZT(N)= ZZ(N,J,L)     *ETO
      ZM(N)= ZZ(N,J+10,L) *EMO
      R(N) = 1./RA(J,N)/DXZ(J,L) * (ZT(N) + ZM(N)) * 100.
      P(N) = (ZT(N) + ZM(N))/S/DXZ(J,L)/10.
      EM(N)= 0.
      ET(N)= 0.
    5 TM(N)= ZT(N) + ZM(N)
      ET(1) = ETO
      EM(1) = EMO + C * ETO
      SD(1) = C
      DO 10 I = 2,NR
      SD(I) = SD(I-1) + S
      ET(I) = ET(I-1) - TM(I-1)
      EM(I) = EM(I-1) + ET(I)*S
   10 CONTINUE
      EM(NR) = -S * TM(NR)/8.
      IF(L.EQ.1) WRITE(M9,101) J,K,N,(EFORT(LL,IC),IC=1,6)
      WRITE(M9,102) ((PA(IC,L),IC=1,3)
      DO 15 I = 1,NR
   15 WRITE(M9,103) I,SD(I),ET(I),EM(I),P(I),R(I)
   30 CONTINUE
  101 FORMAT('1'///'0    PILOT (COLOANA) TIP',I3/'      RINDUL',I3,
     &' POZITIA',I3 /'0    SOLICITARI LA CAPITEL : ' /
     &'      N  =',F7.2,'T.    T-1=',F7.2,' T.    T-2=',F7.2,' T. ' /
     &'      M-1=',F7.2,'TM    M-2=',F7.2,' TM    MT =',F7.2,' TM ')
  102 FORMAT(///'      SOLICITARI SI DEFORMATII IN LUNGUL COLOANEI (PILOTU
     &LUI)'/'      IN DIRECTIA ',3A4/'0  SECTIUNE',8X,'COTA',8X,'T',9X,
     &'M',5X,'PRESIUNI   SAGETI')
  103 FORMAT(I7,11X,F5.2,F11.2,F10.2,F10.3,F10.3)
      RETURN
      END


      FUNCTION CREK(S,I,CS)
C     EFECTUL SCHIMBARII LEGII DE VARIATIE A COEF. DE PAT.
```

```
      INTEGER *2 KR
      COMMON /YXY/ XZY(90),CP(10),KR(10),FC(20)
      CREK = S ** CS
      IF(KR(I).EQ.1) CREK = 1.0
      IF(KR(I).EQ.2) CREK = SQRT(S)*CS
      RETURN
      END
END


$ENTRY
$FORTRAN ** STOP
```

CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA REZISTENȚEI LA OBOSEALĂ A RACORDURILOR SPECIALE

de D. RAȘEEV și V. ULMANU
Institutul de petrol și gaze Ploiești

În prima parte a lucrării se cercetează complex caracteristicile structurale, mecanice, statice, dinamice și de oboseală ale oțelurilor și semifabricatelor folosite sau în perspectivă a fi folosite în fabricația racordurilor speciale.
Se prezintă rezultatele încercărilor la oboseală ale racordurilor speciale de dimensiuni reale, cercetînd și influența strîngerii prealabile asupra durabilității acestora. Cercetările se concretizează în construirea diagramei Heigh a rezistențelor la oboseală pentru eforturi normale.
În a doua parte a lucrării se prezintă o metodă de determinare a coeficientului de siguranță la oboseală pentru solicitări compuse, finalizată în calcul nomografic.

În lucrarea [16] s-a stabilit o metodă de calcul la oboseală pentru solicitarea echivalentă probabilă la care se poate considera că este supus racordul special în condițiile obișnuite de foraj (baza determinării durabilității acestuia). Totodată s-a prezentat mașina de încercat la oboseală, necesară efectuării cercetărilor în conformitate cu metodologia propusă.

În prezenta lucrare se cercetează în continuare aspectele practice aplicative : caracteristicile materialelor folosite în fabricația racordurilor speciale și căile de creștere ale acestora, în special în vederea asigurării rezistenței la oboseală ridicate a racordurilor speciale, determinarea rezistenței la oboseală, diagrama rezistențelor la oboseală și calculul coeficientului de siguranță la oboseală al racordurilor speciale, pentru solicitări compuse.

1. CERCETAREA OȚELURILOR FOLOSITE LA FABRICAREA RACORDURILOR SPECIALE ȘI A CARACTERISTICILOR MECANICE ȘI DE OBOSEALĂ ALE ACESTORA

1.1. STADIUL ACTUAL AL PROBLEMEI

Pe plan mondial, la fabricarea racordurilor speciale se folosesc oțeluri de îmbunătățire de tip Cr, Cr—Ni, Cr—Mo, Cr—Ni—Mo. Prevederile din standarde se referă de obicei la prescripțiuni dimensionale și

numai în puține cazuri (STAS 325—67, 7570—66 GOST 5286—58) sînt prevăzute anumite categorii de oțeluri (mai mult ca urmare a unor considerente economice), prescriindu-se și caracteristicile mecanice statice și dinamice minime [5], [14], [15].

În literatura de specialitate sînt publicate studii și cercetări privind rezistența oțelurilor destinate racordurilor speciale cît și a rezistenței racordurilor, studiate pe modele sau pe racorduri speciale de dimensiuni reale, [1], [2], [3], [6], [7], [9], [13], [18], [19], [20], majoritatea cercetărilor limitîndu-se însă la caracteristici statice, ceea ce este cu totul insuficient [16].

De aceea, în cercetările efectuate s-au studiat complex oțelurile folosite actualmente la fabricația racordurilor speciale, caracteristicile lor metalurgice, variantele optime de tratament termic, caracteristicile mecanice statice, dinamice și de oboseală, cele din urmă studiindu-se pe epruvete și pe racorduri speciale (M_{i-1}; σ_{-1}) de dimensiune reală, 4 1/2″L, din producția uzinei furnizoare. Pe această bază s-au putut stabili căile de îmbunătățire a tehnologiei de fabricație, determinîndu-se totodată și cifrele de calcul la oboseală ale racordurilor speciale.

1.2. RACORDURILE SPECIALE CERCETATE

Racordurile speciale supuse încercărilor sînt prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Racordurile speciale supuse încercărilor

Nr. crt.	Dimensiunea racordului	Calitatea materialului	Tipul semifabricatului folosit la fabricarea racordului
1.	(114,3) 4 $\frac{1''}{2}$ L	41 CN 12	Cep forjat din laminat. Mufă forjată din țeavă
2.	(114,3) 4 $\frac{1''}{2}$ L	41 CN 12	Cep și mufă laminate
3.	(114,3) 4 $\frac{1''}{2}$ L	33 MoC 11	Cep și mufă laminate
4.	(114,3) 4 $\frac{1''}{2}$ L	36 MoCM 10	Cep și mufă laminate

1.3. CERCETAREA METALURGICĂ A OȚELURILOR FOLOSITE ÎN CONSTRUCȚIA RACORDURILOR SPECIALE

Pentru oțelurile 41 CN 12, 33 MoC 11 și 36 MoCN 10 din care s-au confecționat racordurile, s-au cercetat pe probe prelevate din racorduri, compoziția chimică, incluziunile nemetalice și grăuntele de austenită.

1.3.1. *Compoziția chimică* este dată în tabela 2. Ea se încadrează în prevederile STAS 791—66.

Tabela 2

Compoziția chimică a oțelurilor racordurilor speciale

Nr. crt.	Calitatea oțelului	Compoziția chimică %							
		C	Si	Mn	Cr	Ni	Mo	S	P
1.	41CN12 conf. STAS 791—66	0,37—0,45	0,17—0,37	0,40—0,80	0,45—0,79	1,00—1,40	—	max. 0,035	max. 0,035
2.	41CN12 racord laminat	0,40	0,36	0,58	0,61	1,16	—	0,016	0,021
3.	41CN12 racord forjat, 2 probe	0,39—0,42	0,36	0,59 0,59	0,60 0,61	1,16 1,15	—	0,015	0,019
4.	33MoC 11 conf. STAS 791—66	0,30 0,37	0,17—0,37	0,40—0,80	0,90—1,30	—	0,15—0,30	max. 0,035	max. 0,035
5.	33MoC 11 racord laminat	0,33	0,22	0,62	0,91	urme	0,15	0,018	0,017
6.	36MoCN10 conf. STAS 791—66	0,32—0,40	0,17—0,37	0,50—0,80	0,90 1,20	0,90—1,20	0,15 0,30	max. 0,035	max. 0,035
7.	36MoCN10 racord laminat	0,38	0,29	0,63	0,89	1,13	0,28	0,016	0,015

1.3.2. *Incluziunile nemetalice* (conform STAS 5949—65) sînt date în tabela 3. Oțelurile au un punctaj ridicat de incluziuni.

Tabela 3

Incluziuni nemetalice

Nr. crt.	Calitatea oțelului	Punctajul maxim pe tipuri de incluziuni				Suma punctajelor maxime pe același cîmp
		Sulfuri S	Oxizi OL+OP	Silicați SF+SP (SN)	Nitruri de Al și Ti	
1.	41CN12	0	3	4	0	5,5
2.	41CN12	0	4	5	0	7
3.	33MoCl1	0	peste 5	peste 5	0	7
4.	36MoCN10	0	5	peste 5	0	peste 5

1.3.3. *Mărimea grăuntelui de austenită* (conform STAS 5490—67) determinată prin metoda cementării, este dată în tabela 4. Oțelurile au grăunte fin, în special cel aliat cu molibden.

Tabela 4

Mărimea grăuntelui de austenită

Nr. crt.	Calitatea oţelului	Numerele punctajelor
1.	41CN12 laminat	5—6—6
2.	41CN12 forjat	6—6—6
3.	33MoCl1 laminat	9—8—8
4.	36 CN10 laminat	7—7—7

1.4. CERCETAREA CARACTERISTICILOR MECANICE ŞI DE OBOSEALĂ ALE OŢELURILOR FOLOSITE ÎN CONSTRUCŢIA RACORDURILOR SPECIALE

1.4.1. *Cercetarea rezistenţei racordurilor speciale.* S-a efectuat pe baza determinării caracteristicilor mecanice ale racordurilor speciale cercetate, conform STAS 325—67. La încercările de tracţiune s-au folosit epruvete $d_0 = 10$ mm; $L_0 = 5\ d_0$, la reziliență epruvete Mesnager ($b = 10$ mm; $h = 2$ mm), iar la oboseală epruvete avînd forma 1 a, (STAS 5878—69) $d_0 = 9{,}5$ mm, $l = 226$ mm. Rezultatele încercărilor sînt date în tabela 5.

Tabela 5

Nr. crt.	Calitatea oţelului	Caracteristicile mecanice			
		σ_r kgf/mm²	δ_5 %	KCU30/2 kgfm/cm²	HB kgf/mm²
1.	41CN12 prescripţii STAS 325—67	min. 85	min. 14	min. 8	253—320
2.	41CN12 laminat	89,3 (σ_c=67,5)	20 (z=55,2%)	6,3	269
3.	41CN12 forjat (două probe)	85,6 (σ_c=63,8)	21 (z=64)	8,41	285
		90 (σ_c=62)	20 (z=55)		
4.	33MoCl1 laminat (media a 2 probe)	79 (σ_c=61)	20,8 (z=68,2)	19	255
5.	36MoCN10 laminat media a 2 probe)	91,7 (σ_c=73)	17 (z=61,1)	14,8	265

Curbele lui Wöhler pentru epruvetele executate din materialul 41CN 12 laminat sau forjat, determinate pe epruvetele decupate din racordurile speciale, sînt date în figurile 1 şi 2.

1.4.2. *Studiul influenţei temperaturii de revenire asupra caracteristicilor mecanice şi de oboseală ale oţelurilor racordurilor speciale.* S-a făcut după următoarea metodologie :

— epruvetele au fost decupate din racordurile speciale folosite în cadrul studiului efectuat;

— au fost supuse tratamentului de recoacere completă la 830°C timp de 1,5 ore;

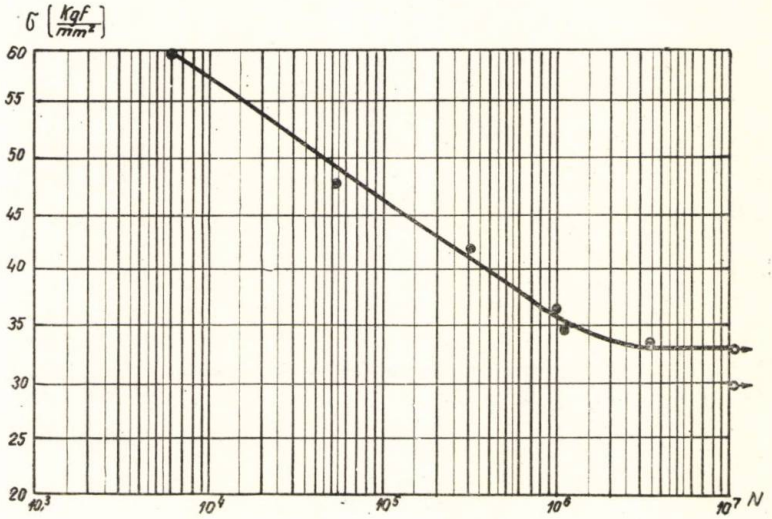


Fig. 1. — Curba Wöhler pentru oțelul 41CN12 laminat

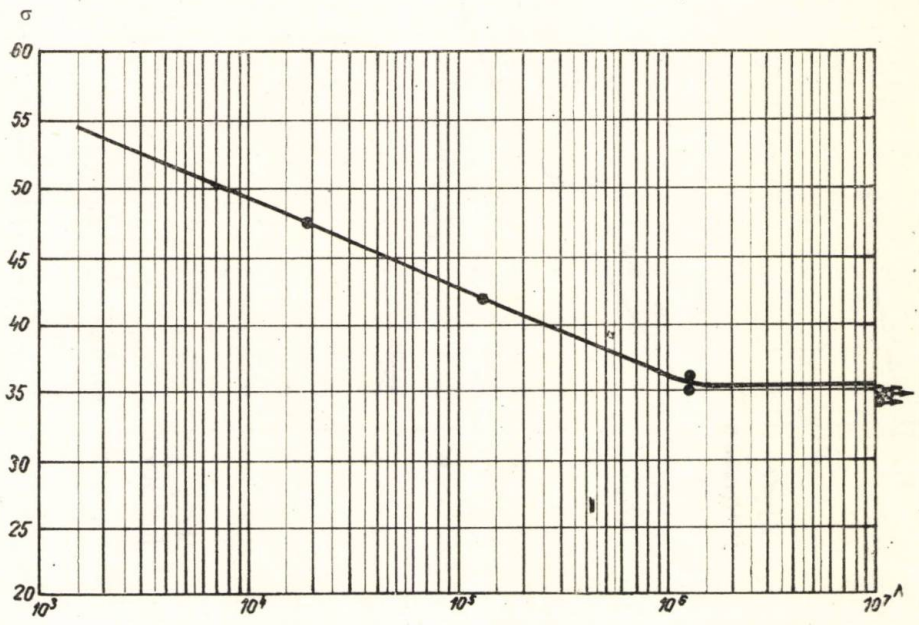


Fig. 2. — Curba Wöhler pentru oțelul 41CN12 forjat

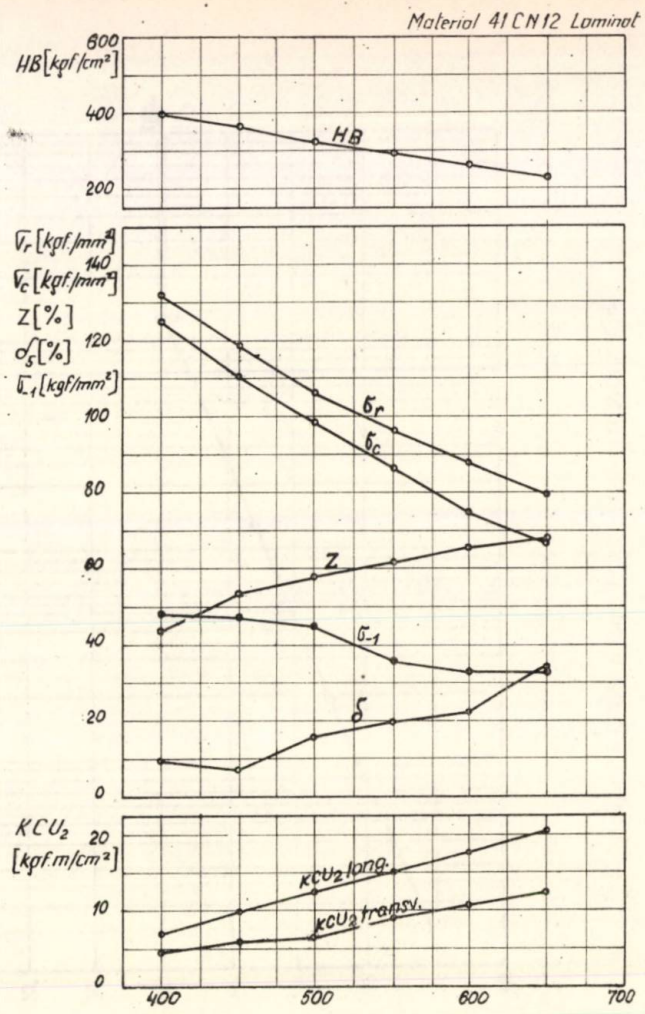


Fig. 3. — Variația caracteristicilor mecanice ale oțelului 41CN12 laminat în funcție de temperatura de revenire

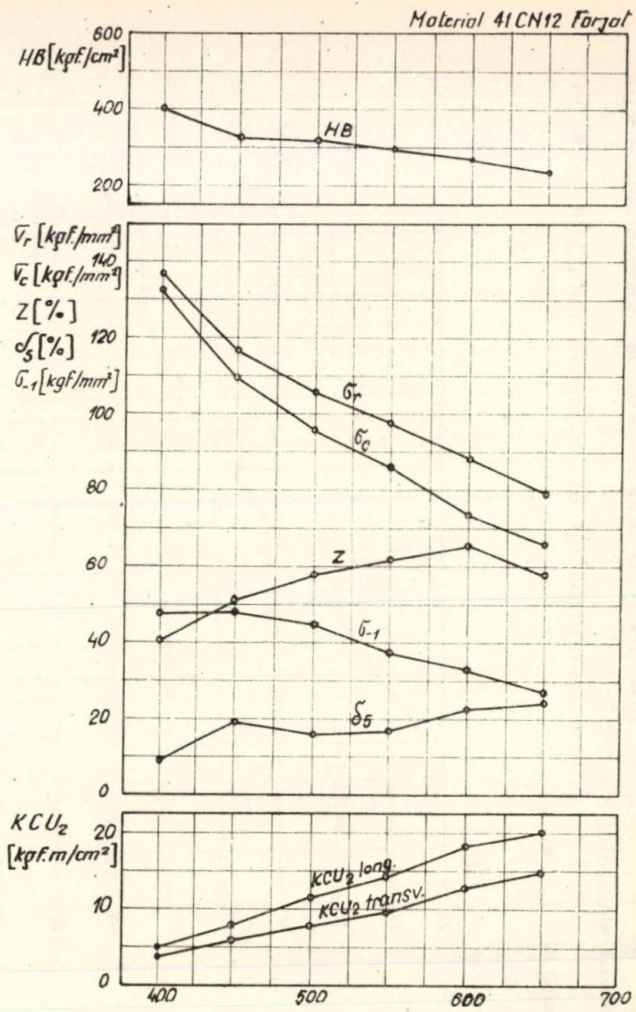


Fig. 4. — Variația caracteristicilor mecanice ale oțelului 41CN12 forjat în funcție de temperatura de revenire

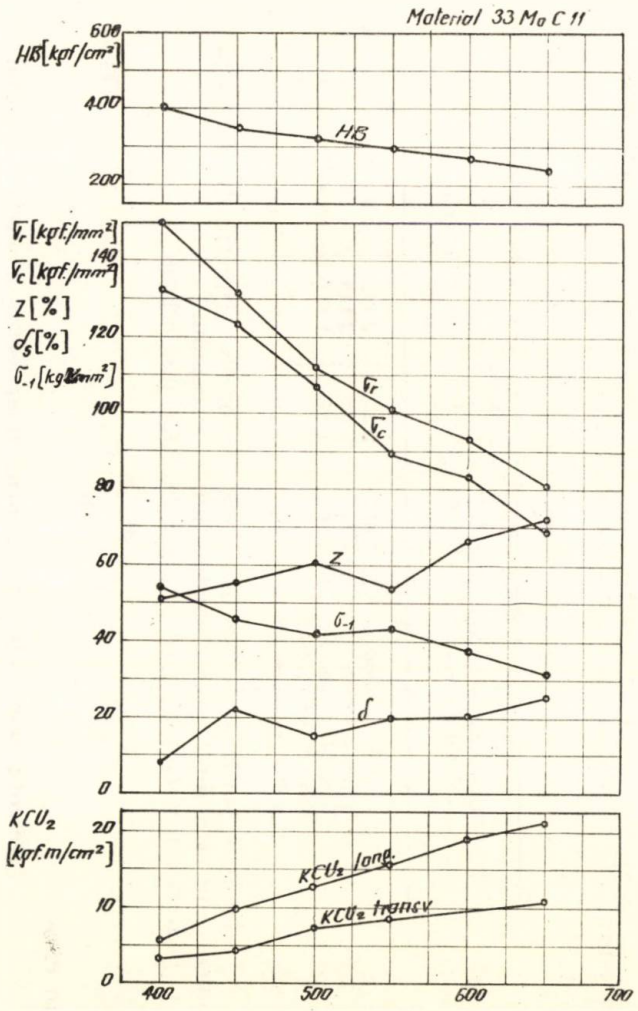


Fig. 5. — Variația caracteristicilor mecanice ale oțelului 33MoC11 laminat în funcție de temperatura de revenire

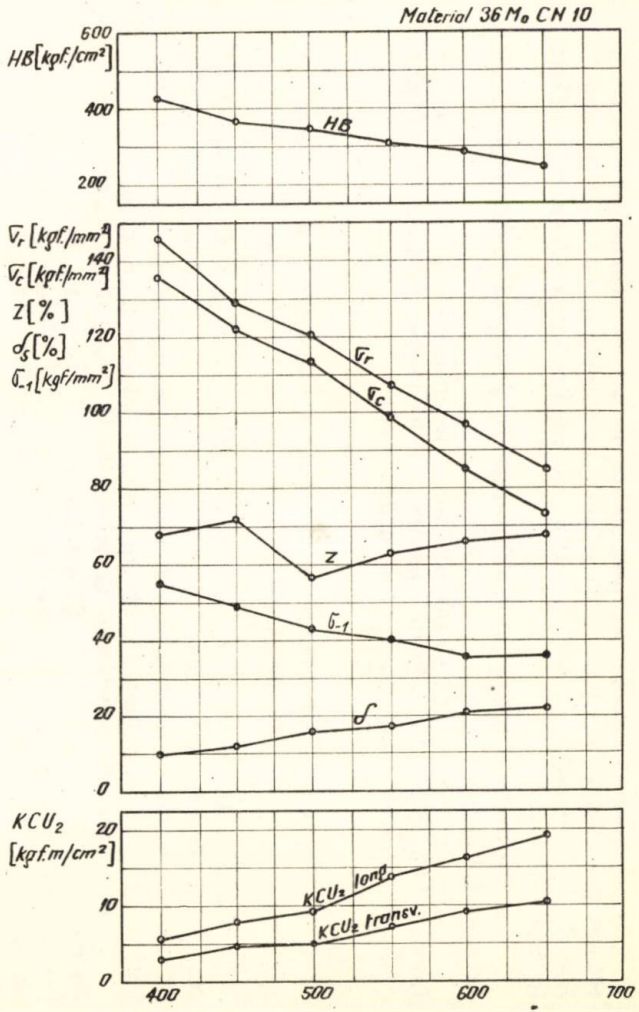


Fig. 6. — Variația caracteristicilor mecanice ale oțelului 36MoCN10 laminat în funcție de temperatura de revenire

— epruvetele brute au fost călite la temperaturile prevăzute în STAS 791—66 și revenite 100 minute la temperaturile 400°C; 450°C; 500°C; 550°C; 600°C și 650°C. Călirea și răcirea după revenire s-a făcut în ulei;

— epruvetele brute au fost prelucrate și supuse încercărilor indicate la 1.4.1.

Rezistențele la oboseală au fost determinate de baza metodei Locati, [4], [8], [11], folosind pentru calcul curba Wöhler, fig. 1 și 2.

Rezultatele sînt date în figurile 3—6.

1.5. CERCETAREA REZISTENȚEI LA OBOSEALĂ A RACORDURILOR SPECIALE DE DIMENSIUNEA 4 1/2" L, STAS 325-67

Încercările la oboseală ale racordurilor speciale s-au efectuat pe standul descris în cadrul lucrării [16] de tip „grindă în consolă" cu solicitare alternant simetrică la încovoiere, moment încovoietor maxim 6 000 kgfm, turația pînă la 600 rot/min, încărcare hidraulică.

Determinarea rezistenței la oboseală M_{i-1} s-a făcut, pentru racordurile speciale de 4 1/2"L STAS 325—67 (tabela 1), la 405 rot/min, prin metoda Locati, folosind drept curbă de calcul Wöhler cea determinată pe epruvete din oțel 41CN12 laminat (fig. 1) [8], [11].

S-a cercetat rezistența la oboseală M_{i-1} fără și cu prestrîngerea îmbinării filetate.

1.5.1. *Rezistența la oboseală a racordurilor speciale neprestrînse* (înșurubate cu mîna) este dată în tabela 6.

Tabela 6

Nr. crt.	Oțelul din care a fost executat racordul	M_{i-1} [kgfm]			σ_{-1} [kgf/mm²]
		Proba 1	Proba 2	Valoarea medie	
1.	41CN12 laminat	1 815	2 530	2 172	10,45
2.	41CN12 forjat	1 710	2 520	2 115	10,20
3.	33MoCll laminat	1 800	1 875	1 837	8,85
4.	36MoCN10 laminat proba 2 neconcludentă)	1 900	1 440	1 900	9,15

Toate ruperile s-au produs în cep, amorsarea ruperii de la prima uneori de la a doua spiră dinspre umăr a cepului.

Rezistența la oboseală σ_{-1} s-a calculat din relația

$$\sigma_{-1} = \frac{f \cdot M_{i-1}}{W_{cep}}, \tag{1}$$

în care

f este cota parte din momentul încovoietor transmis cepului, cealaltă parte fiind preluată de umeri; conform [21] $f = 0{,}52$,

W_{cep} — modulul de rezistență axial al cepului (pentru 4 1/2"L — 108 cm³).

În lucrarea [6] pentru cepul special neprestrîns executat din oțel aliat tratat la 285 ... 320 HB este dată $\sigma_{-1} = 9{,}13$ kgf/mm², ce se încadrează în valorile obținute (tabela 6).

Încercările la oboseală efectuate pe epruvete crestate, cu dimensiunea și profilul crestăturii identic cu cel al primei spire dinspre umărul cepului, [17], au condus la valoarea $\sigma_{-1} = 10{,}3$ kgf/mm² (oțel AISI 4140 îmbunătățit). Se pot deci folosi, pentru orientare și încercări la oboseală pe epruvete de tipul celei menționate mai sus, [17].

1.5.2. *Influența strîngerii prealabile asupra rezistenței la oboseală a racordurilor speciale.* S-au făcut încercări speciale în scopul determinării influenței forței de prestrîngere asupra rezistenței la oboseală a îmbinării filetate și stabilirea momentului optim de înșurubare.

Efortul unitar de prestrîngere σ_{0t}, efort mediu al ciclului, s-a calculat din relația :

$$\sigma_{0t} = \frac{P_0}{S} = \frac{M_{ts}}{\left[\frac{d_m}{2}\operatorname{tg}(\alpha_m + \varphi) + \frac{1}{3}\,\mu\, d_r\right] \cdot S}, \qquad (2)$$

în care

P_0 — forța de prestrîngere,
M_{ts} — momentul de înșurubare,
d_m — diametrul mediu al filetului,
α_m — unghiul mediu al elicei filetului,
φ — unghiul de frecare,

$d_r = \dfrac{d_1^3 - d^3_4}{d_1^2 - d_4^2}$ diametrul raportat al umerilor,

μ — coef. de frecare (0,08),
S — aria cepului în dreptul primei spire a racordului special (la 4 1/2"L este 52,5 cm²).

Efortul unitar variabil al ciclului, σ_v, s-a calculat cu relația (1), luîndu-se în considerație M_v — partea variabilă a momentului încovoietor.

Rezultatele obținute sînt date în tabela 7.

Tabela 7

Rezultatele încercărilor la oboseală a racordurilor speciale

Nr. crt.	Material	M_{ts} kgfm	σ_{0t} kgf/mm²	M_v kgfm	σ_v kgf/mm²	OBS
1.		neprestrîns	0	1 837	8,85	2 probe
2.	33MoCll	1 010	17,4	1 710	8,25	1 probă
3.		1 515	26,1	1 820	8,76	1 probă
4.		2 100	36,1	1 360	6,55	1 probă
5.	laminat	2 525	43,5	1 360	6,55	1 probă
6.	41CN12	neprestrîns	0	2 115	10,20	2 probe
7.	forjat	2 020	34,8	1 585	7,65	2 probe
8.	41CN12	neprestrîns	0	2 172	10,45	2 probe
9.	laminat	2 020	34,8	1 720	8,30	1 probă

Toate ruperile s-au produs numai din cep, ca şi la încercările precedente, cu amorsare la prima spiră a cepului.

Cu creşterea momentului de prestrîngere (M_{ts}) scade rezistenţa la oboseală la solicitarea exterioară alternant simetrică, σ_v. Rezultatele obţinute concordă cu cele publicate de alţi autori.

Astfel în [18] s-a determinat pentru îmbinarea 4 1/2''L din oţel AISI 4140 prestrînsă cu $M_{ts} = 2765$ kgfm ($\sigma_{0t} = 47{,}7$ kgf/mm^2) valoarea $M_v = 1180$ kgfm, care conduce, pe baza celor expuse, la o valoare a rezistenţei la oboseală de $\sigma_v = 5{,}7$ kgf/mm^2.

În [10] s-a determinat pentru îmbinarea 5 1/2''L ($W_{cep} = 173$ cm^3; $f = 0{,}504$) din oţel 40XHMA prestrîns σ_{0t} cu $= 41{,}5$ kgf/mm^2 valoarea $M_v = 1875$ kgfm, ceea ce corespunde la $\sigma_v = 5{,}45$ kgf/mm^2.

În lucrarea [1] se cercetează durabilitatea racordurilor speciale pe modele, obţinîndu-se rezistenţe la oboseală cu circa 25 % mai mari ca pe racorduri de dimensiuni normale. Se stabilesc coeficienţii de corelaţie ce permit extrapolarea rezistenţelor la oboseală la racordurile reale.

Din cercetările efectuate (tabela 7) rezultă că rezistenţa la oboseală a racordurilor speciale depinde relativ puţin de calitatea materialului. Pe baza datelor obţinute şi a celor publicate în literatura de specialitate se poate construi diagrama rezistenţelor la oboseală Heigh pentru eforturi unitare normale în cepul racordului special, luînd în considerare următoarele date :

— valorile σ_{-1} determinate pentru racordul special neprestrîns (tabela 6);

— efortul unitar de prestrîngere σ_{0t} reprezintă efortul mediu al ciclului de solicitare în cep, σ_m, iar efortul unitar încovoietor în cep reprezintă amplitudinea efortului, σ_v.

Rezultă diagrama din figura 7.

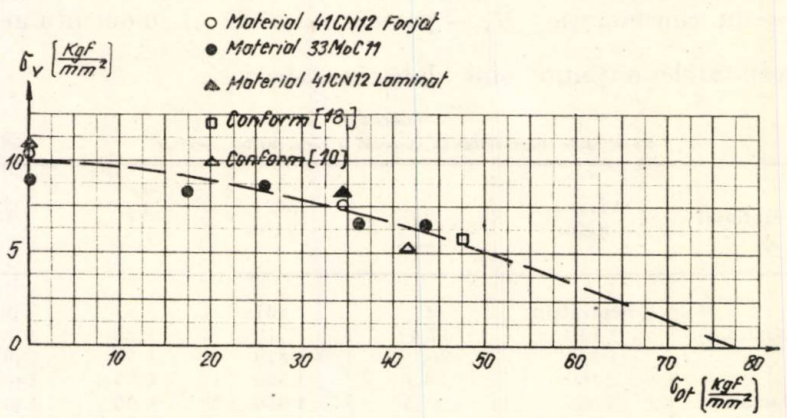


Fig. 7. — Variaţia rezistenţei la oboseală σ_v în funcţie de valoarea efortului unitar de pretensionare σ_m.

Admițînd valoarea medie $\sigma_{-1} = 9{,}7$ kgf mm^2 (tabela 6), $\sigma_c = 65$ kgf/mm^2 (tabela 5), rezultă în final diagrama Heigh pentru eforturi normale în cepul racordului special de dimensiuni reale prezentată în figura 8.

Dacă definim coeficientul de asimetrie al ciclului, [4]:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_m - \sigma_v}{\sigma_m + \sigma_v} \tag{3}$$

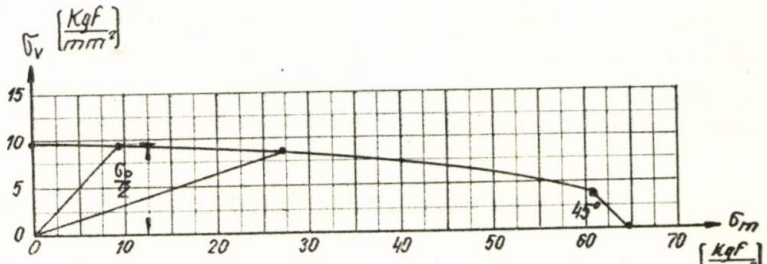


Fig. 8 Diagrama Heigh pentru eforturi normale dezvoltate în cepul racordului special

și admitem dependența liniară între σ_v și σ_m, rezultă că rezistența la oboseală corespunzătoare unui ciclu asimetric oarecare va fi dată de relația:

$$\sigma_R = \frac{2\sigma_c \cdot \sigma_{-1}}{\sigma_c \cdot (1 - R) + \sigma_{-1} \cdot (1 + R)}. \tag{4}$$

Calculînd pe această bază valorile lui σ_R pentru racordurile încercate din oțel 33MoC11, se obțin valorile date în tabela 8.

Tabela 8

M_{ts} kgfm	$\sigma_{0t} = \sigma_m$ kgf/mm^2	σ_v kgf/mm^2	σ_{max} kgf/mm^2	σ_{min} kgf/mm^2	R	σ_R kgf/mm^2
0	0	8,85	8,85	−8,85	−1	8,85
1 010	17,4	8,25	25,65	9,15	0,357	21,5
1 515	26,1	8,76	34,86	17,34	0,497	25,1
2 100	36,1	6,55	42,65	29,55	0,692	32,9
2 525	43,5	6,55	50,05	36,95	0,739	35,6

Cu creșterea momentului de înșurubare a racordului special, crește efortul mediu al ciclului σ_m, coeficientul de asimetrie și rezistența la oboseală a racordului, σ_R, și scade partea variabilă (alternant simetrică) a efortului unitar respectiv momentul încovoietor variabil admisibil ce-l poate suporta îmbinarea fără a se rupe.

2. CALCULUL COEFICIENTULUI DE SIGURANŢĂ LA OBOSEALĂ AL RACORDURILOR SPECIALE, PENTRU SOLICITĂRI COMPUSE

2.1. DIAGRAMELE REZISTENŢELOR LA OBOSEALĂ

În lucrarea [16] s-a admis, într-o primă aproximaţie, efortul unitar tangenţial τ, constant. În cadrul prezentei lucrări se prezintă o metodă de determinare a coeficientului de siguranţă la oboseală la solicitări compuse, considerînd efortul τ variabil.

Pentru studiul solicitării compuse de încovoiere cu torsiune se utilizează următoarele diagrame ale rezistenţelor la oboseală:

— diagrama Heigh (σ_m, σ_v) pentru eforturi normale (fig. 8);

— diagrama Heigh (τ_m, τ_v) pentru eforturi tangenţiale;

— elipsa ciclurilor limită de solicitări variabile compuse, [4], [12].

2.2. CRITERII DE SIMILITUDINE

Cunoscînd ciclul real din piesă, definit prin eforturile σ_m, σ_v respectiv τ_m, τ_v, se va analiza modul în care va evalua solicitarea în piesă pînă la atingerea stării limită:

— pentru eforturile unitare axiale, oricare ar fi valoarea momentului încovoietor deci σ_{-1}, valoarea efortului rezultant mediu al ciclului, σ_m, este constantă pentru un anumit racord special deoarece efortul de prestrîngere e constant, iar greutatea coloanei de prăjini de sub racord este aceeaşi. Deci trecerea de la ciclul real la ciclul limită se face cu păstrarea constantă a efortului unitar mediu σ_m;

— pentru eforturile unitare tangenţiale se admite $R = \text{const.}$ deoarece în cursul forajului $\frac{\tau_v}{\tau_m} \approx \text{const.}$;

— pentru solicitarea compusă se admite că evoluţia solicitării spre starea-limită are loc prin cicluri identice, respectiv pe o dreaptă ce trece prin origine.

2.3. CALCULUL COEFICIENTULUI DE SIGURANŢĂ LA SOLICITAREA COMPUSĂ

Pentru calculul coeficientului de siguranţă se foloseşte relaţia, [4], [16]:

$$C = \frac{C\sigma \cdot C\tau}{\sqrt{C_\sigma^2 + C_\tau^2}}, \tag{5}$$

valabilă şi pentru solicitări prin cicluri asimetrice.

Pentru a scrie expresiile coeficienţilor de siguranţă ai solicitărilor simple, se notează σ'_{-1}, τ'_{-1} razele elipsei la oboseală pentru cicluri asimetrice, denumite raze reduse.

Rezultă

$$C_\sigma = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_v}, \tag{6}$$

$$C_\tau = \frac{\tau'_{-1}}{\tau_v}. \tag{7}$$

Razele reduse ale elipsei sînt ordonatele punctelor ce reprezintă starea-limită în diagramele Heigh pentru eforturi normale și tangențiale. Acestea se determină poziționînd în diagramele Heigh punctul reprezentînd solicitarea reală și determinînd apoi starea-limită prin criteriile de similitudine stabilite. Pentru a poziționa solicitarea reală, se determină eforturile unitare echivalente solicitărilor compuse, denumite efortur unitare reduse, cu relațiile, [4], [17]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{mr} &= \sqrt{\sigma_m^2 + \left(\frac{\sigma_c}{\tau_c}\right)^2 \tau_m^2}, \\
\sigma_{vr} &= \sqrt{\sigma_v^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_v^2}, \\
\tau_{mr} &= \sqrt{\tau_m^2 + \left(\frac{\tau_c}{\sigma_c}\right)^2 \sigma_m^2}, \\
\tau_{vr} &= \sqrt{\tau_v^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}}\right)^2 \sigma_v^2},
\end{aligned} \tag{8}$$

Pentru determinarea grafică a coeficientului de siguranță la solicitări compuse se utilizează construcția grafică propusă în [17], figura 9. Perechile de valori σ_{mr}, σ_{vr} și τ_{mr}, τ_{vr} determină în diagramele Heigh punctele C_1, respectiv C'_1 reprezentînd ciclurile reale de solicitare. Folosind criteriile de trecere la starea-limită se determină punctele C_2, respectiv C'_2 cărora le corespund pe axele ordonatelor valorile razelor reduse σ'_{-1} respectiv τ'_{-1}.

Coeficientul de siguranță la solicitarea compusă rezultă grafic:

$$C = \frac{OL}{OM}; \tag{9}$$

Cunoscînd alura elipsei ciclurilor limită, rezultă că pentru determinarea razelor reduse ale elipsei și deci a coeficientului de siguranță este suficientă cunoașterea diagramei Heigh a rezistențelor la oboseală pentru eforturi normale, construită experimental la 1.5.2 (fig. 8). În consecință, în figura 10 se prezintă o nomogramă de determinare a razei reduse a

elipsei ciclurilor limită corespunzătoare eforturilor normale σ, folosind diagrama Heigh determinată experimental (fig. 8), pe baza următoarelor considerente :

— efortul mediu al ciclului de solicitare al filetului este

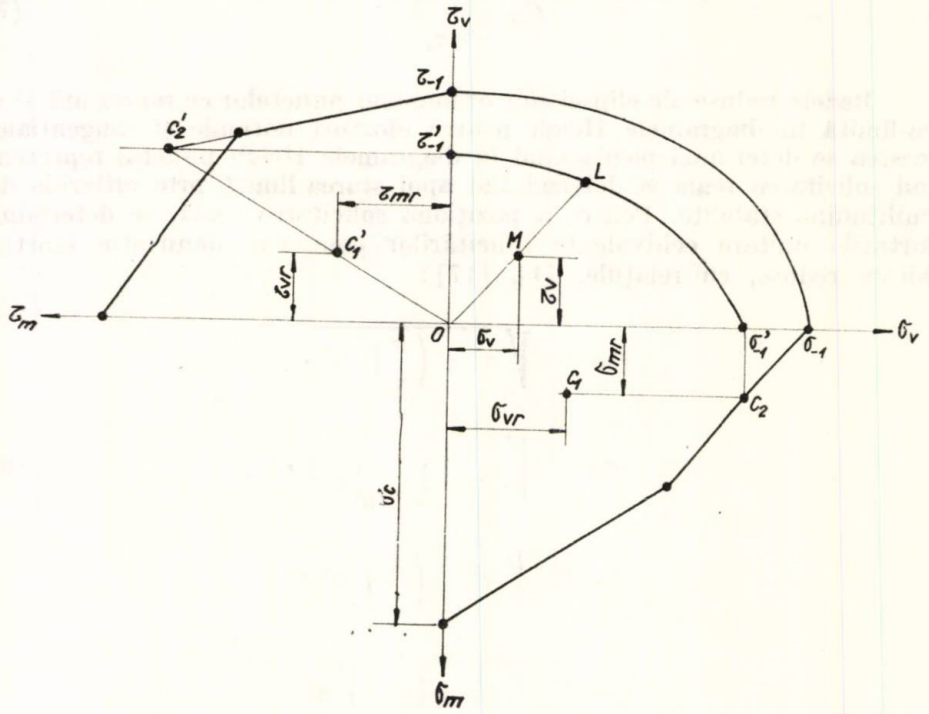


Fig. 9. — Determinarea grafică a coeficientului de siguranță la solicitarea compusă, încovoiere și torsiune

$$\sigma_m = \sigma_{0t} + k_0 \cdot \sigma_t,$$

σ_{0t} — efort unitar de prestrîngere ;

k_0 — coeficient de sarcină ($k_0 = 0{,}4$ la filet $4\ \frac{1''}{2}$ L, [21]) ;

σ_t — efort unitar din forța de tracțiune (greutatea coloanei de prăjini).

— criteriul de similitudine pentru eforturi normale este σ_m = = const.

Pentru determinarea razei reduse, din punctul corespunzător greutății în fluidul de foraj a coloanei de prăjini aflată sub racordul special, P_t (în diagrama de sus), se duce o orizontală intersectînd linia înclinată corespunzătoare tipului de racord special. Proiecția reprezintă valoarea $k_0 \cdot P_t$, respectiv $k_0 \cdot \sigma_t$. În diagramele de jos, din punctul corespunzător momentului de înșurubare se ridică o verticală și se determină efortul

unitar σ_{0t}. Intersectînd dreapta care unește punctele reprezentînd σ_{0t} și $k_0 \cdot \sigma_t$ cu axa σ_m din diagrama Heigh, reprezentată în centrul nomogramei, se obține valoarea efortului mediu al ciclului σ_m și, pe baza criteriului de similitudine, valoarea razei reduse σ_{-1} a elipsei ciclurilor limită. Valoarea razei reduse τ'_{-1} se introduce în figura 9 și se determină grafic coeficientul de siguranță.

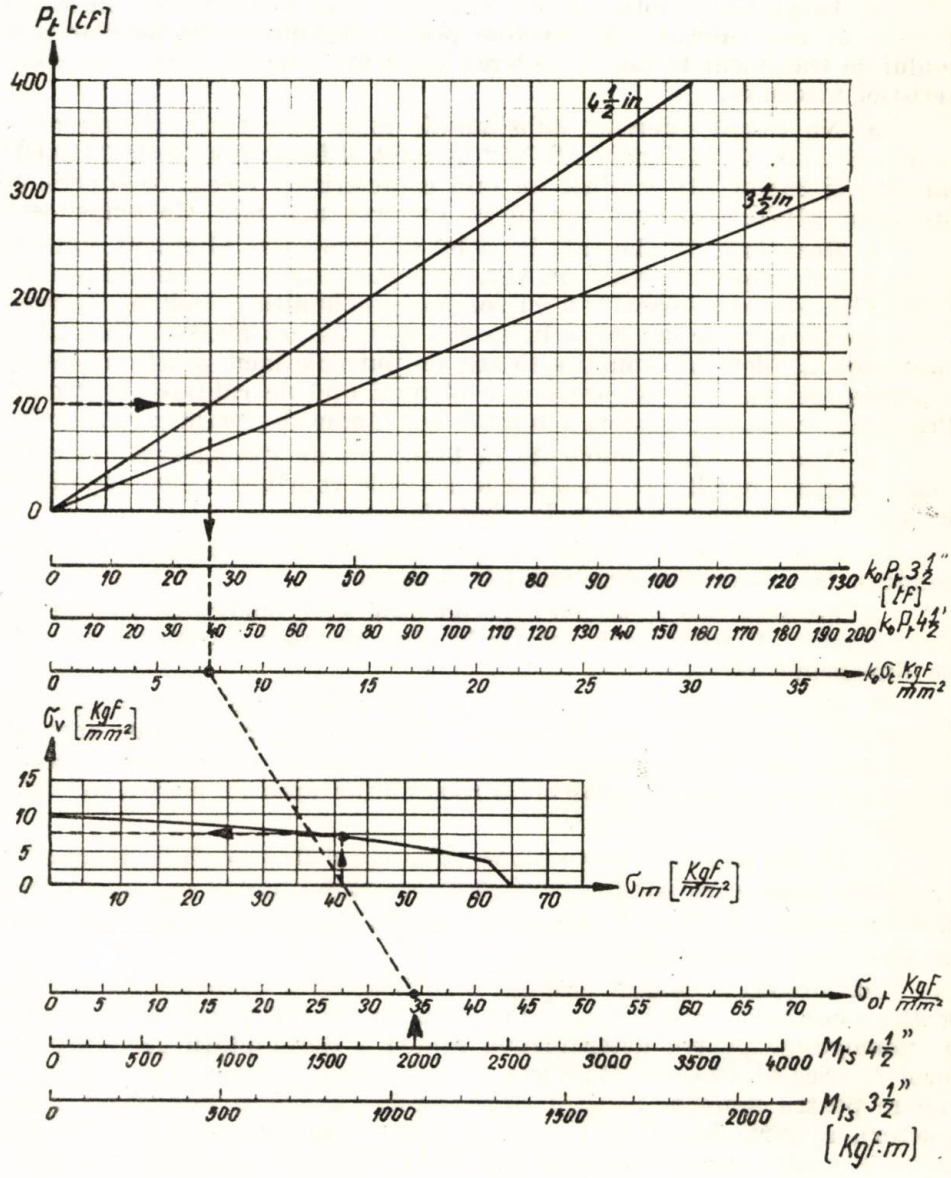


Fig. 10. — Nomogramă pentru determinarea razei reduse corespunzătoare eforturilor normale în elipsa ciclurilor limită.

3. CONCLUZII

Pe baza cercetărilor efectuate se pot trage următoarele concluzii :

1. Oțelurile folosite la fabricația racordurilor speciale cercetate se încadrează din punct de vedere al compoziției chimice și caracteristicilor mecanice în prevederile standardelor, au grăunte austenitic fin însă un punctaj relativ ridicat de incluziuni nemetalice.

2. Diagramele obținute de variație a caracteristicilor mecanice funcție de temperaturile de revenire permit stabilirea parametrilor regimului de tratament termic în vederea asigurării cuplului optim de caracteristici mecanice.

3. Nu există diferențe substanțiale între caracteristicile mecanice și de oboseală ale oțelurilor 41CN12 laminat și forjat ; oțelurile 33MoC11 laminat și 36MoCN10 laminat au însă caracteristici mecanice superioare oțelurilor 41CN12 laminat sau forjat (rezerve mai mari de tenacitate).

4. Rezistența la oboseală la ciclul de încovoiere alternant simetric a racordurilor speciale reale nu variază semnificativ cu tipul de semifabricat (laminat sau forjat) sau cu compoziția chimică a oțelului. Împrăștierea rezultatelor se datorește în special unor factori aleatori. Efectul de crestătură al filetului cepului este atît de puternic încît practic anulează superioritatea unui semifabricat sau al unui oțel de calitate superioară. Principala rezervă de creștere a durabilității rămîne deci ecruisarea filetului.

5. Față de datele publicate în literatura de specialitate, de altfel foarte puține, rezultă că racordurile speciale românești sînt superioare în ceea ce privește rezistența la oboseală.

6. Înșurubarea cu forța de prestrîngere a racordurilor speciale conduce la micșorarea durabilității acestora.

7. Rezultatele cercetărilor experimentale s-au concretizat în construcția diagramei Heigh a rezistențelor la oboseală ale racordurilor speciale de dimensiuni reale.

8. Pe baza metodei de calcul la oboseală a racordurilor speciale propuse de autori [16] și a diagramei Heigh pentru racordurile speciale menționate mai sus, s-a construit o nomogramă de determinare a coeficientului de siguranță la oboseală a racordurilor speciale pentru solicitări compuse.

9. Pe această bază se constată influența defavorabilă a strîngerilor prealabile mari, care conduc la creșterea efortului unitar σ_{ot}, micșorarea razei reduse a elipsei ciclurilor limită și deci la reducerea coeficientului de siguranță la oboseală.

10. Metoda de calcul propusă a coeficientului de siguranță la oboseală a racordurilor speciale, avînd un caracter general, permite construirea de nomograme pentru determinarea rapidă a durabilității garniturii de foraj de orice dimensiuni, stabilirea valorii optime a momentului de înșurubare pentru anumite condiții date (sarcina axială și momentul încovoietor), a durabilității maxime a garniturii etc., nomograme deosebit de utile pentru rezolvarea unor probleme legate de practica forajului.

Primită la redacție la 12 decembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. ALTMANN T. *Umlaufbiegeversuche an Modell-Gewindeverbindern für Schwerstangen*, Erdöl u. Kohle 13, 1960. 154/59; 241/47; 317/23.
2. BACHMAN W. S., *Fatigue Testing and Development of Drill Pipe to Tool Joint Connections.* World Oil 1—1951
3. BERNATH A., MEDELEANU V., *Contribuții la studiul influenței temperaturii de revenire asupra rezistenței la oboseală și a altor caracteristici mecanice ale oțelurilor de îmbunătățire.* Partea I, St. cerc. metalurg. **13**, *1*, 136, 144. (1968),
4. BUZDUGAN GH., *Calculul de rezistență la solicitări variabile*, București, Edit. tehnică, 1963.
5. CUIDA OLEG, *Fabricarea de material tubular petrolier destinat forajului adînc*, IDT București, 1967.
6. FARR, A. P., *Makeup Torque Control Cuts Cost of Improper Tonging*, Drilling vol. 18 oct. 1957, p. 87.
7. HAUK V., HILLEMANNS H., KOEHLER H., *Schwingende Längskraft und Drehmomentbeanspruchung von Bohrgestänger*, Erdöl und Kohle. Nr. 7—1965, p. 514.
8. HAJDUK JERZY, *Determinarea rapidă a parametrilor la oboseală*, Rezum. în Document. Selectivă Lab. de uzină nr. 4/1971, p. 273.
9. KARLIK S., *Studierea elementelor garniturii de foraj pe baza rezistenței la oboseală*, Trad. din Nafta nr. 3, 4—1956, în Expl. și prel. petrol. Caiet selectiv nr. 9—10, 1957.
10. KUDRIAVȚEV I. V., și colab., *Povișenie nesuscei sposobnosti krupnih rezibovih soedinenii P.P.D.*, Vestnik mașinostroeniia *1* (1972).
11. NĂDĂȘAN ST. ș.a., *Oboseala materialelor*, București Edit. teh., 1962.
12. PONOMARIOV S. D. și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini.*, Edit. tehnică, București vol. 2—1963; vol. 3—1964
13. * * * Reed General Catalog 1968—69 G. W. Murphy Industries.
14. RAȘEEV D., *Tehnologia construcției de mașini și de utilaj petrolier* E.D.P. București 1962.
15. RAȘEEV D., ANTONESCU N., COMEAGĂ M., *Călibilitatea oțelurilor* 40C10 și 40CN12 cu *aplicații la tratamentele termice ale racordurilor speciale de la prăjinile de foraj*, Metalurgia și construcția de mașini *12* 21—25 (954).
16. RAȘEEV D., ULMANU V., *Solicitările la oboseală ale îmbinărilor filetate ale racordurilor speciale și metodologia de cercetare a rezistenței acestora*, St. cerc. mec. apl. **30**, *5* 1229—1245 (1971).
17. ROHONYI M., *Calculul coeficientului de siguranță la oboseală*, Konstruction 14 *9*, 355 (1962).
18. TRISHMAN L. E., *Methods for the improvement of drill-collar joint evaluated by full-size fatigue tests*, Drilling Product. Pract. 1952, 7/20.
19. UGAROV ș.a., *Obzor rabot po ispitaniiu na vinoslivosti soedinenii burilnih trub s zamkami*, Maș. i neft. oborud. 9—1965.
20. UGAROV ș.a., *Experimentalinoe issledovanie vliianiia predvaritelinoi zatiajkii na vinoslivosti zamkovih soedinenii*, Maș. i neft. ob. 11—1967 p. 31—35.
21. ULMANU V., *Contribuții la studiul racordurilor speciale sudate pentru forajul de mare adîncime*, Teza de doctorat, Institutul de petrol și gaze Ploiești, 1973.

STUDIUL STABILITĂȚII SISTEMELOR HIDRAULICE DE COPIAT PRIN FOLOSIREA COEFICIENȚILOR DE AMPLIFICARE AL VITEZEI C_v ȘI AL FORȚEI C_f

de HO DINH TUNG
Institutul politehnic București

Lucrarea oferă exemple de calcule ale coeficienților de amplificare ai vitezei și ai forței sistemelor de copiat hidraulice, și aplicațiile lor în analiza stabilității și construcției sistemelor.

Așa după cum se arată în lucrarea [1] : „Se recomandă, de asemenea, alegerea factorului de amplificare al vitezei și forței convenabil, pentru micșorarea gabaritului și masa dispozitivului (factor mare de amplificare) și pentru mărirea stabilității (factor mic).”

E adevărat că studiul coeficienților de amplificare al vitezei C_v și al forței C_f aduce o contribuție importantă la studiul sistemelor hidraulice de copiat.

Se știe că la proiectare se pot alege potrivit C_v și C_v astfel încît sistemele să aibă o precizie și o stabilitate mare; la studiu, se pot folosi C_v și C_f pentru a determina precizia și stabilitatea sistemului; la exploatare se poate aprecia calitatea sistemului prin C_v și C_f.

De aceea, trebuie să se studieze caracteristicile de bază ale celor două tipuri de coeficienți, pentru a le putea aplica în practică.

I. CALCULUL COEFICIENȚILOR C_v ȘI C_f

Coeficientul de amplificare al vitezei C_v este viteza elementelor de execuție cînd sertărașul are o deplasare egală cu unitatea și o sarcină nulă

$$C_v = \frac{\partial \dot{X}_e}{\partial \delta}\bigg|_{F=0}.$$

Coeficientul de amplificare al forței C_f este forța produsă la elementul de execuție cînd sertărașul are o deplasare egală cu unitatea și viteza $\dot{X}_e = 0$

$$C_f = \frac{-\partial F}{\partial \delta}\bigg|_{\dot{x}_e = 0}.$$

De exemplu, un sistem avînd un traductor cu 4 muchii active este arătat în figura 1.

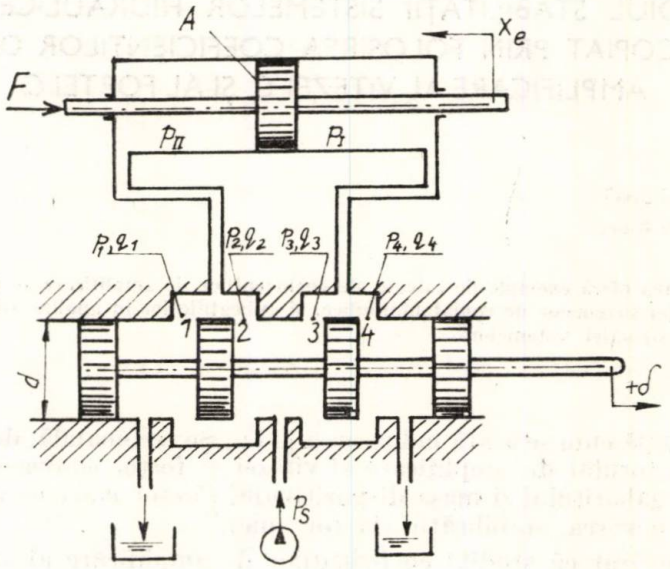


Fig. 1

1. DETERMINAREA COEFICIENTULUI C_v SE POATE FACE DUPĂ CUM URMEAZĂ:

Presupunem că $F \approx 0$, și sertărașul se deplasează cu δ foarte mic (în jurul poziției de echilibru), atunci

$$q_1 = C_d h(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_{II}},$$

$$q_2 = C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_s - p_{II}},$$

$$q_3 = C_d h(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_s - p_I},$$

$$q_4 = C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_I},$$

unde

$C_d = C\sqrt{\frac{2}{\rho}}$, C fiind coeficientul de debit,

h — aici este perimetrul setărașului, $h = \pi d$,

δ_0 — acoperirea inițială,

δ — deplasarea sertărașului.

De asemenea, se mai poate scrie:

$A\dot{X}_e = q_3 - q_4$, unde A este aria pistonului.

De aceea

$$\dot{X}_e = \frac{C_d \cdot h}{A}\left[(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_s - p_{\text{I}}} - (\delta_0 - \delta)\sqrt{p_{\text{I}}}\right] \cdot \tag{1}$$

Precum și

$$p_{\text{I}} - p_{\text{II}} = \Delta p,$$

$$p_3 + p_1 + \Delta p = p_s,$$

$$p_3 = p_1 = \frac{p_s - \Delta p}{2},$$

$$p_2 = p_s - p_1 = \frac{p_s + \Delta p}{2},$$

$$p_4 = p_s - p_3 = \frac{p_s + \Delta p}{2},$$

$\frac{F}{A} = \Delta p$, cînd $F = 0$, atunci $\Delta p = 0$ și $p_{\text{I}} = p_{\text{II}} = \frac{p_s}{2}$,

$$p_{\text{I}} = p_4,\ p_{\text{II}} = p_1.$$

Înlocuind în (1), se obține

$$\dot{X}_e = \frac{\sqrt{2p_s}\, C_d h}{A}\,\delta.$$

Derivînd, se obține

$$C_v = \frac{\delta \dot{X}_e}{\partial \delta}\bigg|_{F=0} = \sqrt{2p_s}\,\frac{C_d \cdot h}{A} \cdot \tag{2}$$

2. DETERMINAREA COEFICIENTULUI C_f:

Cînd $\dot{X}_e = 0$, atunci $q_1 = q_2$, $q_3 = q_4$,

adică $C_d h(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_{\text{II}}} = C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_s - p_{\text{II}}}$,

$$C_d h(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_s - p_{\text{I}}} = C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_{\text{I}}}.$$

De aceea

$$p_{\text{I}} = \frac{(\delta_0 + \delta)^2}{(\delta_0 - \delta)^2 + (\delta_0 + \delta)^2} p_s,$$

$$p_{\text{II}} = \frac{(\delta_0 - \delta)^2}{(\delta_0 - \delta)^2 + (\delta_0 + \delta)^2} p_s,$$

$$F = -A(p_{\text{I}} - p_{\text{II}}) = -Ap_s\left[\frac{(\delta_0 + \delta)^2 - (\delta_0 - \delta)^2}{(\delta_0 + \delta)^2 + (\delta_0 - \delta)^2}\right] = -2Ap_s\,\frac{\delta_0 \delta}{\delta_0^2 + \delta^2}.$$

Derivînd, cu $\delta \approx 0$, se obține

$$C_f = -\left.\frac{\delta F}{\partial \delta}\right|_{\dot{X}_e=0} = \frac{2Ap_s}{\delta_0}. \tag{3}$$

Mai înainte, s-a presupus că sertărașul se deplasează în jurul poziției de echilibru, pentru că în acest caz C_v are valoarea cea mai mare.

Pentru traductor cu acoperirea nulă. Cînd setărașul se deplasează, muchiile *1* și *3* se deschid, iar muchiile *2* și *4* se închid imediat, atunci

$$A\dot{X}_e = q_3 = q_1,$$

$$q_3 = C_d h \delta_3 \sqrt{p_3}, \qquad q_1 = C_d h \delta_1 \sqrt{p_1},$$

$$\delta_3 = \delta_1 = \delta.$$

Cînd $F = \Delta p = 0$, $p_1 = p_3 = \frac{p_s}{2}$.

De aceea $\dot{X}_e = \frac{C_d h}{A}\sqrt{\frac{p_s}{2}}\,\delta$.

Avem $C_{v0} = \frac{C_d h}{A}\sqrt{\frac{p_s}{2}}$, adică $C_{v0} = \frac{1}{2}C_v$.

Se poate vedea că atunci cînd $\delta_0 = 0$ (acoperirea nulă), C_{v0} se micșorează la jumătate, dar

$$C_f = \left.\frac{2Ap_s}{\delta_0}\right|_{\delta_0=0} = \infty,$$

adică C_f este foarte mare. Ceea ce înseamnă că atunci cînd există deplasarea sertărașului (în jurul poziției de simetrie), sensibilitatea este mică, dar forța care acționează pe piston (adică forța provocată de presiunea lichidului) este foarte mare.

II. FOLOSIREA COEFICIENȚILOR C_v ȘI C_f ÎN STUDIUL STABILITĂȚII SISTEMULUI

Într-un sistem de copiat hidraulic (fig. 2), cînd sertărașul se deplasează cu δ, pistonul se pune în mișcare cu viteza

$$v_1 = C_v \cdot \delta.$$

Ținînd cont de sarcina F, mișcarea pistonului se micșorează cu $v_2 = C_v \cdot \frac{F}{C_f}$. Ținînd cont de compresibilitatea lichidului C_N, mișcarea pistonului se micșorează cu $v_3 = \frac{\dot{F}}{C_N}$.

De aceea, pistonul se deplasează cu viteza

$$\dot{X}_e = v_1 - v_2 - v_3 = C_v\delta - C_v\frac{F}{C_f} - \frac{\dot{F}}{C_N} \tag{4}$$

$$\text{sau } \dot{X}_e = C_v\cdot\left(\delta - \frac{F}{C_f}\right) - \frac{\dot{F}}{C_N},$$

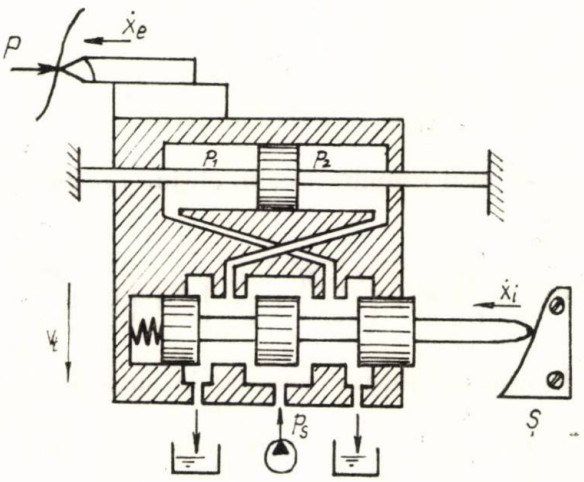


Fig. 2

unde
C_N reprezintă compresibilitatea lichidului,

$$F = M\ddot{X}_e + C\dot{X}_e + P,$$

P — forţa de aşchiere, presupun $P = 0$.
De aceea

$$\dot{X}_e = C_v\left[\delta - \frac{1}{C_f}(M\ddot{X}_e + C\dot{X}_e)\right] - \frac{1}{C_N}(M\dddot{X}_e + C\ddot{X}_e)$$

sau

$$C_v\delta = \frac{M}{C_N}\dddot{X}_e + \left(\frac{C_v\cdot M}{C_f} + \frac{C}{C_N}\right)\ddot{X}_e + \left(1 + \frac{C_v\cdot C}{C_f}\right)\dot{X}_e$$

sau

$$\frac{X_e(s)}{\delta(s)} = \frac{C_v}{\frac{M}{C_N}s^3 + \left(\frac{C_vM}{C_f} + \frac{C}{C_N}\right)s^2 + \left(1 + \frac{C_v\cdot C}{C_f}\right)s}. \tag{5}$$

Pentru că $\delta = X_i - X_e$, de aceea

$$\frac{X_e(s)}{\delta(s)} = \frac{X_e(s)}{X_i(s) - X_e(s)} = \frac{1}{\dfrac{X_i(s)}{X_e(s)} - 1}$$

sau

$$\frac{X_i(s)}{X_e(s)} = \frac{1}{\dfrac{X_e(s)}{\delta(s)}} + 1 = \frac{1 + \dfrac{X_e(s)}{\delta(s)}}{X_e(s)/\delta(s)}$$

sau

$$\frac{X_e(s)}{X_i(s)} = \frac{X_e(s)/\delta(s)}{1 + X_e(s)/\delta(s)}. \tag{6}$$

Înlocuind (5) în (6), prin simplificare, se obține *funcția de transfer*:

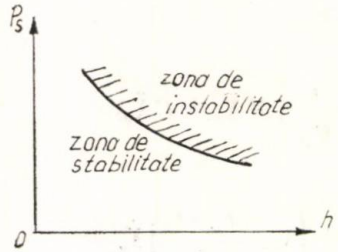
$$Y(s) = \frac{X_e(s)}{X_i(s)} = \frac{C_v}{\dfrac{M}{C_N}s^3 + \left(\dfrac{C_v \cdot M}{C_f} + \dfrac{C}{C_N}\right)s^2 + \left(1 + \dfrac{C_v \cdot C}{C_f}\right)s + C_v}. \tag{7}$$

Prin criteriul Routh, se obține condiția de stabilitate:

$$\left(\frac{C_v \cdot M}{C_f} + \frac{C}{C_N}\right)\left(1 + \frac{C_v \cdot C}{C_f}\right) > C_v \frac{M}{C_N}. \tag{8}$$

Din relația (8) se analizează influența parametrilor asupra stabilității sistemului.

1) *Influența lui* $h(h = \pi d)$. Din (2), $C_v = \sqrt{2p_s} \cdot (C_d h/A)$, cînd h crește C_v crește atunci (8) arată că stabilitate se micșorează (fig. 3). În practică, cînd h crește $\delta \cdot h$ crește, adică secțiunea de trecerea lichidului la traductor va crește, de aceea căderea presiunii traductorului scade. Acesta face căderea presiunii motorului să crească, adică forța care împinge la piston crește de aceea, stabilitatea sistemului scade.



Fig, 3

2) *Influența suprafeței pistonului* A. Din $C_v = \sqrt{2p_s} \cdot (C_d h/A)$, cînd $A \nearrow$, atunci $C_v \searrow$, adică stabilitate crește (fig. 4).

În practică, $\dot{X}_e = Q/A$, cînd A crește, atunci $\dot{X}_e$ scade, de aceea rezultă o stabilitate mai bună.

3) *Influența volumului* V *al cilindrului*. Se știe că compresibilitatea lichidului $C_N = 2NA^2/V$, cînd $V \nearrow$, atunci $C_N \searrow$. Din (8) rezultă că stabilitate scade (fig. 5).

4) *Influența forței de frecare ale elemenetelor de execuție.* $F_f = F$ (sign $\dot{X}_e$), cînd forța de frecare crește, zona de insensibilitate crește, stabilitate crește dar sensibilitate scade (fig. 6).

5) *Influența masei* M. Din relația (8) se poate vedea că atunci cînd M crește, stabilitate scade (fig. 7).

În practică, cînd există accelerație masa M primește energie, cînd există decelerație masa M cedează energie, de aceea stabilitate scade.

Fig, 4

III. EXEMPLUL DE FOLOSIRE A COEFICIENȚILOR C_v ȘI C_f PENTRU STUDIUL CONSTRUCȚIEI SISTEMELOR HIDRAULICE DE COPIAT

1) În figura 8*a* este prezentată metoda de control la ieșire :

$$p_1 = p_{\text{I}}, \qquad p_2 = p_s - p_{\text{I}},$$

$$p_4 = p_{\text{II}}, \qquad p_3 = p_s - p_{\text{II}}.$$

a) *Se calculează* C_v :

$$q_1 = C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_{\text{I}}},$$

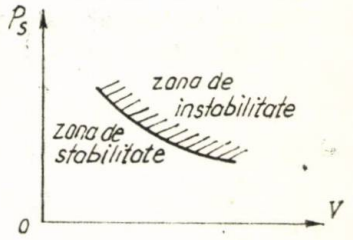
$$q_2 = C_d h \delta_0 \sqrt{p_s - p_{\text{I}}},$$

$$q_3 = C_d h \delta_0 \sqrt{p_s - p_{\text{II}}},$$

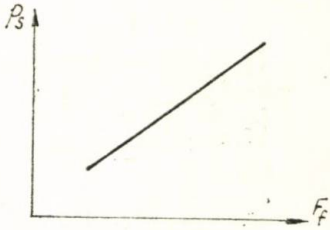
$$q_4 = C_d h(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_{\text{II}}},$$

$$A\dot{X}_e = q_2 - q_1 = q_3 - q_4 =$$

$$= C_d h \delta_0 \sqrt{p_s - p_{\text{I}}} - C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_{\text{I}}}.$$



Fig, 5



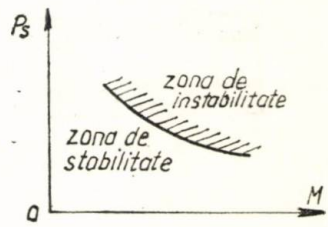
Fig, 6

Cînd sarcina este nulă, atunci $p_{\text{I}} = p_{\text{II}} = p_s/2$. Avem

$$A\dot{X}_e = C_d h \delta \sqrt{p_s/2},$$

de aceea

$$C_v = \frac{\delta \dot{X}_e}{\partial \delta}\bigg|_{\substack{F=0 \\ \delta \approx 0}} = \frac{C_d \cdot h}{A}\sqrt{\frac{p_s}{2}},$$



Fig, 7

adică egală cu o jumătate a lui C_v, în sistemul cu traductor cu 4 muchii active (relația (2)).

b) *Se calculează* C_f. Cînd $\dot{X}_e = 0$, atunci $q_2 = q_1$ $q_3 = q_4$, adică

$$C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_{\text{I}}} = C_d h \delta_0 \sqrt{p_s - p_{\text{I}}},$$

și

$$C_d h\delta_0 \sqrt{(p_s - p_{II}} = C_d h(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_{II}}.$$

De aceea

$$p_I = \frac{\delta_0^2}{\delta_0^2 + (\delta_0 - \delta)^2} p_s,$$

$$p_{II} = \frac{\delta_0^2}{\delta_0^2 + (\delta_0 + \delta)^2} p_s,$$

$$F = A(p_I - p_{II}),$$

$$C_f = \frac{\partial}{\partial \delta}\left[Ap_s\delta_0^2\left(\frac{1}{\delta_0^2 + (\delta_0 - \delta)^2} - \frac{1}{\delta_0^2 + (\delta_0 + \delta)^2}\right)\right] = \frac{Ap_s}{\delta_0}.$$

2) În figura 8 *b* este prezentată metoda de control la intrare.

a) *SE calculează* C_v :

$$q_1 = C_d h\delta_0 \sqrt{p_I},$$

$$q_2 = C_d h(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_s - p_I},$$

$$q_3 = C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_s - p_{II}},$$

$$q_4 = C_d h\delta_0 \sqrt{p_{II}}.$$

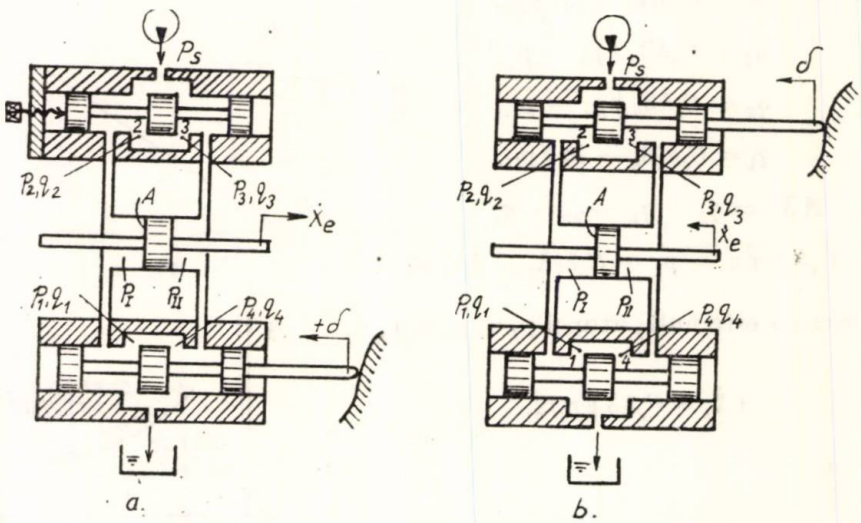


Fig. 8

Cînd sarcina este nulă, $A\dot{X}_e = q_2 - q_1 = C_d h\delta\sqrt{p_s/2}$.

De aceea

$$C_v = \frac{C_d \cdot h}{A}\sqrt{\frac{p_s}{2}}.$$

b) *Se calculează* C_f: Cînd $\dot{X}_e = 0$, atunci $q_2 = q_1\, q_3 = q_4$, adică

$$C_d h(\delta_0 + \delta)\sqrt{p_s - p_I} = C_d h \delta_0 \sqrt{p_I},$$

$$C_d h(\delta_0 - \delta)\sqrt{p_s - p_{II}} = C_d h \delta_0 \sqrt{p_{II}},$$

sau

$$p_I = \frac{(\delta_0 + \delta)^2}{\delta_0^2 + (\delta_0 + \delta)^2} p_s,$$

$$p_{II} = \frac{(\delta_0 - \delta)^2}{\delta_0^2 + (\delta_0 - \delta)^2} p_s,$$

$$F = A(p_I - p_{II}),$$

$$C_f = \frac{\partial}{\partial \delta}\left[A p_s \left(\frac{(\delta_0 + \delta)^2}{\delta_0^2 + (\delta_0 + \delta)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(\delta_0 - \delta)^2}{\delta_0^2 + (\delta_0 - \delta)^2}\right)\right] = \frac{A p_s}{\delta_0},$$

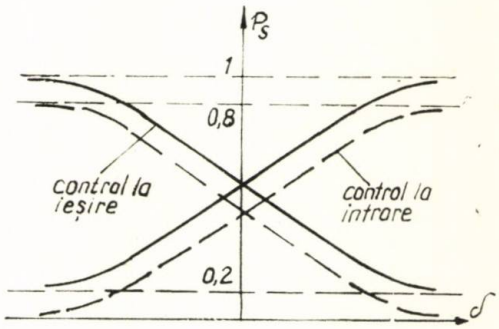


Fig. 9

adică la două metode diferite de control, C_v și C_f sînt identice. Dar fiecare metodă are cîte o caracteristică de lucru diferită. De exemplu, la fiecare metodă de control, presiune este la fel și egală cu 0,8 p_s. În ceea ce privește caracteristica de lucru, trebuie să asigurăm ca oricînd și în orice stare, presiunea de lucru să fie mai mare decît zero (adică mai mare decît atmosfera) pentru a prevedea evaporarea apei (condiția de a provoca spumă și instabilitate). De aceea, controlul la ieșire este mai avantajos decît cel la intrare (fig. 9).

Primită la redacție la 28 ianuarie 1974.

Îmi exprim recunoștința față de prof. dr. ing. Aurel Oprean pentru prețioasele indicații în definitivarea lucrării.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Oprean, *Hidraulica mașinilor unelte*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1968.
2. E. Lewis, *Sisteme hidraulice automate*, București, Edit. tehnică, 1968.
3. T. M. Bașta, *Transmisiile hidraulice de urmărire ale mașinilor* (trad. din limba rusă), București, Edit. tehnică 1961.
4. — *Hydraulic and pneumatic power and control Design, performance application*, Edited by Franklin D. Yeaple New York 1966.
5. M. Hachiro, *Special Machines for Working of Space Surface*, Machine tools on Japan to day, Tokyo, 1969.

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

M. GHEORGHIU, I. ANTON

STUDIUL ANALITIC AL INFLUENȚEI UNOR PARAMETRI GEOMETRICI ASUPRA CARACTERISTICILOR ENERGETICE ALE REȚELEI CIRCULARE DE PROFILE CLARK Y 8

În lucrare se studiază analitic problema mișcării în prezența rețelelor circulare de profile prin transformarea conformă a domeniului mișcării în planul unei rețele rectilinii echivalente. În acest plan se determină parametrii cinematici prin aplicarea metodei ecuațiilor integrale singulare.
Metoda numerică de calcul este programată în limbaj FORTRAN, iar rezultatele sînt calculate la mașina electronică de calcul tip IRIS-50.
Astfel s-a studiat analitic influența unghiului de instalare și a pasului unghiular asupra caracteristicilor rețelei circulare.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 4, 1974, p. 637—658
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I.SETEANU

STUDIUL REGIMULUI NEPERMANENT DE CURGERE ÎN SISTEMELE DE IRIGAȚII

Se indică un procedeu de studiu prin metoda diferențelor finite a ecuațiilor lui Saint-Venant pentru sisteme complexe de irigație. Se prezintă algoritmul de calcul cu dublu parcurs și programul elaborat în limbajul de programare PL/1.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 4, 1974, p. 659—678
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

V. PANAITESCU

METODĂ DE CONSTRUIRE A PROFILULUI GENERAL AL VITEZE MEDII A CURGERII TURBULENTE ÎN APROPIEREA UNUI PERETE RIGID

Se propune o metodă de construire a profilului general al vitezei medii a curgerii turbulente în apropierea unui perete rigid neted prin considerarea domeniului de tranziție de la mișcarea laminară din substratul laminar la mișcarea turbulentă din stratul deplin turbulent pe baza utilizării principiului superpoziției efectelor viscozității moleculare și viscozității turbulente.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 4, 1974, p. 679—694
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M. V. SOARE

CONTRIBUȚII LA CALCULUL PLĂCILOR ORTOTROPE, CU NERVURI DE RIGIDIZARE PE O SINGURĂ PARTE

Se indică modul general de deducere a ecuațiilor cu derivate parțiale ale plăcilor ortotrope, cu nervuri de rigidizare pe o singură parte, în metoda mixtă; necunoscutele sînt o funcție potențială F și săgeata w. Prin introducerea ipotezei simplificatoare că rigiditățile axiale D_x și D_y sînt infinite, ecuațiile de bază se reduc la o singură ecuație cu derivate parțiale de ordinul patru.
În continuare este dezvoltată soluția pentru cazul plăcilor de tip bandă și semibandă, cele două laturi opuse la distanță finită fiind simplu rezemate.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 4, 1974, p. 695—710
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

GH. ONU

CALCULUL RADIERELOR RIGIDE PE COLOANE

Se prezintă o metodă pentru calculul eforturilor în coloanele unei fundații cu radier rigid.
Se ia în considerație stratificația terenului de fundație, iar în cazul radierelor înalte, se ține seama și de înclinarea feței terenului natural. Este prezentat un program scris în FORTRAN, pentru calculul acestui tip de fundație.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 4, 1974, p. 711—752
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

D. RAȘEEV, V. ULMANU

CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA REZISTENȚEI LA OBOSEALĂ A RACORDURILOR SPECIALE

În prima parte a lucrării se cercetează complex caracteristicile structurale, mecanice, statice, dinamice și de oboseală ale oțelurilor și semifabricatelor folosite sau în perspectivă a fi folosite în fabricația racordurilor speciale.
Se prezintă rezultatele încercărilor la oboseală ale racordurilor speciale de dimensiuni reale, cercetînd și influența strîngerii prealabile asupra durabilității acestora.
Cercetările se concretizează în construirea diagramei Heigh a rezistențelor la oboseală pentru eforturi normale.
În a doua parte a lucrării se prezintă o metodă de determinare a coeficientului de siguranță la oboseală pentru solicitări compuse, finalizată în calcul nomografic.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 4, 1974, p. 753—769
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

HO DINH TUNG

STUDIUL STABILITĂȚII SISTEMELOR HIDRAULICE DE COPIAT PRIN FOLOSIREA COEFICIENȚILOR DE AMPLIFICARE AL VITEZEI C_v ȘI AL FORȚEI C_f

Lucrarea oferă exemple de calcule ale coeficienților de amplificare ai vitezei și ai forței sistemelor de copiat hidraulice, și aplicațiile lor în analiza stabilității și construcției sistemelor.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 4, 1974, p. 771—779
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

I. S. GHEORGHIU, ALEXANDRU S. FRANSUA, Tratat de mașini electrice, vol. IV, mașini sincrone, 1972, 482 p., 30 lei.

P. P. TEODORESCU, Dinamica corpurilor liniare elastice, 1972, 392 p., 24,50 lei.

M. MIȘICU, Teoria mobilității elastice, 1972, 428 p., 23,50 lei.

EDMOND NICOLAU, Cîmpuri și unde electromagnetice, 1972, 350 p., 21,50 lei.

C. A. VASILESCU, S. SAUR, V. PIMSNER, GH. RĂDULESCU, Corelațiile dintre combustibilul lichid și motorul cu ardere internă, 1972, 336 p., 23,50 lei.

CHRISTIAN PELECUDI, Teoria mecanismelor spațiale, 1972, 512 p., 30 lei.

I. A. ADĂMUȚ, Analiza propagării undelor electromagnetice pe linii în regim tranzitoriu, 1972, 374 p., 25 lei.

VLAD IONESCU, Sisteme liniare, 1973, 228 p., 10 lei.

V. I. NITU, Fiabilitatea instalațiilor energetice, 1973, 362 p., 28 lei.

BAZIL POPA, VIRGINIA ISCRULESCU, Procese de ardere în cîmp sonor, 1973, 245 p., 17 lei.

N. DĂNILĂ, Centrale nucleare-electrice, 1973, 775 p., 52 lei.

G. MOISIL, Controlul electric al coroziunii rețelelor subterane, 1973, 240 p., 9,75 lei.

NICOLAU EDMOND, Radiația electromagnetică, 1973, 231 p., 10,50 lei.

M. MIȘICU, Încovoiere și torsiune, 1973, 380 p., 22 lei.

ADRIANA NĂSTASE, Utilizarea calculatoarelor în optimizarea formelor aerodinamice, 1973, 282 p., 21,50 lei.

M. M. NIȚĂ, Teoria zborului spațial, 1973.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 4, P. 635–780, BUCUREȘTI, 1974

I. P. Informația c. 1329

43 832

Lei 40.—

F2557

5

TOMUL 33

1974

1975 FEB 25

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil,*
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct,*
Acad. I. ANTON,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. CR. MATEESCU,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România.
Acad. RADU VOINEA,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție.*

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea Rompresfilatelia, căsuța poștală 2001, București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei
Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
str. Gutenberg nr. 3 bis, sectorul 6, București

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 33 5/1974

SUMAR

STUDII

Pag

I. DUMITRESCU, Soluţia numerică a unei probleme cu condiţii la limită din teoria cîmpului 783

H. DUMITRESCU, Determinarea undei de combustie într-o curgere supersonică plană 795

I. DAVID, Formule de debit de tip Dupuit-Farcheimer exacte pentru cavităţi drenante de formă oarecare 807

E. BOTEZ, C. MITOŞERIU, Precizarea relaţiei pentru calculul debitului la curgerea uleiurilor prin fante mici în regim laminar 813

AL. MARINESCU, D. DUMITRESCU, Asupra unor soluţii exacte privind intrarea portantă optimă a vehiculelor spaţiale în atmosfera planetară 829

T. PANĂ, Vibraţiile laterale de încovoiere-răsucire ale grinzii pendul 839

N. N. ANTONESCU, Stabilirea eforturilor unitare din eclisele lanţurilor cu role şi zale scurte prin tensometrie 859

V. ULMANU, Determinarea analitică a deformaţiilor şi eforturilor în îmbinarea filetată conică, la înşurubarea cu forţă de prestrîngere 873

I. GHEGHEA, Contribuţii la studiul unui amortizor electrohidraulic de vibraţii pentru maşini-unelte 891

C. ISPAS, Contribuţii privind studiul unor interdependenţe ale fenomenelor dinamice la maşinile de rectificat exterior 897

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

I. DOBRE, Modele matematice care descriu mecanismele de bază ale ruperii rocilor prin foraj 909

RECENZII 927

SOLUȚIA NUMERICĂ A UNEI PROBLEME CU CONDIȚII LA LIMITĂ DIN TEORIA CÎMPULUI

de I. DUMITRESCU

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În articol este prezentat un procedeu numeric de rezolvare cu ajutorul sistemelor de calcul automat a unei probleme cu condiții la limită în care intervin ecuațiile cu derivate parțiale rot. rot $\overline{F} = \overline{G}$.

1. INTRODUCERE

După cum se știe, studiul diferitelor cîmpuri din fizică (ca, de exemplu, cîmpul de gravitație, cîmpul electromagnetic, cîmpul vitezelor de curgere a unui fluid etc.) se efectuează pe baza unor mărimi de stare a cîmpului, care sînt funcții scalare, vectoriale, tensoriale sau spinoriale de punct, ce descriu local starea cîmpului considerat.

Astfel, pentru descrierea naturii unui cîmp vectorial, a repartiției lui în spațiu, a evoluției în timp, a situației și efectului local al surselor de cîmp etc., se introduc mărimi referitoare la fluxul vectorilor de stare ai cîmpului și la densitatea de flux (divergența), mărimi referitoare la circulația vectorilor de stare ai cîmpului și — local — la rotorul lor, iar în cazul cîmpului scalar — mărimi referitoare la variația în spațiu a unor scalari de stare ai cîmpului și — local — la gradientul acestor scalari, precum și mărimi referitoare la variațiile în timp ale cîmpurilor nestaționare (descrise local prin derivatele substanțiale) și la discontinuitatea unor cîmpuri (apreciată local prin divergența de suprafață, rotorul de suprafață și gradientul de suprafață). În toate aceste cazuri, modelele matematice sînt formate din ecuații cu derivate parțiale de diferite tipuri, cu care, pentru studiul cîmpului, se alcătuiesc diverse probleme cu condiții la limită sau inițiale. Rezolvarea acestor probleme constituie, în marea majoritate a aplicațiilor concrete, partea cea mai dificilă (și esențială) a studiului cîmpurilor.

Metodele analitice, pentru rezolvarea unor astfel de probleme, nu sînt aplicabile decît numai în cîteva cazuri foarte simple și fără importanță practică concretă. În prezent, datorită utilizării sistemelor de calcul auto-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 5, 1974, P. 783—794.

mat, chiar şi cele mai dificile probleme cu condiţii la limită din teoria cîmpului pot fi rezolvate prin metode numerice.

În cadrul acestui articol prezentăm un procedeu numeric de rezolvare cu ajutorul sistemelor de calcul automat a unei interesante probleme cu condiţii la limită în care intervin ecuaţiile cu derivate parţiale

$$\text{rot. rot } \bar{F} = \bar{G},$$

care au cîteva aplicaţii tehnice importante în electromagnetism, în fizica nucleară şi în mecanica fluidelor.

Procedeul constă în :

— discretizarea ecuaţiilor cu derivate parţiale şi a condiţiilor la limită, care conduce în final la un sistem de ecuaţii algebrice liniare de mari dimensiuni ;

— rezolvarea prin metode numerice (prin aproximaţii succesive) a acestui sistem de ecuaţii algebrice, cu ajutorul unui sistem de calcul automat.

Acest procedeu este prezentat ca un model tipic ce poate fi utilizat şi în alte cazuri de probleme cu condiţii la limită. De aceea, autorul va fi mulţumit să răspundă oricăror solicitări din partea celor interesaţi să aplice procedeul descris aici, prin indicaţii de adaptare şi utilizare a programului prezentat în cadrul acestui articol.

2. FORMULAREA PROBLEMEI

Fie un domeniu $D \subset E^3$ şi $S = \text{Fr } D$; se cere să se determine funcţia vectorială de punct $\bar{F} : P \to \bar{F}(P)$, $P \in \bar{D}$, care să satisfacă ecuaţiile :

$$\text{rot. rot } \bar{F} = \bar{G} \text{ în } \bar{D}, \tag{1}$$

$$\bar{F} \times \bar{n} = 0 \text{ pe } S, \tag{2}$$

unde $\bar{D} = D \cup S$, $\bar{G}$ este o funcţie vectorială de punct dată ($\bar{G}$: $P \to \bar{G}(P)$, $P \in \bar{D}$) şi $\bar{n}$ este versorul normalei la suprafaţa frontierei S într-un punct $P \in S$.

Pentru asigurarea unicităţii soluţiei problemei de mai sus, completăm ecuaţiile (1) şi (2) cu următoarele condiţii pe frontieră suplimentare :

în punctele $P \in S$, pentru care elementele de suprafaţă ale frontierei S au $\bar{n}$ (P) $\| \bar{\mu}$, $\bar{\mu} \in \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, unde $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sînt versorii pe direcţiile Ox, Oy şi, respectiv, Oz ale unui sistem de coordonate ortogonal cartezian, se consideră $F_\nu = G_\nu$, unde F_ν şi G_ν reprezintă componentele vectorilor $\bar{F}$ şi, respectiv, $\bar{G}$ în punctul P considerat, adică $F_\nu \in \{X, Y, Z\}$ şi $G_\nu \in \{G_x, G_y, G_z\}$.

Dacă, aşa ca mai sus, notăm componentele vectorilor $\bar{F}$ şi $\bar{G}$ faţă de un sistem de coordonate ortogonal cartezian prin X, Y şi Z pentru $\bar{F}$ şi G_x ; G_y, G_z pentru $\bar{G}$, astfel că :

$$\bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

şi

$$\bar{G} = G_x\bar{i} + G_y\bar{j} + G_z\bar{k}$$

și dacă utilizăm scrierea rotorului sub forma unui determinant simbolic, atunci ecuația (1) poate fi exprimată precum urmează :

$$\text{rot. rot } \bar{F} = \text{rot.} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \mathrm{D}_x & \mathrm{D}_y & \mathrm{D}_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \mathrm{D}_x & \mathrm{D}_y & \mathrm{D}_z \\ \mathrm{D}_yZ-\mathrm{D}_zY & \mathrm{D}_zX-\mathrm{D}_xZ & \mathrm{D}_xY-\mathrm{D}_yX \end{vmatrix} = \bar{G},$$

De aici rezultă că pentru $\forall P \in \bar{D}$ ecuația rot. rot $\bar{F} = \bar{G}$ poate fi scrisă sub forma a trei ecuații și anume :

$$\begin{cases} -(\mathrm{D}^2_{y^2} + \mathrm{D}^2_{z^2})\, X + \mathrm{D}^2_{xy} Y + \mathrm{D}^2_{xz} Z = G_x, \\ \mathrm{D}^2_{xy} X - (\mathrm{D}^2_{x^2} + \mathrm{D}^2_{z^2}) Y + \mathrm{D}^2_{yz} Z = G_y \text{ în } \forall P \in \bar{D}, \\ \mathrm{D}^2_{xz} X + \mathrm{D}^2_{yz} Y - (\mathrm{D}^2_{x^2} + \mathrm{D}^2_{y^2})\, Z = G_z. \end{cases} \tag{3}$$

În ecuațiile (3) de mai sus, simbolurile $\mathrm{D}^2_{\mu^2}$ și $\mathrm{D}^2_{\mu\nu}$ (unde $\mu, \nu \in \in \{x, y, z\}$) reprezintă derivatele parțiale de ordinul doi în raport cu x, y, z sau cu o combinație a două dintre aceste trei variabile.

3. MODELUL DISCRET AL PROBLEMEI

Pentru rezolvarea numerică a problemei cu condiții la limită (1) și (2) utilizăm metoda rețelelor de discretizare, în care ecuațiile (1), scrise sub forma (3), sînt aproximate prin ecuații cu diferențe finite.

În acest scop, utilizăm o rețea de discretizare cubică, cu latura egală $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, definită prin mulțimea R de noduri M, distanțate egal pe cele trei drecții cu pasul h :

$$R = \{ M \,|\, M = (ih, jh, kh);\ i, j, k \in N;\ h > 0 \},$$

unde $N = 1, 2, \ldots, n$ este mulțimea numerelor naturale.

Aplicînd această rețea cubică de discretizare, R, domeniului D și considerînd numai acele noduri ale rețelei $M \in R \subset \bar{D}$, ce alcătuiesc mulțimea de noduri pe care o notăm cu $\bar{R}_D$, discretizarea ecuațiilor (3) se face înlocuind derivatele parțiale prin diferențe finite pentru fiecare nod $M \in \bar{R}_D$ [4]. Pentru optimizarea procesului de discretizare [2], aproximarea derivatelor parțiale prin diferențe finite se face — în fiecare nod $M \in \bar{R}_D$ — numai cu ajutorul valorilor funcției (asupra căreia se aplică derivatele) în nodurile imediat vecine nodului curent considerat. În cele ce vor urma vom considera, pentru discretizare, grupuri de șapte noduri vecine, ce formează mulțimea $R_7 \subset \bar{R}_D$:

$$R_7 = \{ M \,|\, M = [(i + q) + (j + q) + (k + q)]\, h;\quad i, j, k \in N; \\ q \in \{-1, 0, 1\};\quad h > 0 \},$$

în care nodul central (curent) este $(i, j, k)\ h$ — pentru $q = 0$, iar cele şase noduri vecine acestuia sînt : $[(i-1), j, k]\ h$, $[(i+1), j, k]\ h$, $[i, (j-1), k]\ h$, $[i, (j+1), k]\ h$, $[i, j, (k-1)]\ h$ şi $[i, j, (k+1)]\ h$.

Odată aleasă reţeaua R şi structura nodurilor vecine R_7, discretizarea ecuaţiilor (3) se face aproximînd derivatele parţiale $D^2_{x^2}$, $D^2_{y^2}$, $D^2_{z^2}$, D^2_{xy}, D^2_{yz} şi D^2_{xz} din aceste ecuaţii, prin operatorii cu diferenţe cunoscuţi din analiza numerică [1]. Astfel, dacă considerăm o funcţie de punct oarecare $u : P \to u(P)$, $P \in \bar{D}$, atunci derivatele ei parţiale într-un nod curent (i, j, k) se pot aproxima pe o reţea cubică de discretizare cu pas egal numai în funcţie de valorile din cele şase noduri imediat vecine $(i+q, j+q, k+q)$, $q \in \{-1, 0, 1\}$ prin ecuaţiile cu diferenţe de mai jos [3] :

$$D^2_{x^2}u(i,j,k) = \frac{1}{h^2}[u(i-1,j,k) - 2u(i,j,k) + u(i+1,j,k)] + O(h^4),$$

$$D^2_{y^2}u(i,j,k) = \frac{1}{h^2}[u(i,j-1,k) - 2u(i,j,k) + u(i,j+1,k)] + O(h^4),$$

$$D^2_{z^2}u(i,j,k) = \frac{1}{h^2}[u(i,j,k-1) - 2u(i,j,k) + u(i,j,k+1)] + O(h^4),$$

$$D^2_{xy}u(i,j,k) = \frac{1}{4h^2}[u(i-1,j-1,k) - u(i+1,j-1,k) - u(i-1,j+1,k) + u(i+1,j+1,k)] + O(h^4),$$

$$D^2_{xz}u(i,j,k) = \frac{1}{4h^2}[u(i-1,j,k-1) - u(i+1,j,k-1) - u(i-1,j,k+1) + u(i+1,j,k+1)] + O(h^4),$$

şi

$$D^2_{yz}u(i,j,k) = \frac{1}{4h^2}[u(i,j-1,k-1) - u(i,j+1,k-1) - u(i,j-1,k+1) + u(i,j+1,k+1)] + O(h^4), \quad (4)$$

unde termenul $O(h^4)$ exprimă ordinul erorii de aproximaţie, în funcţie de pasul h al reţelei de discretizare.

Înlocuind în ecuaţiile (3) derivatele parţiale prin diferenţele finite corespunzătoare din expresiile (4), şi ştiind că în acest caz $u \hat{=} X$, Y sau Z, obţinem pentru fiecare nod al reţelei de discretizare $M \in R \subset \bar{D}$ (adică $M \in \bar{R}_D$) următoarele ecuaţii de aproximare „pe 7 noduri" :

$$\begin{aligned} 16X(i,j,k) &- 4X(i,j-1,k) - 4X(i,j+1,k) - 4X(i,j,k-1) - \\ &- 4X(i,j,k+1) + Y(i-1,j-1,k) - Y(i+1,j-1,k) - \\ &- Y(i-1,j+1,k) + Y(i+1,j+1,k) + Z(i-1,j,k-1) - \\ &- Z(i+1,j,k-1) - Z(i-1,j,k+1) + Z(i+1,j,k+1) = \\ &= 4h^2 G_x, \end{aligned}$$

$$X(i-1,j-1,k) - X(i+1,j-1,k) - X(i-1,j+1,k) +$$
$$+ X(i+1,j+1,k) + 16Y(i,j,k) - 4Y(i-1,j,k) -$$
$$- 4Y(i+1,j,k) - 4Y(i,j,k-1) - 4Y(i,j,k+1) +$$
$$+ Z(i,j-1,k-1) - Z(i,j+1,k-1) - Z(i,j-1,k+1) +$$
$$+ Z(i,j+1,k+1) = 4h^2 G_y,$$

$$X(i-1,j,k-1) - X(i+1,j,k-1) - X(i-1,j,k+1) +$$
$$+ X(i+1,j,k+1) + Y(i,j-1,k-1) - Y(i,j+1,k-1) -$$
$$- Y(i,j-1,k+1) + Y(i,j+1,k+1) + 16Z(i,j,k) -$$
$$- 4Z(i-1,j,k) - 4Z(i+1,j,k) - 4Z(i,j-1,k) -$$
$$- 4Z(i,j+1,k) = 4h^2 G_z$$

$$\forall (i,j,k) \in \bar{R}_D,$$

în care termenul de aproximare $O(h^4)$ din (4) a fost neglijat.

În acest fel, ecuațiile (5) reprezintă o aproximare cu diferențe finite a ecuațiilor cu derivate parțiale (3), pe șapte noduri, cu ordinul de mărime al erorii $O(h^4)$.

Dacă mulțimea $\bar{R}_D = R \subset \bar{D}$ are n noduri $M = (i, j, k)$ de discretizare, atunci problema cu condiții la limită (1) și (2) se înlocuiește cu un sistem de cel mult $3n$ ecuații algebrice liniare de forma (5), ale cărei necunoscute sînt componentele $X(i, j, k)$, $Y(i, j, k)$ și $Z(i, j, k)$, ale funcției vectoriale necunoscute $\bar{F}(i, j, k)$, pentru toți $(i, j, k) \in \bar{R}_D$. Acest sistem de ecuații algebrice liniare astfel obținut reprezintă modelul discret al problemei cu condiții la limită (1) și (2).

În continuare, problema se reduce la rezolvarea sistemului de ecuații algebrice liniare (5), completat cu condițiile la limită corespunzătoare, ceea ce se realizează oarecum simplu, printr-o metodă din analiza numerică [8]. Deoarece numărul punctelor de discretizare $M \in \bar{R}_D$ este relativ mare (pentru a realiza o aproximare „bună" a derivatelor parțiale), sistemul (5) nu poate fi rezolvat decît cu ajutorul unor sisteme de calcul automat, cu o memorie operativă suficient de mare. Deoarece discretizarea s-a efectuat numai prin utilizarea nodurilor vecine (de exemplu R_7), matricea coeficienților sistemului de ecuații algebrice liniare este în formă de bandă. Pentru astfel de sisteme s-au conceput numeroși algoritmi de rezolvare numerică cu minimizarea memoriei necesare pentru calcul, toate bazîndu-se pe metoda eliminării a lui Gauss [3], cum ar fi procedeul așa-numit GELB din [10].

Prin rezolvarea sistemului (5) soluția problemei (1) și (2) se obține sub formă numerică, adică printr-un tabel cu valorile componentelor $X(i, j, k)$, $Y(i, j, k)$ și $Z(i, j, k)$ ale vectorului $\bar{F}(i, j, k)$ din punctele (i, j, k) ale rețelei de discretizare $\bar{R}_D$.

4. UN EXEMPLU

Pentru a înlesni aplicarea corectă a procedeului descris mai sus, vom prezenta un exemplu (mai simplu ca „anvergură" pentru a putea fi expus „in extenso") și anume:

— fie problema (1) și (2), completată cu condițiile suplimentare de la aliniatul doi al capitolului 2 de mai sus, pentru un domeniu D a cărui frontieră S este o suprafață în formă de cub (fig. 1);

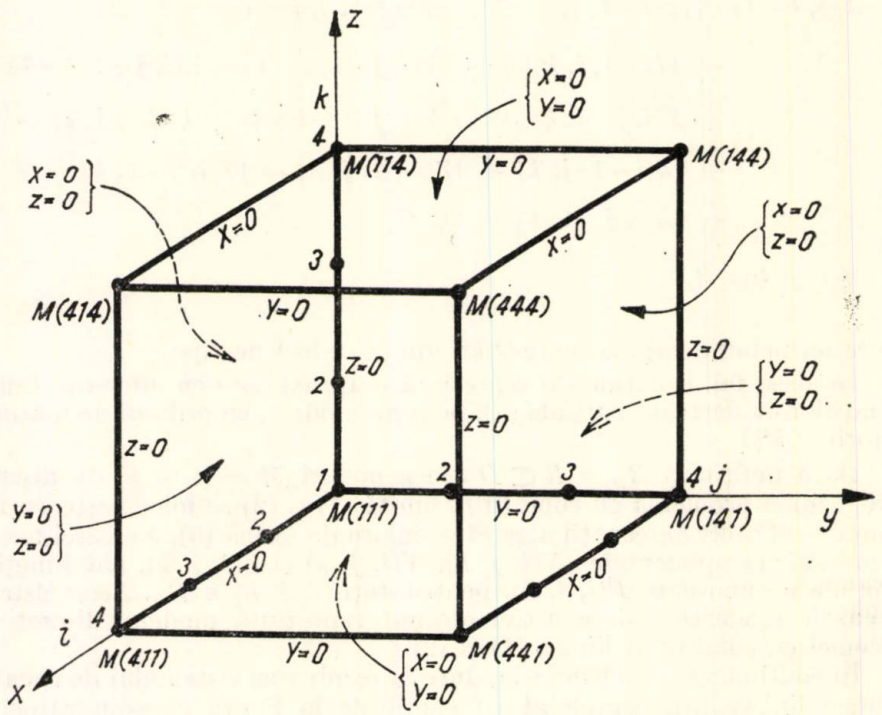


Fig. 1

— se dau $G_x = G_y = G_z = 1$ unități SI în $\forall P \in \bar{D}$ și se consideră că muchea cubului S are latura egală cu 3 unități SI.

Discretizarea problemei se realizează aplicînd o rețea cu pas egal (cubică) domeniului $\bar{D}$. Să considerăm, spre exemplu, că alegem o rețea cu pasul $h = 1$ unități SI. Rezultă că fiecare muchie a cubului va avea cîte patru noduri, notate pe fiecare axă a sistemului de coordonate cu *1*, *2*, *3* și *4* (fig. 1), iar mulțimea nodurilor $M \in \bar{R}_D$ (situate în D, adică în interiorul cubului, pe suprafața S a cubului și pe muchiile sale) are $n = 4 \times 4 \times 4 = 64$ noduri. Pentru simplificarea scrierii vom nota aceste noduri $M \in \bar{R}_D$ prin $M(ijk)$, $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ (fig. 1).

În continuare, discretizarea problemei (1) și (2) se realizează scriind condițiile la limită în nodurile $M \in S$ și ecuațiile de forma (5) în nodurile $M \in D$. Vom obține următorul sistem de $3 \times 64 = 192$ ecuații cu $3 \times 64 =$

$= 192$ necunoscute, adică cele 3 componente X, Y și Z ale vectorului $\overline{F}(M)$ din cele 64 noduri $M(ijk)$ ale rețelei de discretizare $\overline{R}_D$:

— din condițiile la limită în nodurile de pe fețele cubului rezultă $3 \times 24 = 72$ ecuații (v. fig. 1) :

$$\begin{cases} X = G_x = 1, \\ Y = 0, \\ Z = 0, \end{cases} \quad \text{(în cele 8 noduri de pe fețele } x = 1 = \text{const. și } x = 4 = \text{const.)} \tag{6—1}$$

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = G_y = 1, \\ Z = 0, \end{cases} \quad \text{(în cele 8 noduri de pe fețele } y = 1 \text{ și } y = 4) \tag{6—2}$$

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \\ Z = G_z = 1, \end{cases} \quad \text{(în cele 8 noduri de pe fețele } z = 1 \text{ și } z = 4) \tag{6—3}$$

— din condițiile la limită în nodurile de pe muchiile și în vîrfurile cubului rezultă $3 \times 32 = 96$ ecuații (v. fig. 1) :

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \\ Z = 0, \end{cases} \quad \text{(în 32 noduri de pe muchii și din vîrfuri)} \tag{6—4}$$

— prin aplicarea ecuațiilor (5), cu diferențe „pe șapte puncte" în cele 8 noduri din interiorul cubului, rezultă $3 \times 8 = 24$ ecuații, care, ținînd seama de condițiile la limită (6—1), ..., (6—4) și utilizînd notațiile mai simple $X(i, j, k) = Xijk$, $Y(i, j, k) = Yijk$ și $Z(i, j, k) = Zijk$, $i, j, k \in \{2, 3\}$, au forma :

— în nodul M(*222*) :

$$\begin{cases} 16X222 - 4X232 - 4X223 + Y332 + Z323 = 6, \\ X332 + 16Y222 - 4Y322 - 4Y223 + Z233 = 6, \\ X323 + Y233 + 16Z222 - 4Z322 - 4Z232 = 6, \end{cases} \tag{7—1}$$

— în nodul M(*322*) :

$$\begin{cases} 16X322 - 4X332 - 4X323 - Y232 - Z223 = 2, \\ -X232 + 16Y322 - 4Y222 - 4Y323 + Z333 = 4, \\ -X223 + Y333 + 16Z322 - 4Z222 - 4Z332 = 4, \end{cases} \tag{7—2}$$

— în nodul M(*232*) :

$$\begin{cases} 16X232 - 4X222 - 4X233 - Y322 + Z333 = 4, \\ -X322 + 16Y232 - 4Y332 - 4Y233 - Z223 = 2, \\ X333 - Y223 + 16Z232 - 4Z332 - 4Z222 = 4, \end{cases} \tag{7—3}$$

— în nodul M(*332*) :

$$\begin{cases} 16X332 - 4X322 - 4X333 + Y222 - Z233 = 4, \\ X222 + 16Y332 - 4Y232 - 4Y333 - Z323 = 4, \\ -X233 - Y323 + 16Z332 - 4Z232 - 4Z322 = 2, \end{cases} \tag{7—4}$$

— în nodul M(*223*) :

$$\begin{cases} 16X223 - 4X233 - 4X222 + Y333 - Z322 = 4, \\ X333 + 16Y223 - 4Y323 - 4Y222 - Z232 = 4, \\ -X322 - Y232 + 16Z223 - 4Z323 - 4Z233 = 2, \end{cases} \tag{7—5}$$

— în nodul M(*323*) :

$$\begin{cases} 16X323 - 4X333 - 4X322 - Y233 + Z222 = 4, \\ -X233 + 16Y323 - 4Y223 - 4Y322 - Z332 = 2, \\ X222 - Y332 + 16Z323 - 4Z223 - 4Z333 = 4, \end{cases} \tag{7—6}$$

— în nodul M(*233*) :

$$\begin{cases} 16X233 - 4X223 - 4X232 - Y323 - Z332 = 2, \\ -X323 + 16Y233 - 4Y333 - 4Y232 - Z222 = 4, \\ -X332 + Y222 + 16Z233 - 4Z333 - 4Z223 = 4, \end{cases} \tag{7—7}$$

— în nodul M(*333*) :

$$\begin{cases} 16X333 - 4X232 - 4X332 + Y223 + Z232 = 6, \\ X223 + 16Y333 - 4Y233 - 4Y332 + Z322 = 6, \\ X232 + Y322 + 16Z333 - 4Z233 - 4Z323 = 6. \end{cases} \tag{7—8}$$

Datorită condiţiilor la limită, problema se reduce numai la rezolvarea sistemului (7), de mai sus, obţinut prin discretizarea ecuaţiilor (3) în nodurile din D, aparţinînd reţelei $R_D = R \subset D$.

Sistemul (7), scris matriceal (cu notaţia $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}$) are aspectul redat în figura 2, din care rezultă forma de bandă a matricei coeficienţilor necunoscutei (matricea $\boldsymbol{A}$).

Pentru determinarea soluţiei numerice a problemei (1) şi (2) în cazul exemplului din figura 1, mai rămîne să se rezolve sistemul din figura 2. Pentru aceasta am utilizat procedura GELB din pachetul de programe ştiinţifice SSP al firmei IBM, descris în [10].

Rezolvarea s-a efectuat cu ajutorul unui sistem de calcul automat (IBM 360/40 F) pe baza programului sursă prezentat în lista cu care se încheie acest articol. Programul realizează următoarele etape de rezolvare a problemei din figura 1 :

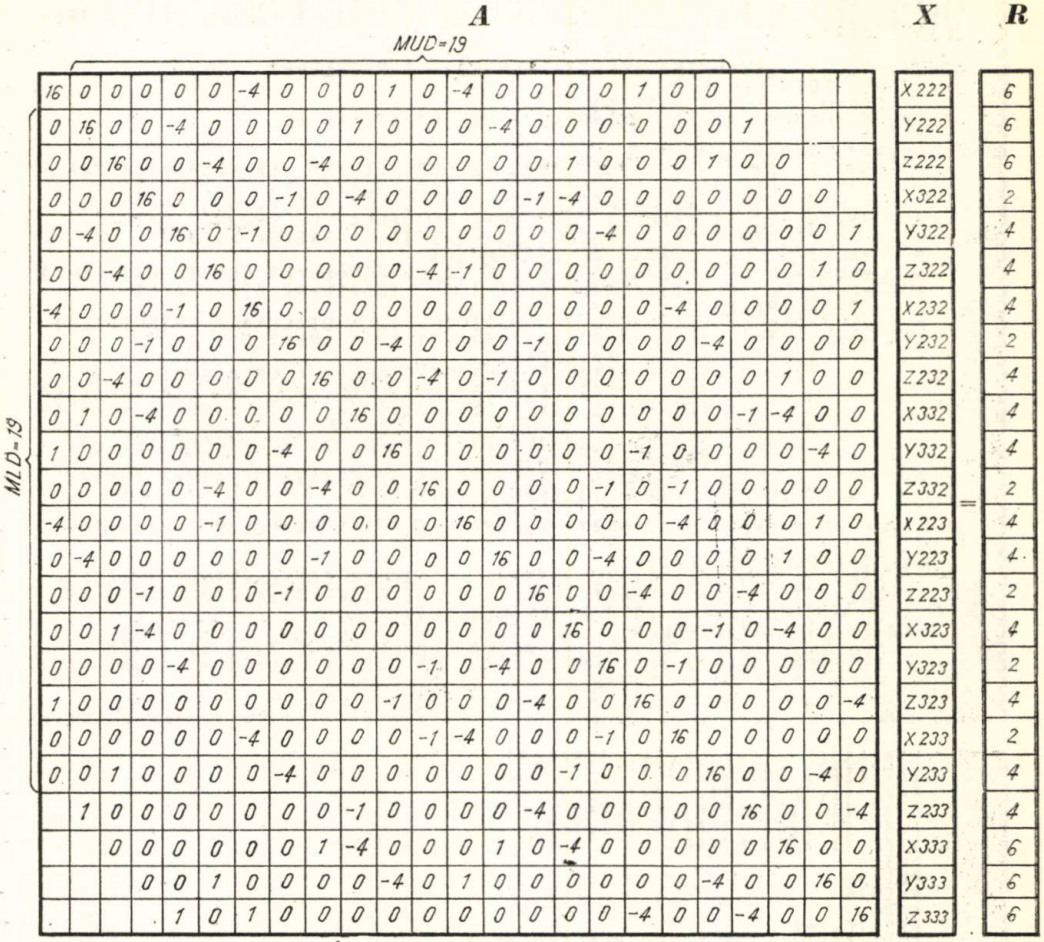


Fig. 2

— alocarea memoriei pentru tablourile cu date, adică: matricea coeficienților (***A***) din figura 2, matricea din membrul drept (***R***) al sistemului din figura 2, valorile pe frontieră (*IFR*) date prin ecuațiile (6) și *LITERA* — o variabilă alfanumerică pentru tipărirea (la scrierea soluției) a nodurilor $M(i, j, k)$, $i, j, k = 1, 2, 3, 4$, pentru care s-au calculat componentele X, Y, Z ale vectorilor $\bar{F}(M)$;

— citirea datelor ***A***, ***R***, *IFR* și *LITERA*;

— precizarea parametrilor sistemului din figura 2 (N, *MUD*, *MLD*, M și *EPS*, a căror semnificație este precizată prin comentariile de la începutul programului);

— apelul procedurii GELB, din SSP/IBM 360, prin care se rezolvă sistemul din figura 2 pe baza unui algoritm de eliminare succesivă a necunoscutelor după metoda lui Gauss;

— scrierea soluției problemei sub forma unui tabel, așa cum se vede la sfîrșitul programului de mai jos.

Primit la redacție la 3 iunie 1974

```
C   PROGRAM FORTRAN PENTRU REZOLVAREA UNEI PROBLEME LA LIMITA IN CARE IN-
C   TERVINE ECUATIA CU DERIVATE PARTIALE ROT.ROT F = G (UNDE G ESTE UN
C   CIMP DE VECTORI DAT, IAR F ESTE UN CIMP DE VECTORI NECUNOSCUT CE TRE-
C   BUIE DETERMINAT).
C
C   ACEST PROGRAM DETERMINA SOLUTIA NUMERICA A PROBLEMEI
C         ROT.ROT.F=G IN D
C         F*N=0       PE S=FR(D)
C   PENTRU CAZUL CONCRET AL EXEMPLULUI DIN CAPITOLUL 4.
C
C   DESCRIEREA PARAMETRILOR
C      R   -MATRICEA DIN MEMBRUL DREPT DE ORDINUL M*N (LA REVENIREA DIN
C           SUBRUTINA GELB, R CONTINE SOLUTIA SISTEMULUI DE ECUATII)
C           (MATRICEA R SE INTRODUCE IN MEMORIE CA TABLOU COLCANA)
C      A   -MATRICEA SISTEMULUI, IN FORMA DE BANDA, DE ORDINUL M*M
C           (MATRICEA A SE INTRODUCE IN MEMORIE CA TABLOU LINIE)
C      M   -NUMARUL DE ECUATII AL SISTEMULUI
C      N   -NUMARUL DE COLOANE DIN R (IN CAZUL PROBLEMEI CONSIDERATE N=1)
C      MUD -NUMARUL DE CODIAGONALE SUPERIOARE (DEASUPRA DIAGONALEI
C           PRINCIPALE)
C      MLD -NUMARUL DE CODIAGONALE INFERIOARE (SUB DIAGONALA PRINCIPALA)
C      IER -PARAMETRU PENTRU INDICAREA ERORII PRIN URMATORUL COD
C              IER=0  -NU EXISTA EROARE
C              IER=-1 -NU SE OBTIN REZULTATE DIN CAUZA UNOR GRESELI IN
C                      PARAMETRII DE INTRARE M, MUD, MLD SAU DIN CAUZA CA
C                      ELEMENTUL PIVOT ESTE ZERO IN TOATE ETAPELE DE ELI-
C                      MINARE
C              IER=K  -EXISTA POSIBILITATEA PIERDERII SEMNIFICATIEI LA
C                      ETAPA DE ELIMINARE K+1
C      EPS -CONSTANTA DE INTRARE UTILIZATA CA TOLERANTA RELATIVA PENTRU
C           VERIFICAREA PIERDERII SEMNIFICATIEI
C
C   IN CAZUL PROBLEMEI CONSIDERATE PARAMETRUL R (UN TABLOU COLCANA) RE-
C   PREZINTA
C      -LA INTRODUCEREA DATELOR
C         MEMBRUL DIN DREAPTA AL SISTEMULUI, ADICA COMPONENTELE VECTORU-
C         LUI G IN FIECARE PUNCT AL RETELEI DE DISCRETIZARE MULTIPLICAT
C         CU 4*H**2 UNDE H ESTE PASUL RETELEI,
C      -LA EXTRAGEREA DATELOR
C         NECUNOSCUTELE SISTEMULUI, ADICA COMPONENTELE X, Y SI Z (IN
C         ACEASTA ORDINE) ALE VECTORULUI F IN FIECARE PUNCT M(I,J,K) AL
C         RETELEI DE DISCRETIZARE.
C*************************************************************************
```

```
      DIMENSION A(566),R(24),IFR(188)
      INTEGER*2 LITERA(320)
      READ (1,100) (A(J),J=1,556)
      READ (1,110) (R(K),K=1,24)
      READ (1,120) (IFR(I),I=1,188)
      READ (1,130) LITERA
      N=1
      MUD=19
      MLD=19
      M=24
      EPS=10.E-6
      CALL GELB(R,A,M,N,MUD,MLD,EPS,IER)
      IF(IER.EQ.-1) GO TO 20
      IF(IER.EQ.0) GO TO 10
      WRITE (3,200) IER
   10 WRITE (3,210)
      DO 1 I=1,21
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-1)+1
      INS=INI+2
    1 WRITE (3,220) (LITERA(K),K=KI,KS),(IFR(L),L=INI,INS)
      DO 2 I=22,23
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-22)+1
      INS=INI+2
    2 WRITE (3,230) (LITERA(K),K=KI,KS),(R(L),L=INI,INS)
      DO 3 I=24,25
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-3)+1
      INS=INI+2
    3 WRITE (3,220) (LITERA(K),K=KI,KS),(IFR(L),L=INI,INS)
      DO 4 I=26,27
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-24)+1
      INS=INI+2
    4 WRITE (3,230) (LITERA(K),K=KI,KS),(R(L),L=INI,INS)
      DO 5 I=28,37
```

```
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-5)+1
      INS=INI+2
    5 WRITE (3,220) (LITERA(K),K=KI,KS),(IFR(L),L=INI,INS)
      DO 6 I=38,39
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-34)+1
      INS=INI+2
    6 WRITE (3,230) (LITERA(K),K=KI,KS),(R(L),L=INI,INS)
      DO 7 I=40,41
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-7)+1
      INS=INI+2
    7 WRITE (3,220) (LITERA(K),K=KI,KS),(IFR(L),L=INI,INS)
      DO 8 I=42,43
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-36)+1
      INS=INI+2
    8 WRITE (3,230) (LITERA(K),K=KI,KS),(R(L),L=INI,INS)
      DO 9 I=44,64
      KI=5*(I-1)+1
      KS=5*I
      INI=3*(I-9)+1
      INS=INI+2
    9 WRITE (3,220) (LITERA(K),K=KI,KS),(IFR(L),L=INI,INS)
      GO TO 30
   20 WRITE (3,240)
   30 STOP
  100 FORMAT (20F4.0)
  110 FORMAT (8F10.6)
  120 FORMAT (80I1)
  130 FORMAT (40A2)
  200 FORMAT (' ERCARE POSIBILA. PIERDEREA SEMNIFICATIEI LA ELIMINARE IN
     1ETAPA K=',I3,' IER=',I8)
  210 FORMAT (T43,'S O L U T I A      P R O B L E M E I' //T32,'ACCUL RE
     1TELEI          COMPONENTELE VECTORULUI F' //T66,'X
     2Y          Z' //)
  220 FORMAT (' ',33X,5A2,23X,I1,9X,I1,9X,I1)
  230 FORMAT (' ',33X,5A2,19X,F8.4,2X,F8.4,2X,F8.4)
  240 FORMAT (' ERORI IN PARAMETRII DE INTRARE (M,MUD,MLD) SAU IN TOATE
     1ETAPELE DE ELIMINARE PIVOTUL ESTE NUL.  JOB TERMINAT')
      END
```

continuare pag. 794

BIBLIOGRAFIE

1. L. Collatz, *The Numerical Treatement of Differential Equations*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, Verlag, 1966.
2. I. Dumitrescu, *Simularea cîmpurilor potențiale cu aplicații la exploatarea zăcămintelor de petrol* (rezumatul tezei de doctorat), București, Litografia I.P.G.G., 1970.
3. I. Dumitrescu, St. Dumitrescu, O. Paiu, *Aplicații inginerești ale calculatoarelor cu exemple din industria petrolieră și petrochimică*, București, Editura didactică și pedagogică, 1974.
4. E. G. Forsythe, R. W. Waszow, *Finite—difference Methods for Partial Differential Equations*, New York, London, John Wiley & Sons, 1960.
5. D. Greenspan, *Introductory Numerical Analysis of Elliptic Boundary Value Proglems*, New York, Harper and Row, 1965.
6. J. L. Lions, *Methodes d'approximation numerique des problemes aux limites de la physique mathematique*, Paris, Institut Blaise Pascal, 1967.
7. N. Racoveanu, *Calculatoare electronice și programare*, București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
8. A. Ralston, H. S. Wilf, *Mathematical Methods for Digital Computers*, New York, Jnoh Wiley & Sons, 1967.
9. N. Teodorescu, V. Olaru, *Ecuațiile fizicii matematicii*, vol. II, București, Editura didactică și pedagogică, 1965.
10. I B M — APPLICATION PROGRAM, *System 360 — Scientific Subroutine Package* (Programmer's Manual /program number 360 A — CM — 03X), New York, IBM. Corporation — Technical Publications Department, 1970 (GH20 — 0205 —4).

SOLUTIA PROBLEMEI			
NODUL RETELEI	COMPONENTELE VECTORULUI F		
	X	Y	Z
M(1,1,1)	0	0	0
M(2,1,1)	0	0	0
M(3,1,1)	0	0	0
M(4,1,1)	0	0	0
M(1,2,1)	0	0	0
M(2,2,1)	0	0	1
M(3,2,1)	0	0	1
M(4,2,1)	0	0	1
M(1,3,1)	0	0	0
M(2,3,1)	0	0	1
M(3,3,1)	0	0	1
M(4,3,1)	0	0	0
M(1,4,1)	0	0	0
M(2,4,1)	0	0	0
M(3,4,1)	0	0	0
M(4,4,1)	0	0	0
M(1,1,2)	0	0	0
M(2,1,2)	0	1	0
M(3,1,2)	0	1	0
M(4,1,2)	0	1	0
M(1,2,2)	1	0	0
M(2,2,2)	0.5593	0.5593	0.5593
M(3,2,2)	0.4237	0.4915	0.4915
M(4,2,2)	1	0	0
M(1,3,2)	1	0	0
M(2,3,2)	0.4915	0.4237	0.4915
M(3,3,2)	0.4915	0.4915	0.4237
M(4,3,2)	1	0	0
M(1,4,2)	1	0	0
M(2,4,2)	1	0	0
M(3,4,2)	1	0	0
M(4,4,2)	1	0	0
M(1,1,3)	0	1	0
M(2,1,3)	0	1	0
M(3,1,3)	0	1	0
M(4,1,3)	0	1	0
M(1,2,3)	1	0	0
M(2,2,3)	0.4915	0.4915	0.4237
M(3,2,3)	0.4915	0.4237	0.4915
M(4,2,3)	1	0	0
M(1,3,3)	1	0	0
M(2,3,3)	0.4237	0.4915	0.4915
M(3,3,3)	0.5593	0.5593	0.5593
M(4,3,3)	1	0	0
M(1,4,3)	1	0	0
M(2,4,3)	1	0	0
M(3,4,3)	1	0	0
M(4,4,3)	1	0	0
M(1,1,4)	0	0	0
M(2,1,4)	0	0	0
M(3,1,4)	0	0	0
M(4,1,4)	0	0	0
M(1,2,4)	0	0	0
M(2,2,4)	0	0	1
M(3,2,4)	0	0	1
M(4,2,4)	0	0	1
M(1,3,4)	0	0	0
M(2,3,4)	0	0	1
M(3,3,4)	0	0	1
M(4,3,4)	0	0	0
M(1,4,4)	0	0	0
M(2,4,4)	0	0	0
M(3,4,4)	0	0	0
M(4,4,4)	0	0	0

DETERMINAREA UNDEI DE COMBUSTIE ÎNTR-O CURGERE SUPERSONICĂ PLANĂ

de H. DUMITRESCU,
Institutul de mecanică a fluidelor şi construcţii aerospaţiale

În această lucrare se prezintă o metodă analitică pentru determinarea cîmpului de viteze şi presiuni în curgerile supersonice plane, în cadrul cărora se dezvoltă o undă de combustie stabilă şi anume : se studiază configuraţiile undă de şoc-undă de combustie şi expansiune-undă de combustie cu ajutorul unei metode de echivalenţă, pe care autorul a utilizat-o în czul curgerii supersonice conice [2].

1. CONSIDERAŢII INTRODUCTIVE

O flacără este definită în mod obişnuit ca o reacţie chimică în fază gazoasă exotermă, care poate să fie sau să nu fie luminoasă, şi care se caracterizează prin aceea că se propagă în mediul reactant cu o viteză subsonică. Flăcările se diferenţiază prin aerodinamica lor şi prin modul în care speciile care reacţionează sînt puse în contact. Astfel, rezolvarea unei probleme de combustie necesită considerarea simultană a ecuaţiilor de mişcare şi de cinetică chimică.

Lucrarea tratează o clasă particulară de flăcări : acelea în care speciile care reacţionează sînt preamestecate şi care se stabilizează în curgerea supersonică. Pentru combustia supersonică în curgeri de gaze preamestecate, Clarke [1] a propus un model fizic simplificat, prin care mecanismele de structură a procesului de combustie sînt considerate sub formă globală, ca o suprafaţă de discontinuitate în cîmpul curgerii, numită undă de combustie. Acest model, deşi reprezintă o aproximaţie destul de crudă, se dovedeşte util în abordarea unor probleme de curgeri, complicate chiar în condiţiile în care nu există combustie.

În această lucrare ne propunem să prezentăm pe baza modelului undei de combustie al lui Clarke, o metodă directă pentru tratarea curgerilor supersonice plane, în cîmpul cărora unda de combustie se formează în avalul unei unde de şoc sau al unei expansiuni.

Să considerăm, prin urmare, curgerea supersonică plană a unui amestec combustibil gazos deviată în punctul O printr-o pantă pozitivă θ_p,

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 5, 1974, P. 795–806

corespunzînd astfel unei compresiuni, (fig. 1*a*), sau printr-o pantă negativă $-\theta_p$, corespunzînd unei expansiuni (fig. 1*b*) în ipoteza că amestecul se aprinde brusc chiar în punctul O de deviere, utilizîndu-se de exemplu, un mic jet gazos avînd o temperatură statică foarte ridicată şi care acţionează ca o sursă continuă de aprindere.

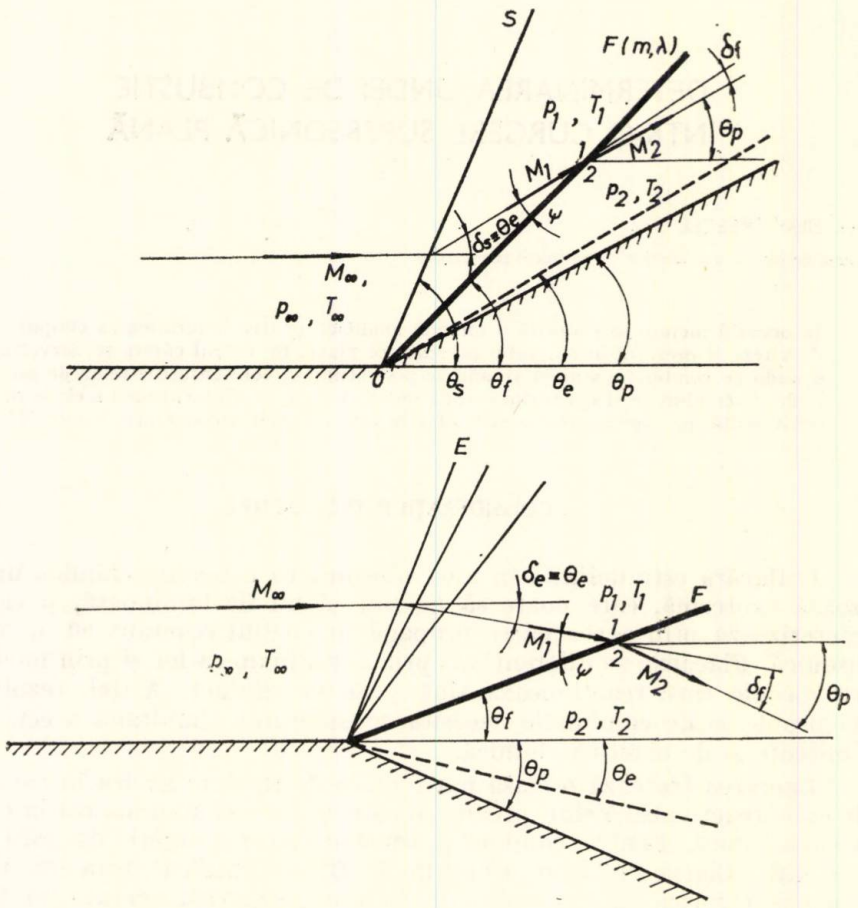


Fig. 1

Curentul reactant neperturbat, plan, este definit prin numărul Mach, M_∞. În avalul undei de şoc sau expansiunii se va dezvolta o undă de combustie, care modifică cîmpul cunoscut al curgerii reci. De asemenea, presupunem că unda de şoc sau sectorul de expansiune şi unda de combustie sînt ataşate în punctul O, şi că, după fiecare undă curgerea este supersonică, cu diferenţa că în amonte de unda de combustie amestecul gazos are aceeaşi combustie chimică cu a curentului neperturbat, pe cînd după unda de combustie amestecul este format din gaze arse. În aceste condiţii se poate admite că mişcarea atît înainte, cît şi după, unda de combustie rămîne plană.

2. SOLUȚII EXPLICITE PENTRU COMPRESIUNE ȘI EXPANSIUNE

Pentru curgerile supersonice plane, E. Carafoli [3], a stabilit, pe baza undelor de șoc oblice, o soluție închisă valabilă atît pentru compresiune, în spatele undei de șoc, cît și pentru expansiune. În esență este vorba de următoarea formulă pentru calculul presiunilor pe profile aerodinamice :

$$C_p = \frac{\gamma+1}{2}\frac{K^2}{M_\infty^2} + \frac{2K}{M_\infty^2}\left[1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 K^2\right]^{1/2}, \tag{1}$$

unde $C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{p_1}{p_\infty}-1\right)$ este coeficientul de presiune, γ — raportul căldurilor specifice, M_∞-numărul Mach al curentului neperturbat, iar K-reprezintă parametrul unitar de similaritate a cărui expresie este

$$K = \frac{M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\sin\theta_p, \tag{2}$$

θ_p fiind deviația curentului, pozitivă în cazul compresiunii, și negativă în cazul expansiunii. Această formulă este în bun acord cu rezultatele numerice exacte într-un larg interval de numere Mach și unghiuri de deflecție.

Acum, cu ajutorul coeficientului de presiune, se pot exprima explicit parametrii care definesc mișcarea gazului atît după unda de șoc oblică, cît și după expansiune.

a) Cazul compresiunii :

$$\frac{p_1}{p_\infty} = 1+\frac{\gamma}{2}M_\infty^2 C_p, \tag{3}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \frac{1+\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2 C_p}{1+\frac{\gamma-1}{4}M_\infty^2 C_p}, \tag{4}$$

$$\frac{T_1}{T_\infty} = \frac{a_1^2}{a_\infty^2} = \left(1+\frac{\gamma}{2}M_\infty^2 C_p\right)\frac{1+\frac{\gamma-1}{4}M_\infty^2 C_p}{1+\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2 C_p}, \tag{5}$$

$$\frac{M_1^2}{M_\infty^2} = \frac{1+\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2 C_p - C_p\left(1+\frac{\gamma}{4}M_\infty^2 C_p\right)}{\left(1+\frac{\gamma}{2}M_\infty^2 C_p\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{4}M_\infty^2 C_p\right)}, \tag{6}$$

$$\sin^2 \theta_s = \frac{1}{M_\infty^2}\left(1 + \frac{\gamma+1}{4} M_\infty^2 C_p\right),$$

$$M_1^2 \sin^2(\theta_s - \theta_p) = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{4} M_\infty^2 C_p}{1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 C_p}.$$

b) Cazul expansiunii:

$$\frac{p_1}{p_\infty} = 1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 C_p, \tag{9}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 C_p\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{10}$$

$$\frac{T_1}{T_\infty} = \frac{a_1^2}{a_\infty^2} = \left(1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 C_p\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \tag{11}$$

$$\frac{M_1^2}{M_\infty^2} = \left(1 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M_\infty^2}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 C_p\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M_\infty^2}. \tag{12}$$

Dacă θ_p este deviaţia curentului după expansiune, determinată de unghiul θ_p pe care îl face peretele cu direcţia curentului neperturbat, condiţia la limită pentru mişcarea din spatele Sectorului de expansiune poate fi scrisă sub forma:

$$\sin \theta_p \leqslant \frac{1}{M_\infty^2}\sqrt{\frac{2(M_\infty^2 - 1)}{\gamma(\gamma-1)}}. \tag{13}$$

Pentru derivaţii mai mari decît acelea rezultate din relaţia (13), formula (1) a coeficientului de presiune numai este aplicabilă, erorile devenind însemnate.

Pe baza acestor soluţii explicite pentru undele de şoc oblice şi pentru expansiune, se poate trece acum la rezolvarea analitică directă a problemelor complexe de dinamica gazelor, menţionate mai înainte.

3. CURGERI SUPERSONICE PLANE CU UNDE DE COMBUSTIE

În continuare vom presupune că înainte de a ajunge la suprafaţa solidă $\theta = \theta_p$ sau $\theta = -\theta_p$, curgerea întîlneşte un front de flacără plan, a cărui poziţie este definită de unghiul θ_f, astfel că $\theta_p > \theta_f > \theta_s$, respectiv $\theta_f > -\theta_p$.

Conform modelului undei de combustie, frontul de flacără este o regiune în cîmpul curgerii în care se produc modificări infinit rapide în compoziţia chimică a fluidului, astfel că, grosimea lui este în general foarte mică, şi se consideră numai schimbările finale ale stării fluidului datorită combustiei. În aceste condiţii, unda de combustie este o discontinuitate care depinde de doi parametri, de obicei numărul Mach de propagare, m, şi inversul raportului densităţilor (sau raportul componentelor normale ale vitezelor) λ. Pe baza ecuaţiilor de conservare a masei, impulsului şi energiei la trecerea prin unda de combustie şi urmărind figura 1*a*., se deduc în funcţie de m şi λ următoarele relaţii caracteristice /1/ :

$$\frac{p_2}{p_1} = \nu_f = 1 - \gamma m^2 (\lambda - 1), \tag{14}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\lambda}, \tag{15}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \lambda[1 - \gamma m^2(\lambda - 1)], \tag{16}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{m}{\sqrt{M_1^2 - m^2}}, \tag{17}$$

$$\operatorname{tg} \delta_f = \frac{(\lambda - 1) \operatorname{tg} \psi}{1 + \lambda \operatorname{tg}^2 \psi} \quad \text{sau} \quad \frac{\operatorname{tg} (\psi + \delta_f)}{\operatorname{tg} \psi} = \lambda, \tag{18}$$

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{1 + \dfrac{m^2}{M_1^2}(\lambda^2 - 1)}{\lambda[1 - \gamma m^2(\lambda - 1)]}, \tag{19}$$

în care p_1, ρ_1, T_1, a_1, M_1 şi p_2, ρ_2, T_2, a_2, M_2 sînt valorile variabilelor corespunzătoare celor două regimuri ale curgerii, rece (1) şi caldă (2), situate de o parte şi de cealaltă a undei de combustie, ψ este înclinarea vectorului viteză faţă de frontul de flacără, numit unghiul flăcării şi δ_f este unghiul de deflecţie al curgerii la trecerea prin unda de combustie. Mai departe, între m, λ şi energia Q, degajată prin combustie de unitatea de masă de amestec gazos, există relaţia

$$(\gamma + 1)(\lambda - 1) = \left(\frac{1}{m^2} - 1\right) - \left[\left(\frac{1}{m^2} - 1\right)^2 - 2(\gamma^2 - 1)\frac{Q}{m^2 a_1^2}\right]^{1/2}. \tag{20}$$

S-a presupus la fel ca în [1], [2] că raportul căldurilor specifice γ este acelaşi, $\gamma = 1{,}405$, atît pentru amestecul proaspăt, cît şi pentru cel ars, adică s-a considerat cazul amestecurilor sărace.

Determinarea diverselor proprietăţi ale undei de combustie numai constituie nici o problemă de îndată ce s-a găsit unghiul de poziţie θ_f al planului undei. Metoda pe care o utilizăm în acest scop, constă în introducerea unei deviaţii echivalente, θ_e ($\theta_e > \theta_f$), în ipoteza că după unda de combustie, adică pentru $\theta > \theta_f$, curgerea ar continua fără să fie influenţată de energia dirijată prin ardere. Să scriem ecuaţia de conservare a masei, odată între suprafeţele $\theta = \theta_{1f}$ şi $\theta = \theta_e$ şi apoi între $\theta = \theta_{2f}$ şi $\theta = \theta_p$

$$- \rho_1 V_1 \sin \psi + (\rho_1 V_1) \int_{\theta_e}^{\theta_f} \cos(\theta - \theta_e)\, d\theta = 0, \tag{21.a}$$

$$- \rho_2 V_2 \sin(\psi + \delta_f) + (\rho_2 V_2) \int_{\theta_p}^{\theta_f} \cos(\theta - \theta_p)\, d\theta = 0. \tag{21.b}$$

Pe de altă parte ecuaţiile de conservare a masei şi impulsului la traversarea undei de combustie dau

$$\rho_1 V_1 \sin \psi = \rho_2 V_2 \sin(\psi + \rho_f), \tag{22.a}$$

$$V_1 \cos \psi = V_2 \cos(\psi + \rho_f). \tag{22.b}$$

Comparînd relaţiile (21.a) şi (21.b) şi ţinînd seama de (22.a), (22.b) şi de faptul că densitatea în curgerea caldă este mult mai scăzută ($\rho_2 = \rho_1/\lambda$), rezultă că

$$\theta_e > \theta_p,$$

ceea ce arată că energia degajată prin ardere are un efect de deplasare similar cu o creştere a deviaţiei curentului de la θ_p la valoarea θ_e. Prin urmare, în cazul compresiunii ($\theta_p > 0$), intensitatea undei de şoc creşte în comparaţie cu cazul fără combustie, în timp ce pentru expansiune, caracterizată printr-un unghi de deviaţie negativ ($\theta_p < 0$), combustia are drept efect scăderea în valoare absolută a acestui unghi.

De asemenea, se remarcă faptul că în cazul curgerilor plane, unghiul de deflecţie al undei de combustie, δ_f, este identic cu unghiul de deplasare, θ_d,

$$\delta_f \equiv \theta_d = \theta_e - \theta_p. \tag{23}$$

În acest mod se obţine un sistem de ecuaţii format din ecuaţiile (1), (6), (17), (18) şi (23) pentru compresiune, şi din ecuaţiile (1), (12), (17), (18) şi (23) pentru expansiune. După cîteva calcule algebrice simple, fie-

care sistem de ecuaţii se reduce la cîte o ecuaţie transcendentă, avînd ca necunoscută unghiul θ_e,

$$\operatorname{tg}(\theta_e-\theta_p)-\frac{\left[\dfrac{1+\dfrac{\gamma+1}{4}M_\infty^2C_p-C_p\left(1+\dfrac{\gamma}{4}M_\infty^2C_p\right)}{\left(1+\dfrac{\gamma}{2}M_\infty^2C_p\right)\left(1+\dfrac{\gamma-1}{4}M_\infty^2C_p\right)}-\dfrac{m^2}{M_\infty^2}\right]^{1/2}}{\dfrac{1+\dfrac{\gamma+1}{4}M_\infty^2C_p-C_p\left(1+\dfrac{\gamma}{4}M_\infty^2C_p\right)}{\left(1+\dfrac{\gamma}{2}M_\infty^2C_p\right)\left(1+\dfrac{\gamma-1}{4}M_\infty^2C_p\right)}+(\lambda-1)\dfrac{m^2}{M_\infty^2}}\times$$

$$\times\frac{m}{M_\infty}(\lambda-1)=0, \tag{24.a}$$

$$C_p=\frac{\gamma+1}{2}\frac{M_\infty^2}{(M_\infty^2-1)}\sin^2\theta_e+$$

$$+\left[1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\frac{M_\infty^4}{M_\infty^2-1}\sin^2\theta_e\right]^{1/2}\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\sin\theta_e, \tag{24.b}$$

$$\operatorname{tg}(\theta_p-\theta_e)-$$

$$-(\lambda-1)\frac{m}{M_\infty}\frac{\left[\left(1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M_\infty^2}\right)\left(1+\dfrac{\gamma}{2}M_\infty^2C_p\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}-\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M_\infty^2}-\dfrac{m^2}{M_\infty^2}\right]^{1/2}}{\left(1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M_\infty^2}\right)\left(1+\dfrac{\gamma}{2}M_\infty^2C_p\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}-\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M_\infty^2}+(\lambda-1)\dfrac{m^2}{M_\infty^2}}=0, \tag{25.a}$$

$$C_p=\frac{\gamma+1}{2}\frac{M_\infty^2}{(M_\infty^2-1)}\sin^2\theta_e-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left[1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2\frac{M_\infty^4}{M_\infty^2-1}\sin^2\theta_e\right]^{1/2}\sin\theta_e. \tag{25.b}$$

În ecuaţia (25), corespunzătoare expansiunii, s-a ţinut seama de faptul că unghiurile de deviaţie θ_p şi θ_e sînt negative, valorile care apar în ecuaţie fiind valori absolute.

Un caz particular al expansiunii, $\theta_p<0$, îl reprezintă situaţia în care panta echivalentă este pozitivă, $\theta_e>0$, adică cazul în care combustia induce o undă de şoc în cîmpul unei curgeri accelerate.

Cazul limită al acestei situaţii se obţine atunci cînd efectul combustiei compensează unghiul de expansiune, în faţa undei de combustie curentul rămînînd neperturbat, adică

$$\theta_e=0. \tag{26}$$

În acest caz ecuația (25) se scrie :

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{m(\lambda-1)\sqrt{M_\infty^2-m^2}}{M_\infty^2+(\lambda-1)\,m^2}. \tag{27}$$

Relația (27) dă unghiul limită de deviație θ_0, pînă la care se poate obține expansiunea unui curent M_∞, pentru o undă de combustie dată (m, λ).

Cu valorile M_∞, m, λ și θ_p date, prin rezolvarea numerică a ecuațiilor (24) și (25), se găsește deviația echivalentă θ_e pentru compresiune și, respectiv, pentru expansiune. Cu valoarea găsită pentru θ_e, se calculează apoi coeficientul de presiune C_p, cu ajtorul căruia se determină variabilele curgerii p_1, ρ_1, T_1, a_1 și M_1 din amontele undei de combustie, utilizînd relațiile din §.2.

În continuare, se determină din relația (17) unghiul ψ făcut de vectorul viteză M_1 cu planul undei de combustie, unghiul de poziție al undei de combustie θ_f,

$$\theta_f = \psi + \theta_e, \tag{28}$$

și valorile p_2, ρ_2, T_2, a_2 și M_2 ale variabilelor curgerii din avalul undei de combustie.

Acum creșterea presiunii prin combustie pe suprafața solidă este dată de relația

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{p_1}{p_\infty}\cdot\frac{p_2}{p_1} = \left(1+\frac{\gamma}{2}M_\infty^2 C_p\right)[1-\gamma m^2(\lambda-1)]. \tag{29}$$

4. APLICAȚII ȘI CONCLUZII

În cele ce urmează, se aplică metoda descrisă mai sus pentru calculul presiunii într-o serie de cazuri. O parte din rezultatele acestor calcule sînt prezentate în figurile 2—8, care dau p_2/p_∞ în funcție de m pentru un număr Mach $M_\infty = 2$, pentru diferite valori fixe λ=1,5 ; 2,0 ; 2,5 ; 3,0 ; 3,5 ; și pentru deviațiile $\theta_p = 0°$, $5°$; $\pm 10°$; $\pm 15°$; $-20°$. De asemenea, sînt arătate liniile de unghi de deplasare θ_d constant pentru $\theta_d = 1°$, $2°$, $3°$, $4°$, $5°$, $6°$, $8°$, $10°$.

Curbele trasate în aceste diagrame prezintă aceleași caracteristici ca în cazul axial simetric [2] :

— raportul p_2/p_∞ scade de-a lungul liniilor $\theta_d = \text{const.}$ pe măsură ce numărul Mach de propagare m crește, concomitent cu depărtarea frontului flăcării de peretele deviator ;

— intersecția liniilor $\theta_d = \text{const.}$ cu axa $m = 0$, indică presiunea care s-ar obține pentru deviația echivalentă ;

— pentru un același raport λ, există o valoare m, adică un amestec combustibil cu compoziție optimă, cu care se obține o creștere de presiune maximă.

Metoda prezentată în această lucrare bazată pe soluția unitară pentru compresiune-expansiune dată de E. Carafoli [3], a permis evaluarea directă a efectelor termodinamice, generate de aportul de căldură, în curgerile plane considerate, cunoscînd condițiile aerodinamice (M_∞, p_∞)

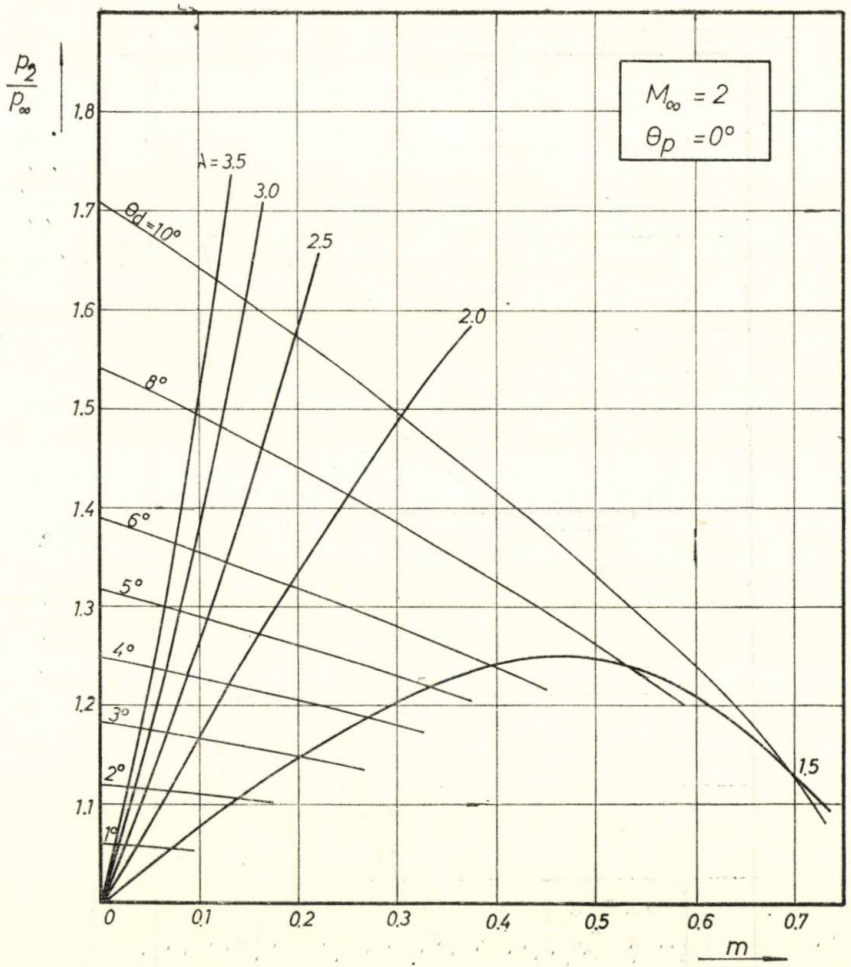

$\frac{p_2}{p_\infty}$
$M_\infty = 2$
$\theta_p = 0°$
λ = 3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
θd = 10°
8°
6°
5°
4°
3°
2°
1°
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
m

Fig. 2

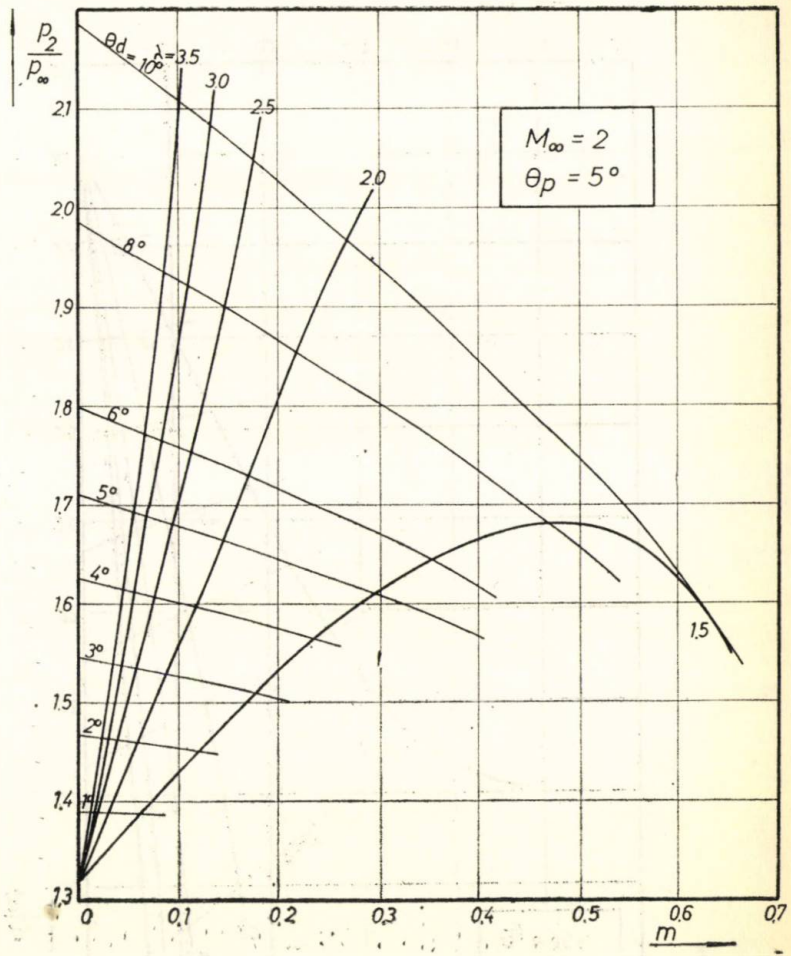

$\frac{p_2}{p_\infty}$
$M_\infty = 2$
$\theta_p = 5°$
θd = 10°
λ = 3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
8°
6°
5°
4°
3°
2°
1°
2.1
2.0
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
m

Fig. 3

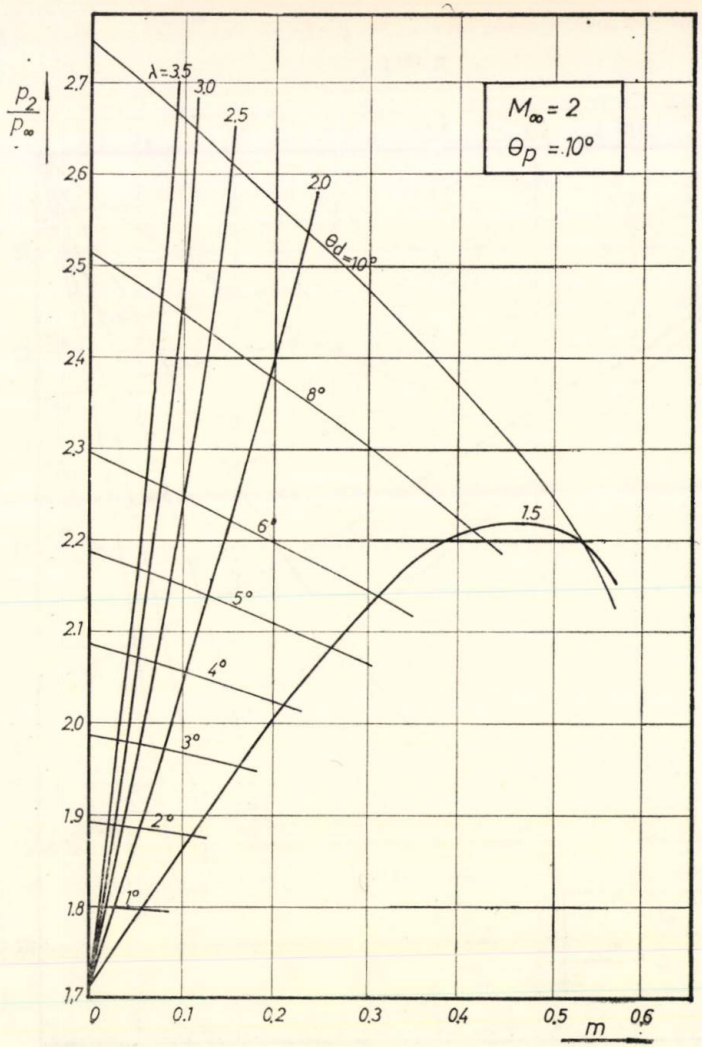

$\frac{p_2}{p_\infty}$
$M_\infty = 2$
$\theta_p = 10°$
λ=3,5
3,0
2,5
2,0
θ_d=10°
8°
6°
5°
4°
3°
2°
1°
1,5
2,7
2,6
2,5
2,4
2,3
2,2
2,1
2,0
1,9
1,8
1,7
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
m

Fig. 4

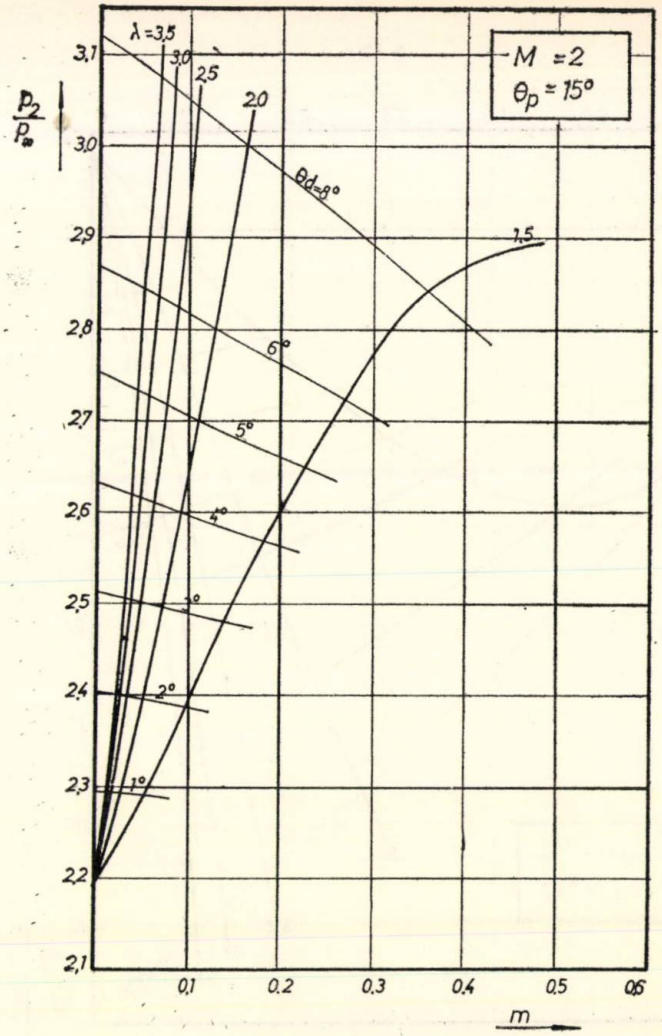

$\frac{p_2}{p_\infty}$
M = 2
θ_p = 15°
λ=3,5
3,0
2,5
2,0
θ_d=8°
6°
5°
4°
3°
2°
1°
1,5
3,1
3,0
2,9
2,8
2,7
2,6
2,5
2,4
2,3
2,2
2,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
m

Fig. 5

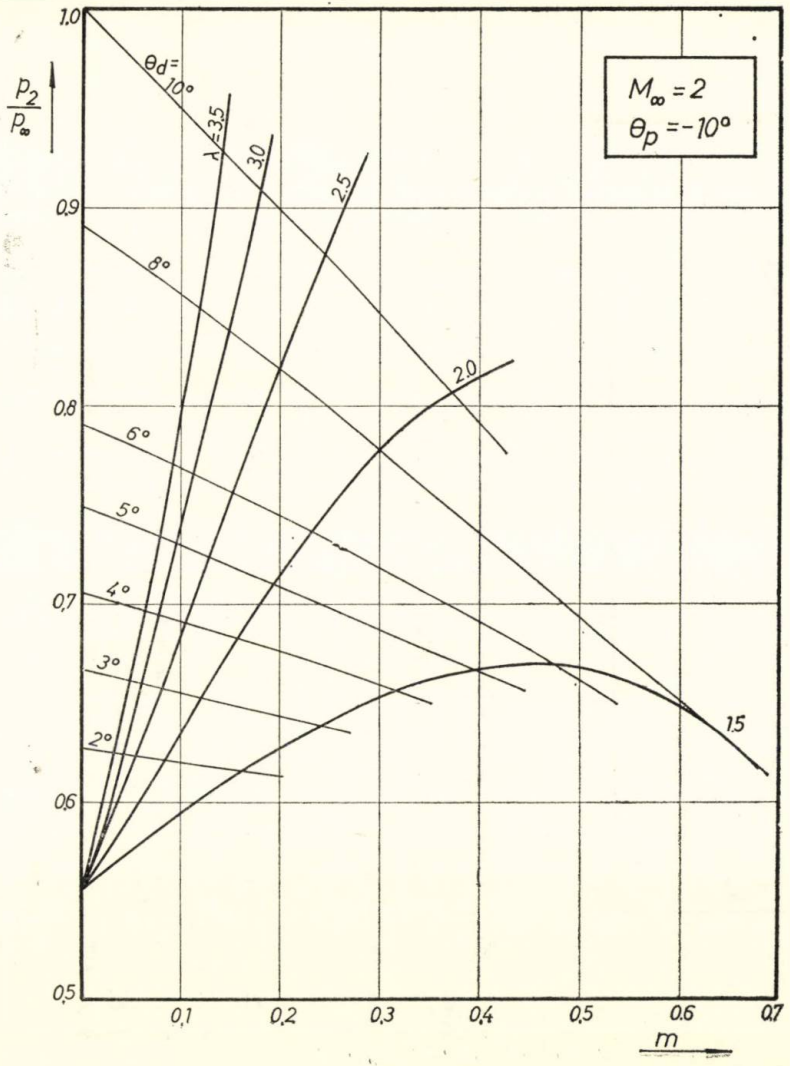
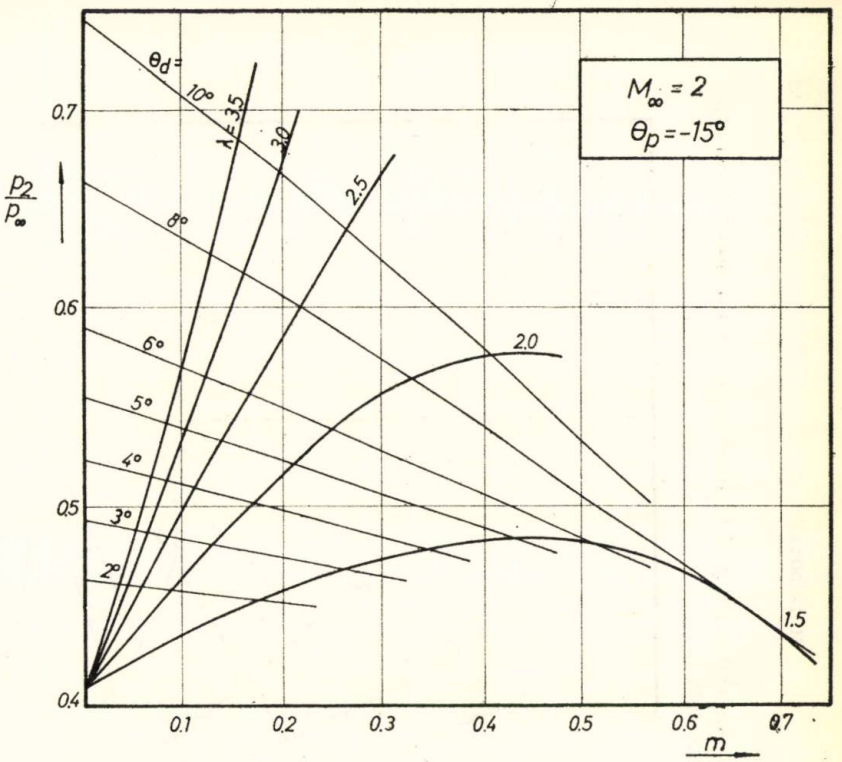

$M_\infty = 2$
$\theta_p = -10°$
$\frac{p_2}{p_\infty}$
$\theta_d =$
10°
λ=3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
8°
6°
5°
4°
3°
2°
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
m

Fig. 6


$M_\infty = 2$
$\theta_p = -15°$
$\frac{p_2}{p_\infty}$
$\theta_d =$
10°
λ=3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
8°
6°
5°
4°
3°
2°
0.7
0.6
0.5
0.4
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
m

Fig, 7

și fizico-chimice (λ, m) ale curentului din amonte, ca și caracteristica geometrică (θ_p) a peretelui solid.

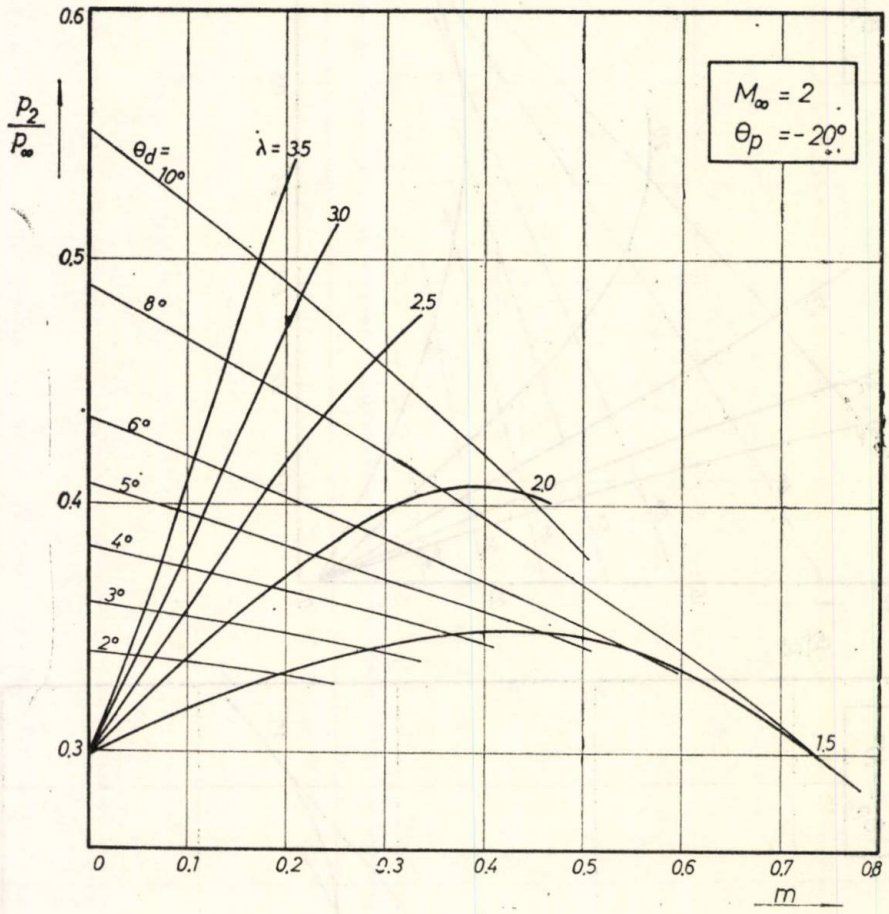


Fig. 8

Metoda propusă oferă în continuare posibilitatea determinării curgerilor cu flăcări total supersonice din jurul profilelor aerodinamice și evaluării modificărilor asupra coeficienților aerodinamici.

Primit la redacție la 1 iunie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Clarke J. F., *Some remarks on the Treatment of Fully Supersonic Flames as Gasodynamical Discontinuities*, The College of Aeronautics, Co. A. Report Aero, 179, 1965.
2. E. Carafoli, H. Dumitrescu, *Determinarea undei de combustie într-o curgere supersonică conică*, St. cercet. mec. apl., *2* (1972).
3. E. Carafoli, *On a unitary formula for compression-expansion in supersonic — hypersonic flow*, Rev. Méc. Appl., *7*, *5* (1962).
4. D. Mateescu, *O soluție explicită pentru undele de șoc oblice*, St. cercet. mec. apl., *3* (1972).
5. — *Two-dimensional supersonic Flow with Flame Sheets*, Rev. Méc. Appl., **17**, *3* (1972).

FORMULE DE DEBIT DE TIP DUPUIT-FORCHEIMER EXACTE PENTRU CAVITĂȚI DRENANTE DE FORMĂ OARECARE

de I. DAVID

Institutul politehnic Timişoara

În lucrare se prezintă o demonstraţie privind independenţa debitului captat de o captare singulară perfectă, de gradul de neuniformitate al scurgerii cu suprafaţă liberă şi de înălţimea de izvorîre ce se formează la intrarea apei în captare. Deoarece se face abstracţie de forma în plan a captării, rezultatele obţinute constituie o generalizare a teoremei lui Ciarnîi, care se referă la puţul singular.

1. O clasă importantă de mişcări prin medii poroase, cu multiple aplicaţii în tehnică, o constituie mişcările spaţiale care au loc în domenii extinse în planul orizontal şi mai puţin extinse în plan vertical. Din această clasă fac parte, de exemplu, mişcările subterane cu nivel liber in prezenţa sistemelor de captare. Pentru soluţionarea acestei clase de probleme, şi în special pentru determinarea formulelor de debit, se aplică, în general, teoria hidraulică a filtraţiei bazată pe ipotezele simplificatoare ale lui Dupuit [1]: neglijarea componentei verticale a vitezei de filtraţie şi a existenţei înălţimii de izvorîre la intrarea apei în captare. Aceste ipoteze conduc de fapt la asimilarea mişcării cu nivel liber cu o mişcre plană sub presiune, rezolvabilă cu ajutorul funcţiilor analitice de o variabilă complexă. Cu toate aceste aproximări, numeroase cercetări experimentale, dintre care citäm pe cele ale lui Boulton [2], au demonstrat însă că formula debitului obţinută pe această cale pentru puţul singular (formula bine cunoscută Dupuit-Forcheimer) dă rezultate exacte.

Avînd în vedere ipotezele simplificatoare ale teoriei hidraulice, mulţi cercetători şi-au pus problema justificării teoretice a acestei concordanţe remarcată chiar ca surprinzătoare de către M. Muskat [3].

În această direcţie, în 1951 Ciarnîi publică o demonstraţie riguroasă a formulei Dupuit-Forcheimer pentru puţul singular [4], fără a se folosi de ipotezele simplificatoare ale teoriei hidraulice. În 1962, independent de Ciarnîi, M.S. Hantush [5] prezintă o demonstraţie similară tot pentru cazul puţului singular. O serie de alte rezultate se pot urmări în [8], iar pentru o clasă de medii neomogene în [9].

În lucrarea de față, folosindu-se de observația lui I. Pérès [6], privind posibilitatea demonstrării teoremei lui Ciarnîi aplicînd formula lui Green pentru două funcții armonice și de rezultatele obținute de Pierre Huard de la Marre [7] prezentate în [8], se propune deducerea unor formule de tip Dupuit-Forcheimer exacte, pentru o cavitate drenantă de formă oarecare. Astfel, va fi posibilă eliminarea ipotezelor teoriei hidraulice a filtrației în calculul debitului oricărei captări singulare.

Menționăm că prin noțiunea de *cavitate drenantă*, folosită și în alte lucrări [10], [11], se înțelege un uvraj limitat de o suprafață cilindrică oarecare cu generatoarea verticală, din care se extrage un debit Q la nivel constant h_0. Se observă că diferitele tipuri de captări : puț circular, tranșeu drenant de lungime finită , puț de tranșee drenante radiale etc., sînt de fapt niște cavități drenante limitate de suprafețe cilindrice particulare.

2. Fie un mediu poros situat pe un pat impermeabil orizontal, limitat de suprafețele cilindrice verticale S_1 și S_2 avînd ca directoare curbele simple închise C_1, respectiv C_2. Suprafețele S_1 și S_2 limitează cavitatea drenantă, respectiv „rezervorul" de alimentare a mediului poros.

Notînd cu $S = S_1 \cup S_2 \cup S_i \cup S_l \cup S_u$ suprafața ce limitează domeniul mișcării D, unde

S_i este suprafața impermeabilă orizontală,

S_l — suprafața liberă,

S_u — suprafața de izvorîre la intrarea apei în cavitatea drenantă, vom scrie formula lui Green pentru două funcții armonice în D :

$$\int_D \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS = \int_S \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS. \tag{1}$$

În (1) funcția φ va reprezenta potențialul vitezelor mișcării reale și, în consecință, satisface condițiile la limită :

$$\varphi(x, y, h) \quad \text{armonică în } D, \text{ continuă în } D \cup S, \tag{2}$$

$$\varphi = -kH_0, \qquad (x, y, h) \in S_2, \tag{3}$$

$$\varphi = -kh_0, \qquad (x, y, h) \in S_1, \tag{4}$$

$$\varphi = -kh, \qquad (x, y, h) \in S_l \cup S_u, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \qquad (x, y, h) \in S_i \cup S_l \cup S_u. \tag{6}$$

Funcția Φ este o funcție armonică arbitrară în D.

Deoarece se urmărește determinarea debitului, iar asupra lui Φ nu s-a pus nici o condiție restrictivă, se va considera această funcție astfel încît

$$\Phi(x, y, h) = \Phi_j = \text{const}, \quad (x, y, h) \in S_j \, (j = 1, 2). \tag{7}$$

În aceste condiţii, ţinînd seama de (6) şi de faptul că

$$\int_{S_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S_1 = \int_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S_2 = Q, \tag{8}$$

(1) devine

$$\int_S \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = (\Phi_1 - \Phi_2) Q, \tag{9}$$

unde cu Q s-a notat debitul extras din cavitate.

Pentru a explicita integrala din membrul stîng al relaţiei (9) este necesar să se precizeze funcţia Φ, armonică în D şi care să satisfacă condiţiile (7).

În acest scop se consideră mişcarea plană sub presiune „echivalentă", care are loc în domeniul plan D_* limitat de C_1 şi C_2 cu aceleaşi condiţii la limită pe aceste contururi. Dacă notăm cu $F(z)$ potenţialul complex al acestei mişcări, Re $\{F(z)\}$ satisface condiţiile (7) fiind în acelaşi timp armonică D_*. Deoarece $F(z)$ nu depinde de h, Re $\{F(z)\}$ va fi armonică chiar în D şi, în consecinţă, se va putea lua $\Phi = \mathrm{Re}\,\{F(z)\}$. Cu aceste observaţii integrala din membrul stîng al relaţiei (9) se va putea explicita funcţie de potenţialul complex al mişcării sub presiune considerate şi de valorile la limită ale funcţiei φ:

$$\int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S = -kH_0 \int_{S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}S_2 - kh_0 \int_{S_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}S_1 - k \int_{S_l \cup S_u} h \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}S. \tag{10}$$

Primele două integrale din membrul drept se vor exprima sub forma

$$\int_{S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}S_2 = H_0 \int_{C_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}l_2 = H_0 \,\mathrm{Im} \left\{ \int_{C_2} F'(z)\, \mathrm{d}z \right\} \tag{11}$$

şi

$$\int_{S_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}S_1 = -h_0 \,\mathrm{Im} \left\{ \int_{C_1} F'(z)\, \mathrm{d}z \right\}. \tag{12}$$

Pentru cea de a treia integrală se consideră pe suprafaţa liberă S_l o curbă de nivel C, de arc l, parcursă în sensul care face unghiul $3\pi/2$ cu sensul curentului (sens direct). Notînd cu γ unghiul dintre normala exterioară la S_l şi axa de coordonate Oh, ţinînd seama că cosinuşii directori ai normalei şi elementul de arie se pot exprima sub forma

$$-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} \sin\gamma; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} \sin\gamma; \quad \cos\gamma; \quad \mathrm{d}S = \mathrm{d}l : \mathrm{d}h/\sin\gamma, \tag{13}$$

se obţine

$$\int_{S_l \cup S_u} h \frac{\partial \Phi}{\partial n} \mathrm{d}S = -\int_{h_0}^{H_0} \int_C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathrm{d}y - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathrm{d}x \right) h \,\mathrm{d}h \tag{14}$$

(s-a ţinut seama că Φ este independentă de h). Curba de nivel C fiind situată într-un plan orizontal, integrala de-a lungul ei se poate interpreta ca o integrală pe o curbă similară din planul complex (z). Astfel, prin intermediul condiţiilor Cauchy-Riemann, (14), devine

$$\int_{S_l \cup S_u} h \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, dS = - \frac{H_0^2 - h_0^2}{2} \operatorname{Im} \left\{ \int_C F'(z) \, dz \right\}. \tag{15}$$

Funcţia $F(z)$ fiind olomorfă în domeniul plan D limitat de C_1 şi C_2, drumurile de integrare C_1, C_2 şi C sînt echivalente. În consecinţă, din (9)—(12) şi (14) se va putea explicita debitul Q sub forma

$$Q = \frac{k \dfrac{H_0^2 - h_0^2}{2} \operatorname{Im} \left\{ \int_{C_2} F'(z) \, dz \right\}}{\operatorname{Re} \{F(z \in C_2) - F(z \in C_1)\}}. \tag{16}$$

În legătură cu această expresie vom observa că dacă notăm cu Q_* debitul pe unitatea de grosime a stratului acvifer, din mişcarea plană sub presiune echivalentă al cărui potenţial complex este $F(z)$, au loc egalităţile :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} \left\{ \int_{C_2} F'(z) \, dz \right\} = - Q_*, \\ &\operatorname{Re} \{F(z \in C_2) - F(z \in C_1)\} = - k(H_0 - h_0). \end{aligned} \tag{17}$$

Înlocuindu-le în (16) se obţine

$$Q = \frac{H_0 + h_0}{2} Q_*, \tag{18}$$

adică debitul captării în mişcarea cu nivel se obţine înmulţind debitul pe unitatea de grosime a stratului acvifer din mişcarea sub presiune echivalentă, cu semisuma adîncimilor apei din captare şi conturul de alimentare.

Se poate enunţa deci următoarea concluzie :

Debitul unei captări subterane perfecte nu depinde de gradul de neuniformitate al mişcării cu nivel liber şi de suprafaţa de izvorîre ce se formează la intrarea apei în captare şi, în consecinţă, în calculul debitului captat precizarea ipotezelor teoriei hidraulice nu este necesară.

Această concluzie constituie o generalizare a teoriei lui Ciarnîi care se referă numai la cazul particular al puţului perfect. Concluziile lui Ciarnîi se obţin considerînd C_1 şi C_2 cercuri concentrice şi $F(z) = z$.

Rezultatele obţinute pot fi extinse şi pentru cazul cînd mediul poros din exteriorul cavităţii drenante este nelimitat, dacă se admite ipoteza regimului de mişcare cvasipermanent, cunoscut în literatura de specialitate [1] sub denumirea de „regim de echilibru".

Această ipoteză admite formarea la limitele zonei de influenţă a captării a unei suprafeţe cilindrice verticale de alimentare deoarece conul de depresiune creat de captare atinge practic înălţimea piezometrică iniţială a stratului acvifer. În consecinţă, se formează o suprafaţă de alimentare S_2 ca şi în primul caz. Considerînd curba directoare C_2 a acestei suprafeţe ca fiind o linie echipotenţială din mişcarea sub presiune echivalentă, formula debitului (16) se va reduce la o formă mai simplă.

Într-adevăr, în aceste condiţii particulare potenţialul complex al mişcării se poate exprima sub forma

$$F(z) = K \ln f(z), \tag{19}$$

unde K este o constantă reală, iar $\zeta = f(z)$ o funcţie analitică şi univalentă, definită în domeniul exterior cavităţii limitate de curba C_1, care realizează transformarea conformă a acestui domeniu pe domeniul exterior unui cerc centrat în origine din planul (ζ).

Luînd $\Phi = \operatorname{Re}\{F(z)\}$, numitorul expresiei (16) devine

$$\operatorname{Re}\{F(z \in C_2) - F(z \in C_1)\} = K \ln \frac{|f(z \in C_2)|}{|f(z \in C_1)|}. \tag{20}$$

Pentru explicitarea integralei de la numărător vom observa că pentru z, suficient de îndepărtate, şi în condiţiile în care transformarea considerată păstrează corespondenţă punctelor de la infiniţi şi conservă disecţia axelor de coordonate, avem

$$f(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \ldots \tag{21}$$

şi, în consecinţă,

$$\int_{C_2} F'(z)\,dz = K \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi K\,i\,(P - N) = 2\pi K\,i, \tag{22}$$

unde N şi P sînt zerourile, respectiv polii funcţiei $f(z)$ în domeniul exterior curbei C_2.

Înlocuindu-le în (16) se obţine formula debitului pentru o cavitate drenantă oarecare:

$$Q = \frac{\pi h\,(H_0^2 - h_0^2)}{\ln \dfrac{|f(z \in C_2)|}{|f(z \in C_1)|}}. \tag{23}$$

Pentru $f(z) = z$ şi deci $|f(z \in C_2)| = R_0$, iar $|f(z \in C_1)| = r_0$, se obţine formula binecunoscută a lui Dupuit-Forcheimer, unde R_0 reprezintă raza de acţiune, iar r_0 raza puţului.

Pentru

$$f(z) = (z^{n/2} + \sqrt{z^n l^n})^{2/n} \tag{24}$$

se obține cazul unui sistem de n tranșee drenante radiale de aceeași lungime l. Notînd cu R_0 distanța zonei de influență măsurată din centrul sistemului de-a lungul unui braț, (23) devine

$$Q = \frac{n\pi k (H_0^2 - h_0^2)}{2 \ln \left[\left(\frac{R_0}{l} \right)^{n/2} + \sqrt{\left(\frac{R_0}{l} \right)^n - 1} \right]}. \tag{25}$$

Primit la redacție la 12 iulie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. G. CASTANY, *Traité pratique des eaux souterraines*, Dunod, Paris, 1967.
2. N. S. BOULTON, *The flow pattern near a gravity well in a uniform Waterbearing medium*, Journ. Inst. of Civ. Eng.
3. M. MUSKAT, *The flow of homogenous fluids trough porous media*, New York, 1947.
4. I. A. CIARNÎI, *Strogoe dokazatelstva formul Dupuit dlia beznopornoi filtrații D promejutcom viscocivanie*, Docl. Akad. Nauk USSR **79**, *6*, 937 (1951).
5. M. S. HAUTUSH, *On the validity of the Dupuit-Forcheimer formula*, Journal of geoph. Res. vol. 67, pag. 2417–2420, juill. 1962.
6. B. LE. FUR, *Mecanique des fluides dans les milieux poreux*, Univ. de Paris. Depart. de Mec. 1962–63.
7. P. HUARD DE LA MARRE *Expressions exactes des débits d'infiltration dans les barages tridimensionnels à parois verticales*, Comptes Rendus, Ac. Sc. Paros. **242**, *9*, 1125, (1956).
8. St. I. GHEORGHIȚĂ, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, 1966.
9. T. OROVEANU, *Asupra formulei generalizate a lui Dupuit*, St. cerc. mec. apl., **XII**, *5*, *11*, 47 (1961).
10. I. DAVID, *Sur la généralisation d'un théorème du mouvement plan en milieux poreux ayant une cavité*, Compte Rendus Acad. Sc. Paris., **269**, 809–811 (1969).
11. — *Sur le mouvement plan convergent ou divergent dans un milieux poreux présentant une cavite*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, **272**, 405–408 (1971).
12. E. CARAFOLI, T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*, București, vol. II, Edit. Acad. 1955.

PRECIZAREA RELAȚIEI PENTRU CALCULUL DEBITULUI LA CURGEREA ULEIURILOR PRIN FANTE MICI ÎN REGIM LAMINAR

de E. BOTEZ și C. MITOȘERIU
Institutul politehnic București,
Institutul politehnic Galați

În lucrare se studiază influența lungimii canalului de curgere asupra debitului și coeficientului de debit, ținînd seama că acest parametru influențează direct pierderile prin frecare vîscoasă. De asemenea, pe baza cercetărilor făcute, s-a stabilit că în regim laminar de curgere relația debit-presiune are formă liniară. Referitor la această relație se prezintă domeniul de valabilitate și valorile coeficientului de proporționalitate C.

Rezultatele prezentate au fost obținute la curgerea prin fante circulare cu diametrul $d = 0{,}2 \ldots 1{,}0$ mm.

1. INTRODUCERE

1. Instalațiile hidraulice de acționare a mașinilor-unelte conțin un număr mare de rezistențe locale: coturi, ramificații, supape, distribuitoare, robinete, filtre, dispozitive pentru reglarea și stabilizarea debitului etc. La proiectarea acestor elemente se folosesc relațiile clasice pentru calculul vitezei de curgere și a debitului

$$v = \varphi \sqrt{\frac{2g}{\gamma} \Delta p}, \qquad Q = \mu s \sqrt{\frac{2g}{\gamma} \Delta p} \tag{1}$$

sau relația inversă pentru calculul pierderii de presiune ce se produce pe elementul respectiv,

$$\Delta p = \zeta \frac{v^2}{2g} \gamma, \qquad \Delta p = BQ^2. \tag{2}$$

Precizia calculelor efectuate cu aceste relații depinde numai de măsura în care se cunosc coeficienții φ, ε, μ și ζ care intervin, celelalte mărimi fiind bine determinate. Dar tocmai aceasta este o problemă foarte discutabilă și de o mare importanță practică.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 5, 1974, P. 813–827

Relațiile (1) și (2) se stabilesc prin aplicarea legii lui Bernoulli la întreg jetul de lichid ce curge printr-o fantă. În final se introduc coeficienții de corecție pentru viteza de curgere (φ) și pentru secțiunea jetului de lichid (ε). Produsul acestor coeficienți, $\mu = \varphi\varepsilon$, se numește coeficient de debit. Valorile prezentate în literatură pentru coeficienții φ, ε, μ (ζ) se referă la curgerea lichidelor cu viscozitate mică prin fante de dimensiuni relativ mari, cum ar fi la diafragme și duze debitmetrice cu dimensiunea caracteristică de ordinul $10^1 \ldots 10^2$ mm.

Pentru realizarea mișcărilor de avans cu viteză mică la mașini-unelte se pune problema reglării unor debite mici, cu ordinul de mărime $10^0 \ldots 10^1$ cm^3/s. Dimensiunea caracteristică a fantelor de reglare prin care se realizează asemenea debite este de numai $10^{-2} \ldots 10^{-1}$ mm. La curgerea uleiurilor minerale prin astfel de fante pierderile cauzate de frecarea vîscoasă capătă o importanță deosebită, ceea ce determină micșorarea coeficientului de debit mult sub valorile obișnuite. Cercetările făcute [2], [4] — [6] au arătat că acest coeficient este o mărime variabilă cu regimul de curgere (numărul Reynolds), forma și dimensiunile fantei. Rezultă că pentru utilizarea corectă a relațiilor (1), (2) este necesar să se cunoască dependențele $\mu = f(\mathcal{R}e)$, $\zeta = f(\mathcal{R}e)$ în fiecare caz concret. Pe lîngă aceasta, în cazul fantelor reglabile coeficientul de debit variază cu gradul de deschidere, astfel că problema devine mult mai complicată decît s-ar părea la prima vedere. În lucrarea [9] se prezintă forma tipică a curbelor $\mu = f(\mathcal{R}e)$, justificîndu-se alura lor în diferite domenii de curgere și necesitatea unui studiu separat al fantelor de dimensiuni mici. Condițiile normale de funcționare ale acestora se stabilesc în regim laminar și tranzitoriu, deci prezintă interes deosebit tocmai domeniul în care coeficientul de debit este o mărime variabilă în limite foarte largi.

Făcînd o analiză critică a rezultatelor prezentate în literatură cu privire la valorile și dependența coeficientului de debit, se pot formula o serie de observații și concluzii.

1) În unele lucrări [1], [3], [8], [10] se prezintă numai valori informative ale coeficientului de debit, cuprinse în limite mult diferite de la o lucrare la alta: 0,68...0,70, 0,55 ... 0,70, sau 0,59...0,64.

În plus se menționează că acestea sînt valabile la fante mici de orice formă sau indiferent de forma și dimensiunile fantei, precum și viscozitatea lichidului.

2) Referitor la curgerea prin duze cilindrice cu lungimea de curgere $l = (3 \ldots 5)\, d$ se prezintă și se justifică valori cuprinse în intervalul 0,82... ...0,97, deci mai mari decît la diafragme. Asemenea valori au însă valabilitate numai în cazul dimensiunilor relativ mari [2], la care pierderile vîscoase sînt neglijabile.

3) Pentru fantele aparatajului de reglare a debitului la mașini-unelte se prezintă valori globale, într-un interval relativ larg, de forma:

0,68...0,86, indiferent de forma și dimensiunile fantei [13],

0,75...0,87, la fante cu lungimea de curgere $l = 0{,}1 \ldots 0{,}2$ mm[1],

0,63...0,72, la lungimi de curgere mici față de raza hidraulică a fantei [10].

Este evident că toate valorile indicate mai sus se referă numai la regimul turbulent stabilizat și care interesează mai puțin în cazul curgerii lichidelor vîscoase prin fante mici. Pe baza unor cercetări mai aprofundate [4],

[6], [9], [11] s-a stabilit că factorii ce caracterizează forma fantelor şi viscozitatea lichidului au o mare influenţă asupra coeficientului de debit, în special la deschideri mici.

4) Cercetările făcute asupra curgerii prin diafragme şi duze debitmetrice [2], [4], [5], [7], [11] au pus în evidenţă variaţia coeficientului de debit cu regimul de curgere. În general, se prezintă familii de curbe $\mu = f(\mathcal{R}e, m)$, ordonate după coeficientul de reducţie m. Alura curbelor în diferite domenii de curgere, precum şi diferite valori importante sînt funcţie de forma şi dimensiunile fantei, viscozitatea lichidului, lungimea de curgere.

5) Metoda de reprezentare arătată mai sus s-a adoptat şi în cazul fantelor de dimensiuni mici. La astfel de fante lungimea de curgere are o influenţă foarte mare asupra debitului şi coeficientului de debit. Ascest aspect al problemei nu a fost încă studiat sistematic în lucrările de specialitate, astfel încît există o serie de lacune sau rezultate contradictorii [4], [11], [12], [14].

În prezenta lucrare se studiază dependenţele $Q = f(l)$ şi $\mu = f(\mathcal{R}e, l)$, referitor la curgerea prin duze cu diametrul $d \leqslant 1$ mm şi lungimea $l \leqslant$ $\leqslant 1{,}2$ mm. De asemenea, ţinînd seama de ponderea mare a pierderilor prin frecare vîscoasă, se justifică un alt mod de prezentare a relaţiei pentru calculul debitului.

2. CONDIŢIILE DE LUCRU ŞI PROGRAMUL CERCETĂRII EXPERIMENTALE

Pentru clarificarea influenţei lungimii canalului de curgere s-a executat un set de 65 fante circulare, avînd următoarele dimensiuni limită: $d = 0{,}2 \ldots 1{,}0$ mm şi $l = 0{,}05 \ldots 1{,}2$ mm. După operaţia de găurire s-a procedat la o calibrare cu sîrme de oţel pentru micşorarea asperităţilor şi eliminarea erorilor de formă. Prin lustruire cu hîrtie metalografică a suprafeţelor frontale au fost eliminate bavurile, obţinîndu-se muchii de intrare foarte bine conturate şi ascuţite. Controlul formei şi dimensiunilor s-a făcut la microscop, erorile fiind mai mici de $2 \ldots 3$ μm.

Toate experimentările s-au executat cu ulei de turbină Tb 5004, avînd următoarele cifre de viscozitate $\nu(25°C) = 1{,}22$ cm²/s şi $\nu(50°C) = 0{,}278$ cm²/s. Temperatura uleiului a fost măsurată la intrarea în fantă, fiind menţinută la valoarea prescrisă cu o precizie de $\pm$ 0,5°C. Aceasta s-a impus avînd în vedere influenţa mare a viscozităţii asupra debitului.

Pentru măsurarea presiunii s-au folosit mai multe manometre din clasa de precizie 0,6 şi un monometru cu cloană de mercur pentru domeniul $0{,}2 \ldots 1{,}0$ daN/cm².

Măsurarea exactă a debitului s-a făcut prin metoda volumetrică, fiecare experienţă fiind repetată de $3 \ldots 6$ ori, în funcţie de împrăştierea rezultatelor obţinute.

Principalele probleme studiate în cadrul lucrării:

1) Neconcordanţa relaţiilor (1), (2) în cazul curgerii lichidelor vîscoase prin fante mici ($d = 0{,}2 \ldots 1{,}0$ mm).

2) Variaţia debitului şi a coeficientului de debit în funcţie de lungimea canalului ($l = 0{,}05 \ldots 1{,}2$ mm, respectiv $l/d = 0{,}25 \ldots 3$), în domeniul curgerii laminare.

3) Forma relaţiilor $\mu = f(\mathcal{R}e)$, $\Delta p = f(Q)$ în domeniul curgerii laminare.

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

Cercetările privind curgerea lichidelor vîscoase prin fante mici se justifică, avînd în vedere că prin aplicarea necondiționată a relației (1) se obțin erori de calcul foarte mari (fig. 1). Pentru calculul debitului teoretic cu relația (1) s-a considerat o valoare medie a coeficientului de debit, $\mu = 0{,}65$. Se observă că raportul Q_e/Q_t este mult subunitar, în special la lungimi mari ale canalului de curgere.

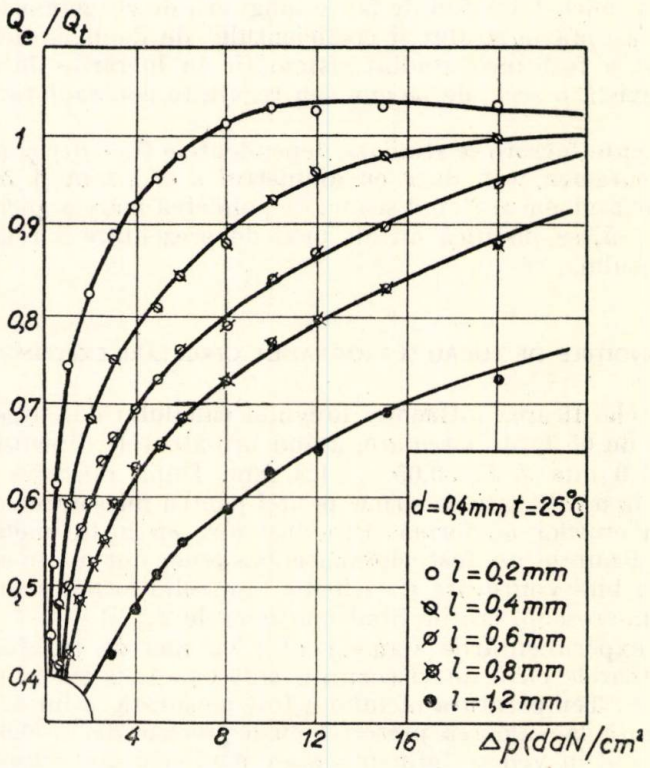


Fig. 1

În continuare s-a studiat mai amănunțit influența acestui parametru asupra mărimilor ce caracterizează curgerea. După cum se vede chiar din aceste prime rezultate, o atenție deosebită trebuie acordată domeniului de curgere la presiuni relativ mici (regim laminar).

3.1. INFLUENȚA LUNGIMII CANALULUI ASUPRA DEBITULUI

Făcînd un studiu sistematic al curgerii prin fante mici, s-a putut stabili cu certitudine că lungimea canalului de curgere influențează foarte mult mărimea debitului (fig. 2). Această influență se explică prin aceea că

la curgerea în regim laminar contracția este neglijabilă și deci jetul este în contact cu pereții fontei pe toată lungimea acesteia [2], [6].

Comparînd debitele obținute la curgerea prin fante cu același diametru și diferite lungimi, au fost obținute curbe de forma celor din figura 3, în care s-a notat prin $Q(0,1)$ debitul obținut la lungimea de curgere

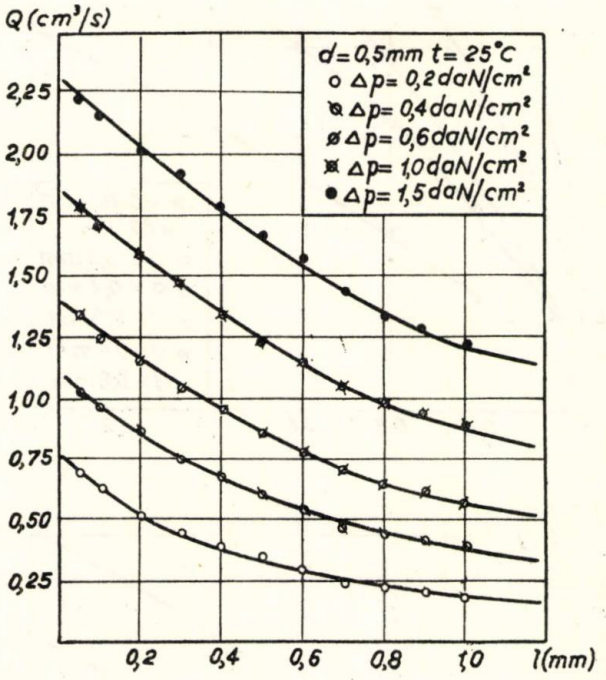


Fig. 2

$l = 0,1$ mm. Se remarcă faptul că diferențele cresc odată cu micșorarea diametrului și creșterea lungimii canalului de curgere. La presiuni relativ mari ($\Delta p > 10$ daN/cm²) s-a dovedit că această influență devine neglijabilă, ceea ce se explică prin desprinderea jetului față de pereții canalului.

3.2. INFLUENȚA LUNGIMII CANALULUI ASUPRA COEFICIENTULUI DE DEBIT

În figura 4 se prezintă curbele de variație ale coeficientului de debit funcție de lungimea fantei și diferența de presiune aplicată, pentru fanta cu diametrul $d = 0,5$ mm. Se observă că la lungimi mari și presiuni mici coeficientul de debit scade foarte mult, în unele domenii obținîndu-se valori de numai 0,1 ... 0,3. De asemenea, în domeniul presiunilor relativ mici ($\Delta p < 2$ daN/cm²), valorile coeficientului de debit se încadrează în limitele obișnuite de 0,6 ...0,7 numai la lungimi neglijabile, de 0,05... ...0,1 mm. Rezultate asemănătoare au fost obținute și la alte dimensiuni ale fantelor.

MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR

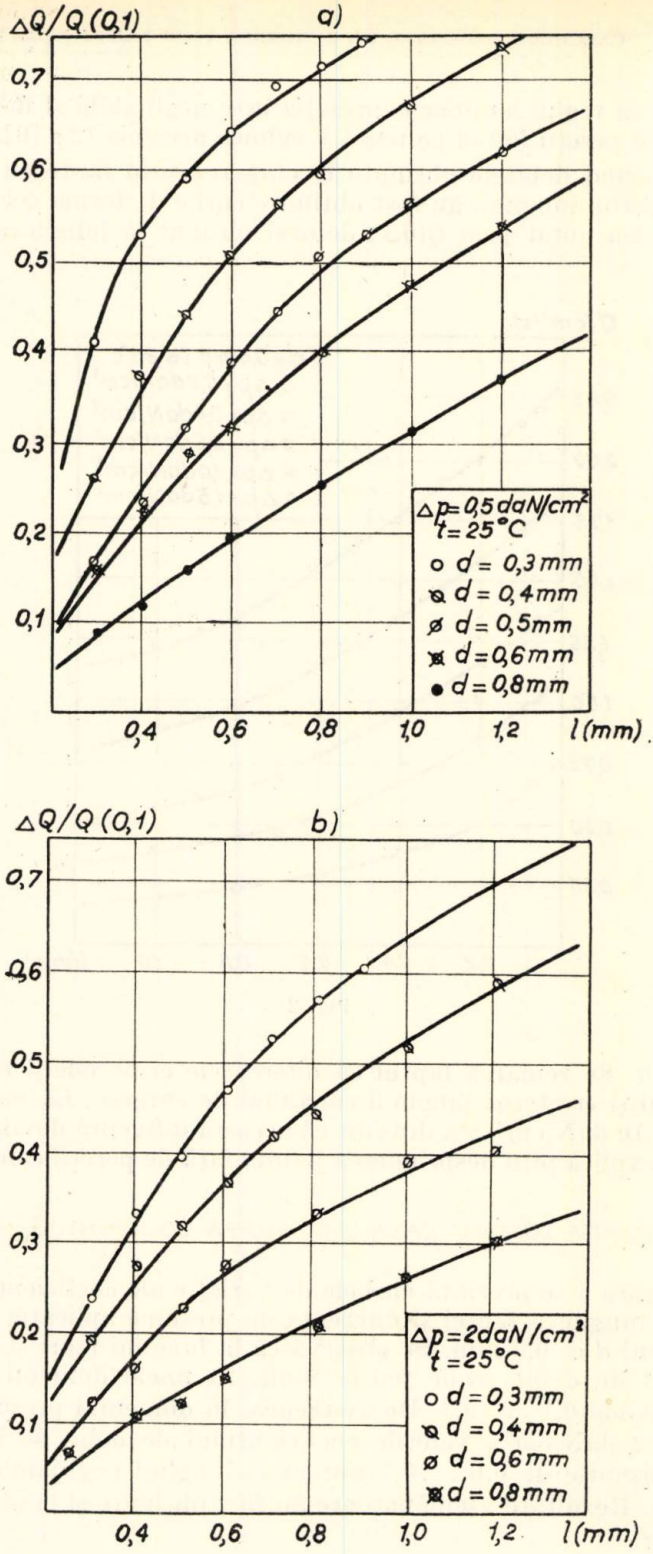

a)
ΔQ/Q (0,1)
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
l (mm)
Δp = 0,5 daN/cm²
t = 25°C
o d = 0,3 mm
d = 0,4 mm
d = 0,5 mm
d = 0,6 mm
d = 0,8 mm
b)
ΔQ/Q (0,1)
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
l (mm)
Δp = 2 daN/cm²
t = 25°C
o d = 0,3 mm
d = 0,4 mm
d = 0,6 mm
d = 0,8 mm

Fig. 3

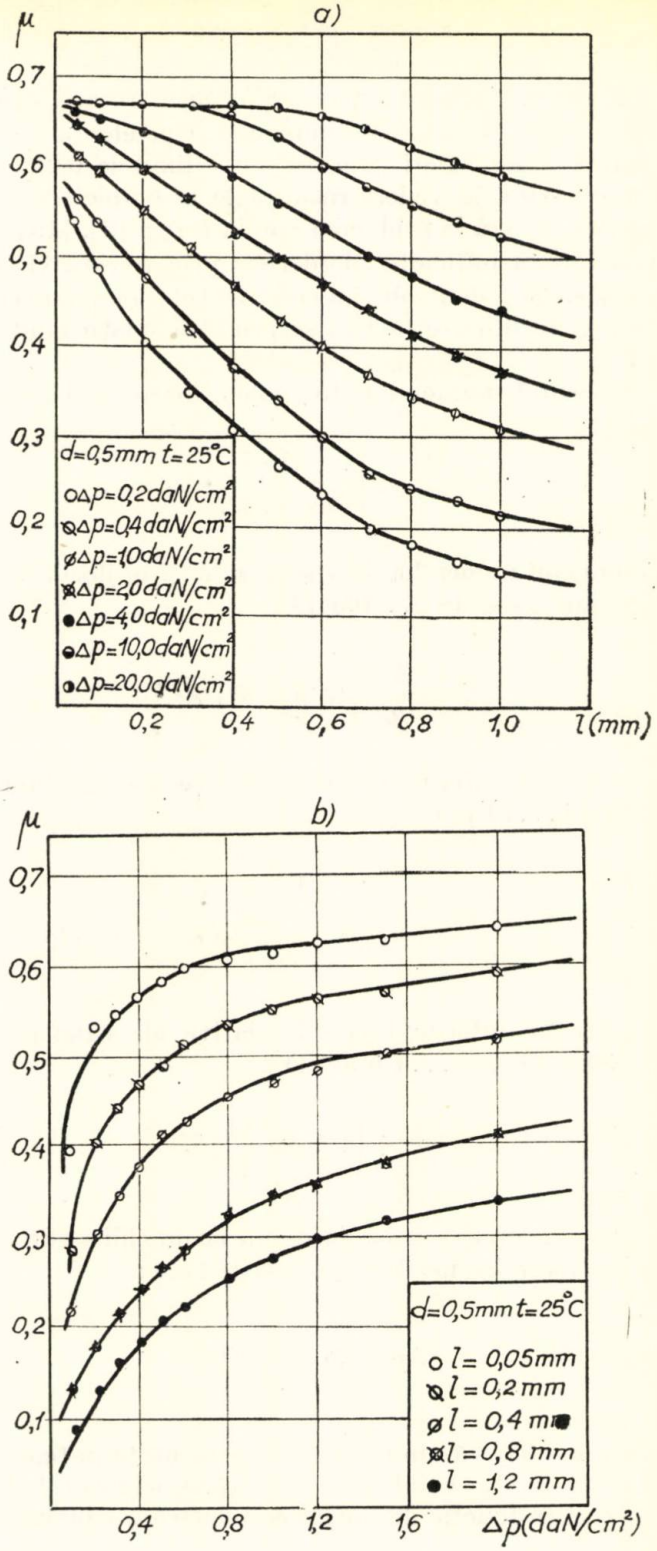

a)
μ
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
d=0,5mm t=25°C
○Δp=0,2daN/cm²
⊗Δp=0,4daN/cm²
ø Δp=1,0daN/cm²
⊠Δp=2,0daN/cm²
● Δp=4,0daN/cm²
⊖Δp=10,0daN/cm²
◍Δp=20,0daN/cm²
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
l(mm)
b)
μ
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
d=0,5mm t=25°C
○ l= 0,05mm
⊗ l = 0,2 mm
ø l = 0,4 mm
⊠ l = 0,8 mm
● l = 1,2 mm
0,4
0,8
1,2
1,6
Δp(daN/cm²)

Fig. 4

Pentru a ilustra influența pierderilor prin frecare vîscoasă asupra coeficientului de debit, în figura 5 se prezintă dependența $\mu = f(\sqrt{\mathcal{R}e}, l/d)$, lungimea relativă luînd valori cuprinse între limitele 0,25 ... 3,0. Acest studiu s-a impus avînd în vedere rezultatele incomplete și contradictorii din literatura ce se referă la problema studiată [8], [9], [19].

Pentru a ilustra influența pierderilor prin frecare vîscoasă asupra debitului, coeficientului de debit sau coeficientului de pierderi în domeniul curgerii laminare, în diferite lucrări se prezintă relații mult diferite una față de alta:

1) În domeniul numerelor Reynolds foarte mici, $\mathcal{R}e < 10$, [2]

$$\mu = \sqrt{\frac{\mathcal{R}e}{\mathcal{R}e + 25{,}2}}. \tag{4}$$

2) În domeniul numerelor Reynolds mici și mijlocii, funcție de raza muchiei la intrare $\mathcal{R}e < 10 \ldots 400$ [4],

$$\zeta = \frac{A}{\mathcal{R}e} \text{ sau } \mu = K\sqrt{\mathcal{R}e}; \tag{5}$$

3) La fante cu diferite lungimi relative ale canalului de curgere $l/d = 2 \ldots 5$ și $d = 1 \ldots 12$ mm [2],

$$\mu = \frac{1}{1{,}23 + \frac{58}{\mathcal{R}e_H} l/d}; \tag{6}$$

4) La fante de diferite lungimi relative ale canalului de curgere $l/d = 0{,}5 \ldots 50$ și $d = 0{,}5 \ldots 4$ mm [11],

$$\zeta = \frac{64}{\mathcal{R}e} + \left(1{,}4 + \frac{64}{\mathcal{R}e}\right) d/l. \tag{7}$$

5) Referitor la curgerea prin diafragme cu muchii ascuțite s-a stabilit prin considerații teoretice următoarea relație [12]:

$$\Delta p = 50{,}4 \frac{\rho \nu}{\pi d^3} Q. \tag{8}$$

După cum se observă din rezultatele prezentate în figura 6, se poate admite relația (5) în domeniul $\mathcal{R}e < 10 \ldots 15$. Coeficientul de proporționalitate K variază în funcție de lungimea relativă a canalului de curgere,

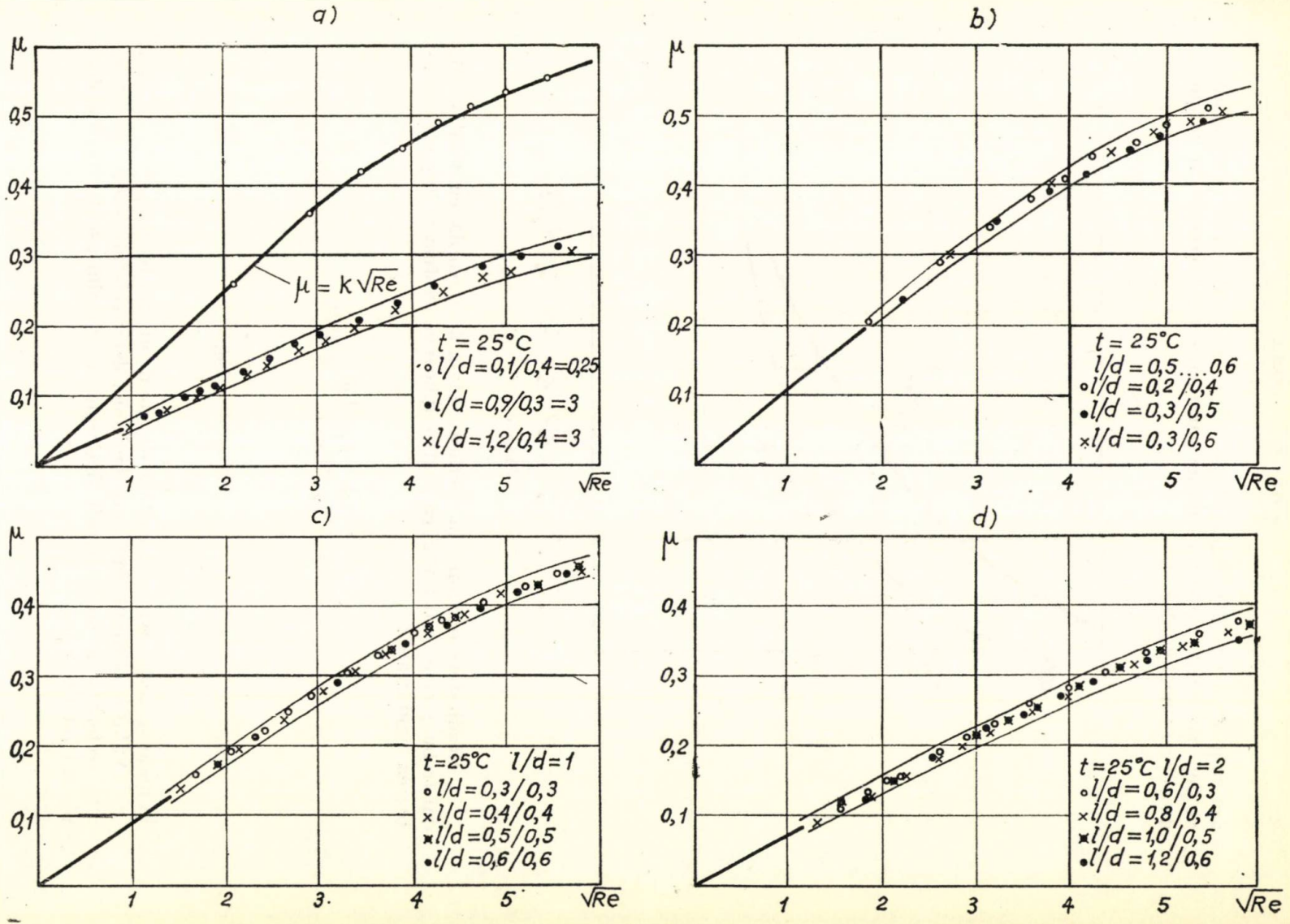

a)
μ
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
μ = k√Re
t = 25°C
∘ l/d = 0,1/0,4 = 0,25
• l/d = 0,9/0,3 = 3
× l/d = 1,2/0,4 = 3
1
2
3
4
5
√Re
b)
μ
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
t = 25°C
l/d = 0,5 0,6
∘ l/d = 0,2 /0,4
• l/d = 0,3/0,5
× l/d = 0,3/0,6
1
2
3
4
5
√Re
c)
μ
0,4
0,3
0,2
0,1
t=25°C l/d=1
∘ l/d = 0,3/0,3
× l/d = 0,4/0,4
✱ l/d = 0,5/0,5
• l/d = 0,6/0,6
1
2
3
4
5
√Re
d)
μ
0,4
0,3
0,2
0,1
t=25°C l/d = 2
∘ l/d = 0,6/0,3
× l/d = 0,8/0,4
✱ l/d = 1,0/0,5
• l/d = 1,2/0,6
1
2
3
4
5
√Re

Fig. 5

aşa cum se ilustrează în figura 6. Relaţia (8) nu arată că ar exista o astfel de dependenţă deoarece nu conţine parametrul l (s-a considerat lungimea de curgere neglijabilă).

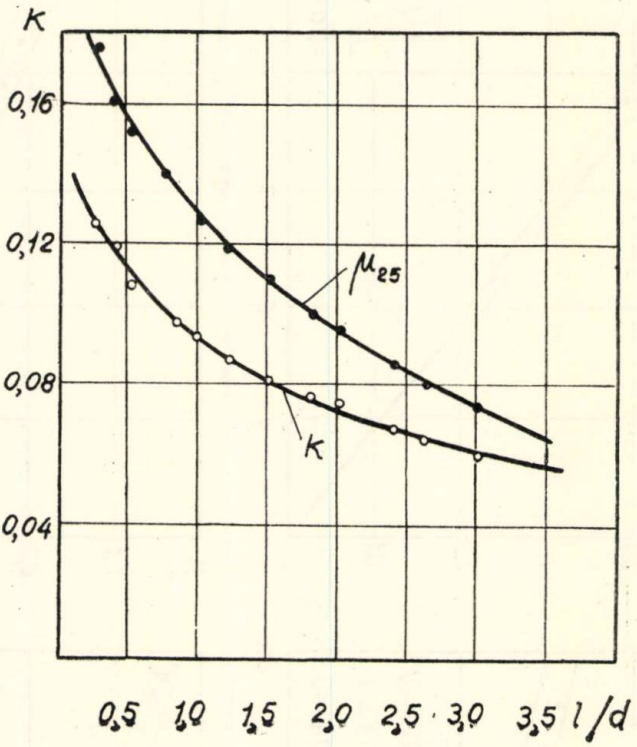


Fig. 6

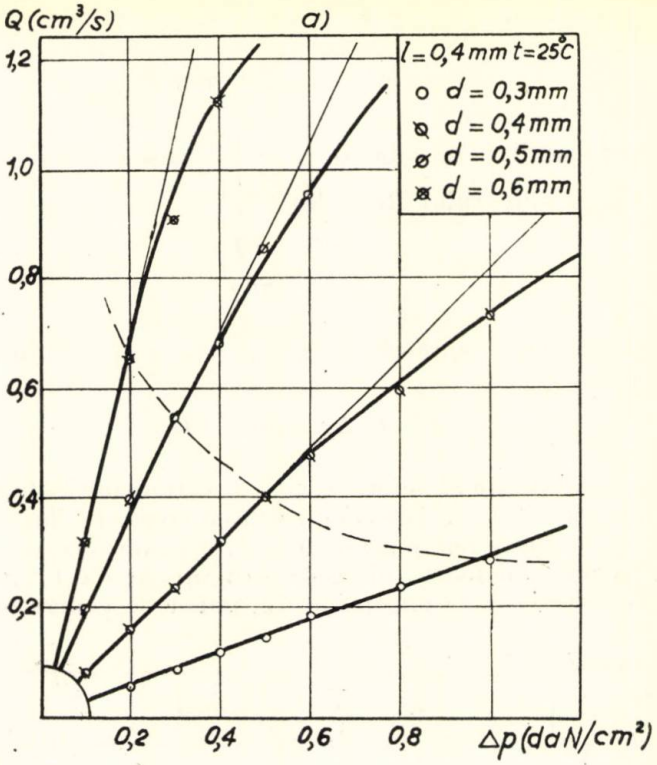
Rezultatele obţinute în lucrarea de faţă concordă cu relaţia (6), dar trebuie menţionat faptul că pentru aplicarea acesteia se impune următoarea modificare :

$$\mathcal{R}e_H = \frac{vd}{\nu} = \frac{\sqrt{2gH}\,d}{\nu} = \mu\mathcal{R}e,$$

$$\mu = \frac{1}{1{,}23 + \dfrac{58}{\mathcal{R}e}\,\mu\, l/d}, \qquad (5')$$

de unde se poate explicita coeficientul de debit sub forma $\mu = f\,(\mathcal{R}e,\ l/d)$.

Valorile obţinute sînt mult mai mici decît cele prezentate în literatură referitor la curgerea prin diafragme cu muchii ascuţite avînd diametrul relativ mare.


Q (cm³/s)
a)
l = 0,4 mm t = 25°C
o d = 0,3mm
d = 0,4mm
d = 0,5mm
d = 0,6mm
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,2
0,4
0,6
0,8
Δp (daN/cm²)

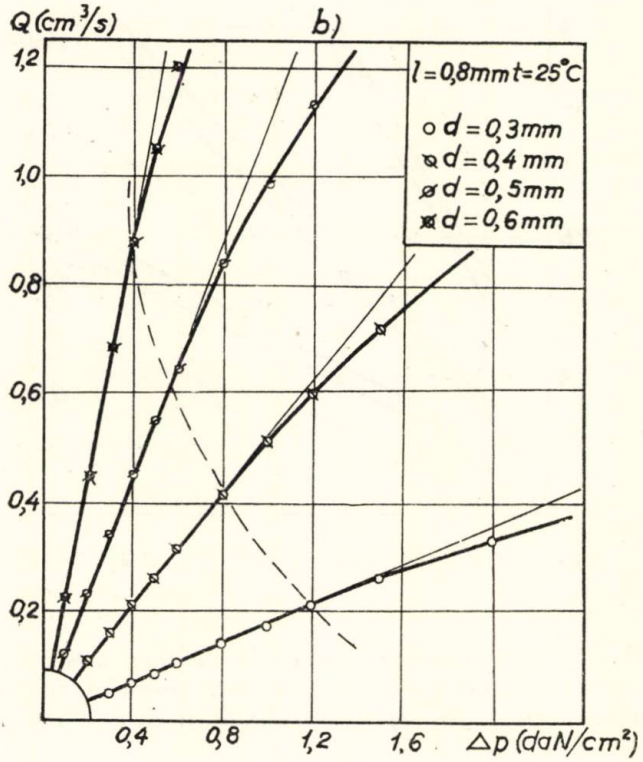

Q (cm³/s)
b)
l = 0,8mm t = 25°C
o d = 0,3mm
d = 0,4 mm
d = 0,5mm
d = 0,6mm
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,4
0,8
1,2
1,6
Δp (daN/cm²)

Fig. 7

3.3. FORMA RELAŢIEI DEBIT PRESIUNE

Admiţînd simultan relaţiile $Q = \mu S \sqrt{\frac{2g}{\gamma} \Delta p}$ şi $\mu = K \sqrt{\mathcal{R}e}$, prin înlocuirea expresiei numărului Reynolds,

$$\mathcal{R}e = \frac{vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu}, \tag{9}$$

rezultă că în domeniul curgerii laminare relaţia debit-presiune este de formă liniară

$$Q = C_1 \Delta p, \quad \Delta p = CQ. \tag{10}$$

Domeniul de valabilitate al acestei relaţii directe rezultă din figurile 7 şi 8, observîndu-se extinderea acestuia odată cu creşterea lungimii canalului de curgere. La diametre mai mari de 0,6 ... 0,7 mm relaţia (10) este valabilă numai la presiuni foarte mici, de ordinul $\Delta p < 0{,}1 \ldots 0{,}2$ daN/cm², domeniu care intersectează mai puţin din punct de vedere practic.

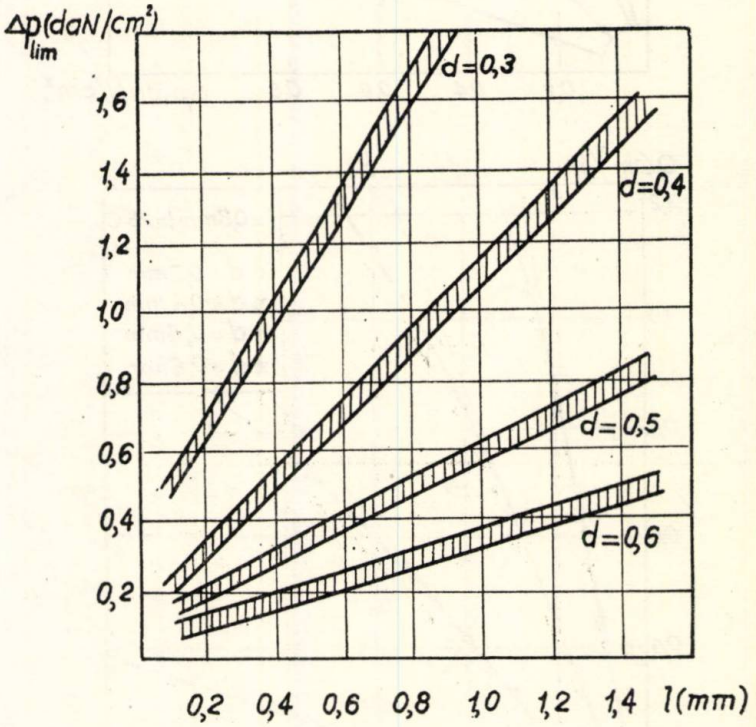
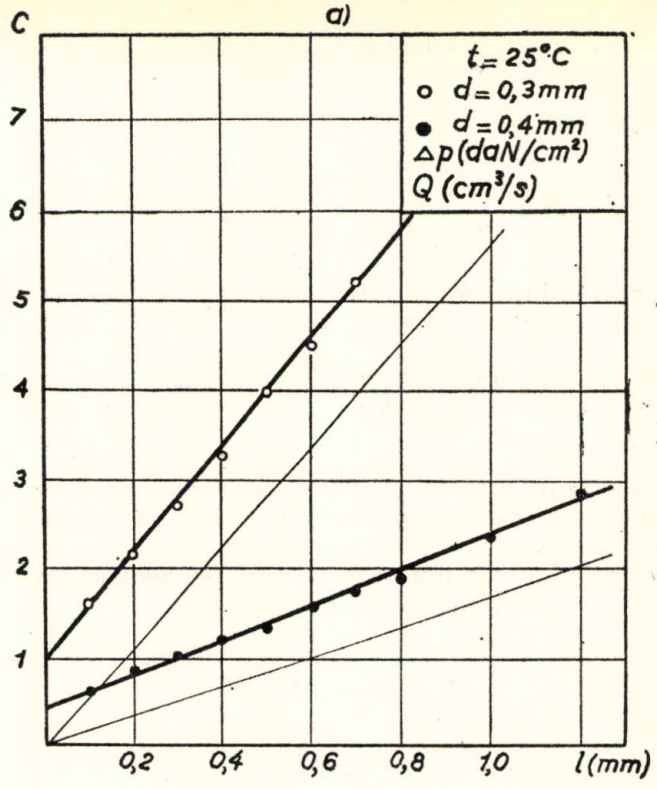


Fig. 8

Prelucrînd şi alte rezultate experimentale de forma celor prezentate în figura 7, s-a putut stabili legea de variaţie a coeficientului C din relaţia (10). Dependenţele $C = f(l, d)$ astfel obţinute se dau în figura 9, fiind


a)
C
7
6
5
4
3
2
1
t = 25°C
o d = 0,3mm
● d = 0,4mm
Δp(daN/cm²)
Q (cm³/s)
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
l(mm)

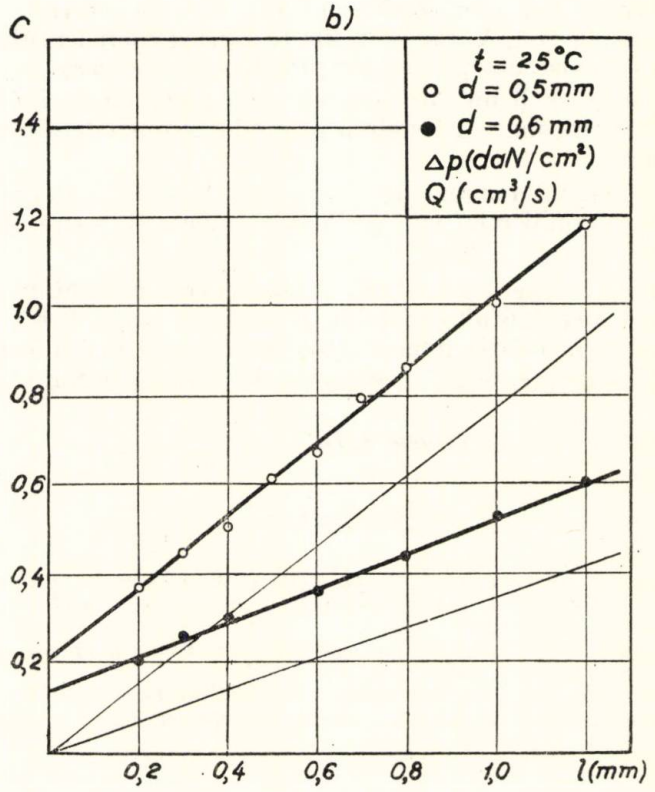

b)
C
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
t = 25°C
o d = 0,5mm
● d = 0,6 mm
Δp(daN/cm²)
Q (cm³/s)
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
l(mm)

Fig. 9

valabilă relația liniară.

$$C = C_0 + ml,$$

$$C_0 = f(d,\ \nu),\quad m = f(d,\ \nu). \tag{11}$$

Pentru comparație, în figura 9 se reprezintă cu linii subțiri variația coeficientului C după relația Hagen-Poiseuille,

$$\Delta p = \frac{128\ \rho\nu l}{\pi d^4} Q,\quad C_{H-P} = \frac{128\ \rho\nu l}{\pi d^4}. \tag{12}$$

Rezultă că valorile reale diferă față de cele teoretice prin componenta C_0. Această componentă exprimă pierderile prin frecare vîscoasă ce se produc la intrarea în fantă.

Pe baza rezultatelor obținute la alte temperaturi (viscozități) s-a stabilit că se poate aplica următoarea relație:

$$\frac{C(\nu_1)}{C(\nu_2)} = \frac{\nu_1}{\nu_2},\quad C = C,\ \nu. \tag{13}$$

4. CONCLUZII

1) Aplicarea relațiilor clasice (1), (2) reclamă corecții importante ale coeficienților μ și ζ. Variația în limite largi a coeficientului de debit este cauzată de existența pierderilor prin frecare vîscoasă.

2) La curgerea lichidelor vîscoase prin fante cu deschideri mici se remarcă o influență mare a lungimii canalului asupra debitului și coeficientului de debit.

3) În domeniul curgerii laminare curbele $\mu = f(\sqrt{\mathcal{R}e})$ se ordonează după valorile lungimii relative l/d. Pentru calcule se poate aplica relația $\mu = K\sqrt{\mathcal{R}e}$, în care $K = f(l/d)$.

4) În locul relației clasice (1) și a relației complementare (5) stabilită pentru calculul coeficientului de debit, se poate exprima direct dependența debit-presiune, prin relația liniară (10). Coeficientul C din această relație este influențat și de pierderile ce se produc la intrarea în fantă.

Primit la redacție la 28 decembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. N.S. Acerkan, ș.a. *Metallorejușcie Stanki*, Moskva Mașinostroenie, 1965, p. 692 – 698.
2. A. D. Altsuli, *Mestnie ghidravliceskie soprotivlenia prin dvijenii viazkih jidkostei*, Moskva, Gostoptehizdat, 1962, p. 115.
3. J. F. Blackburn, *Ghidravliceskie i pnevmaticeskie silovie sistemî upravlenia*, Moskva, Iz IL, 1962, p. 154 – 162.
4. L. Gross, *Bestimmung der Durchflussbeiwerte verschiedener Drossel-elemente, besonders bei kleinen Druckunterschieden*, Olhydraulik und Pneumatik, **12**, *1*, 3–8 (1968).

5. W. E. Howland, *A theory of Sharp — Edged Orifices*, Journal of Applied Mechanics, *4*, *2*, 53—54 (1937).
6. F. C. Johansen, *Flow through pipe orifices at low Reynolds numbers*, Proceedings of the Royal Society, Ser. A, 126, 1930, p. 231 — 245.
7. W. Koennecke, *Durchflussmessung mit Drosselgeräten bei kleinen Reynoldszahlen*, Archiv für Technisches Messen, (ATM), V 1242—1, 1938; V 1242—2, 1939.
8. D. Mateescu, *Hidraulica*, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1963, p. 471— 488.
9. C. Mitoseriu, *Studiu asupra curgerii lichidelor viscoase prin fante mici*, St. cerc. mec. apl., **31**, *4*, 1001—1018 (1972).
10. A. Oprean, ş. a. *Sistemele hidrostatice ale maşinilor-unelte şi preselor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965, p. 178—191.
11. W. Schaller, *Ölströmung in Drosselstellen von Werkzeugmaschinen*, Dissertation T. H. Stuttgart, 1953, p. 105.
12. W. Wüest, *Strömung durch Schlitz- und Lochblenden bei kleinen Reynoldszahlen*, Ingenieur — Archiv, **22**, *6*, 375—367 (1954).
13. I. Z. Zaicenko, şi N. V. Vasiliev, *Issledovanie i rasciot novih konstrucţii drosselei*, Stanki i instrument, *7*, 10—13 (1960).
14. J. Zick, *Untersuchungen an Regelblenden sehr kleiner Öffnung (I)*, Ölhydraulik und Pneumatik, **10**, *5*, 168—171 (I) (1966), **10**, *9*, 335—342 (II) (1966).

ASUPRA UNOR SOLUȚII EXACTE PRIVIND INTRAREA PORTANTĂ OPTIMĂ A VEHICULELOR SPAȚIALE ÎN ATMOSFERA PLANETARĂ

de AL. MARINESCU și D. DUMITRESCU
Institutul de mecanică a fluidelor și construcții aerospațiale

În lucrare se studiază problema intrării optime în timp minim a unui vehicul spațial în atmosfera planetară, pe o traectorie plană.
Problema variațională a fost formulată ca o problemă izoperimetrică cu o extremitate mobilă, legile optime de variație a parametrilor mișcării vehiculului fiind obținute exact printr-un procedeu de integrare numerică, spre deosebire de legile optime aproximative obținute analitic în [2] prin neglijarea unor termeni din ecuația extremalei.

NOTAȚII

z — altitudinea,
x — distanța pe orizontală,
P — portanța $= \frac{\rho}{2} SV^2 C_z$,
R — rezistența la înaintare $= \frac{\rho}{2} S V^2 C_x$,
ρ — densitatea,
S — suprafață de referință,
V — viteza vehiculului,
C_z — coeficientul de portanță,
C_x — coeficientul de rezistență la înaintare,
θ — unghiul de înclinare al traiectoriei față de orizontala locală,
β — constanta de definire a densității funcție de altitudine,
g — accelerația gravitației,
m — masa vechiculului.

Optimizarea intrării vehiculelor spațiale în atmosfera planetară sub toate aspectele ei este actualmente în centrul atenției cercetării.

O problemă de importanță practică deosebită o constituie aceea a intrării în timp minim de care se ocupă prezenta lucrare considerînd traiectoria plană și variația exponențială a densității. Pe calea stabilită în [1] problema intrării în timp minim a fost tratată aproximativ, în lucrarea [2] unde din ecuația la care satisface viteza optimă au fost neglijați unii termeni.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 5, 1974, P. 829—838

În lucrarea de faţă problema este tratată riguros, ţinîndu-se seama de toţi termenii ecuaţiei diferenţiale la care satisface viteza optimă.

Cu legea de variaţie a vitezei astfel găsită s-a putut determina exact variaţia unghiului de înclinare a traiectoriei faţă de orizontală, prin aceasta obţinîndu-se posibilitatea de calcul a traiectoriei optime însăşi.

Pentru determinarea legilor optime de variaţie a parametrilor mişcării astfel încît un vehicul portant să parcurgă traiectoria de coborîre între două înălţimi z_i, z_f în cel mai scurt timp, distanţa $x=l$ pe orizontală fiind dată, vom considera mai întîi ecuaţiile care guvernează mişcarea (ecuaţiile de mişcare propriu-zise la care se asociază ecuaţiile cinematice).

Considerînd cazul intrării la unghiuri mici şi medii şi portanţă diferită de zero, cu unghiul θ presupus pozitiv la coborîre şi negativ la urcare, ecuţiile care guvernează mişcarea sînt [2]*h*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -\frac{SC_x}{2m}\,\rho V^2, \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -\frac{SC_z}{2m}\,\rho\, V, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -V\sin\theta, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= V\cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Din a treia ecuaţie (1) avem

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}z}{V\sin\theta}, \tag{2}$$

iar din a treia şi a patra

$$\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg}\theta\,\mathrm{d}z. \tag{3}$$

Timpul în care vehiculul parcurge traiectoria de coborîre între înălţimile z_i, z_f este, ţinînd seama de $c(2)$,

$$t = -\int_{z_i}^{z_f} \frac{\mathrm{d}z}{V\sin\theta}, \tag{4}$$

iar distanţa parcursă pe orizontală

$$x = -\int_{z_i}^{z_f} \operatorname{ctg}\theta\,\mathrm{d}z, \tag{5}$$

În lucrarea [2] se arată că introducînd variabila z primele două ecuații (1) capătă forma

$$\frac{dV}{dz} = \frac{SC_x}{2m} \frac{\rho V}{\sin\theta},$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{SC_z}{2m} \frac{\rho}{\sin\theta}, \tag{6}$$

astfel că din prima, notînd $\frac{SC_x}{2m} = a$ și $\frac{dV}{dz} = V'$, avem

$$\sin\theta = a\frac{\rho V}{V'}, \tag{7}$$

cu care funcționala al cărui minim îl căutăm devine

$$t = \frac{1}{a}\int_{z_f}^{z_i} \frac{V'}{\rho V^2}\, dz, \tag{8}$$

iar distanța pe orizontală exprimînd ctg θ funcție de sin θ și dezvoltînd în serie,

$$x = \int_{z_f}^{z_i}\left(\frac{1}{a\frac{\rho V}{V'}} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'}\right) dz. \tag{9}$$

Problema variațională care se pune este de a determina minimul integralei (8) cu condiția

$$x = \int_{z_f}^{z_i}\left(\frac{1}{a\frac{\rho V}{V'}} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'}\right) dz = l. \tag{10}$$

În lucrarea [2] s-a arătat că problema variațională astfel formulată este o problemă izoperimetrică cu o extremitate mobilă, curba care realizează extremumul integralei (9) fiind o extremală a funcționalei

$$J = \int_{z_f}^{z_i} H\, dz, \tag{11}$$

unde notînd cu λ o constantă

$$H = \frac{1}{a}\frac{V'}{\rho V^2} + \lambda\left(\frac{1}{a}\frac{V'}{\rho V} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'}\right). \tag{12}$$

Deoarece extremala trebuie să verifice ecuaţia lui Euler, ţinînd seama de expresia (12) a funcţiei H, în lucrarea [2] s-a arătat că ecuaţia lui Euler conduce la ecuaţia diferenţială

$$V'' - \frac{\rho'}{2\rho} V' - \frac{V'^2}{V} + V'^3 \left(\frac{\rho'}{a^2 \rho^3 V^2} + \frac{\rho'}{\lambda a^2 \rho^3 V^3} \right) = 0. \tag{13}$$

Adoptînd legea exponenţială de variaţie a densităţii cu înălţimea,

$$\rho = \rho_0 \, e^{-\beta z}, \tag{14}$$

ecuaţia (13) devine

$$V'' + \frac{\beta}{2} V' - \frac{V'^2}{V} - \frac{\beta V'^3}{a^2 \rho^2 V^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda V} \right) = 0. \tag{15}$$

Înainte de a trece la integrarea exactă a ecuaţiei (15), pe baza celor de mai sus, vom demonstra cu ajutorul condiţiei de minimum a lui Legendre că extremala $V(z)$, soluţie a ecuaţiei susmenţionate, realizează minimul funcţionalei (11), şi în virtutea teoremei lui Lagrange această extremală realizează minimul condiţionat al funcţionalei (8).

Condiţia necesară de minimum a lui Legendre cere ca de-a lungul extremalei să fie satisfăcută inegalitatea

$$\frac{V'^2}{\partial^2 H} \geqslant 0. \tag{16}$$

Ţinînd seama de expresia (12) a lui H, avem

$$\frac{\partial^2 H}{\partial V'^2} = - \frac{\lambda a \rho V}{V'^3}. \tag{17}$$

Condiţia de transversalitate la extremitatea mobilă,

$$\left[\frac{\partial H}{\partial V'} \right]_{z=z_f} = 0, \tag{18}$$

devine, ţinînd seama de (12),

$$\left[1 + \lambda V \left(1 + \frac{a^2 \rho^2 V^2}{2 V'^2} \right) \right]_{z=z_f} = 0. \tag{19}$$

Deoarece

$$\left[\frac{a^2 \rho^2 V^2}{2 V'^2} \right]_{z=z_f} \ll 1, \tag{20}$$

se obține

$$\lambda \approx -\frac{1}{V(z_f)}. \tag{21}$$

Înlocuind în (17), deoarece viteza este descrescătoare și deci $V' > 0$, rezultă

$$\frac{\partial^2 H}{\partial V'^2} = \frac{a\rho V}{V(z_f)V'^3} > 0, \tag{22}$$

ceea ce demonstrează că condiția lui Legendre este satisfăcută.

Pentru integrarea exactă a ecuației (15) este necesară mai întîi determinarea constantei λ.

Se ia arbitrar λ și se transformă ecuația (22) în sistemul

$$\frac{dV}{dz} = u, \tag{15 bis}$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\beta}{2}u + \frac{u^2}{V} + \frac{\beta u^3}{a^2\rho^2 V^2}\left(1 + \frac{1}{\lambda V}\right),$$

care poate fi rezolvat numeric printr-un procedeu de iterație astfel ca condițiile $V(z_i) = V_i$ și $V(z_f) = -\frac{1}{\lambda}$ să fie satisfăcute.

Din ecuația (9) se deduce apoi valoarea lui x care corespunde valorii lui λ, și se trasează diagrama care dă x funcție de λ, astfel că pentru fiecare valoare dată dinainte a lui x se poate deduce valoarea corespunzătoare a lui λ. Pentru a evita operațiuni costisitoare și deci pentru a reduce numărul de iterații în rezolvarea sistemului (15 bis) și a avea deci foarte rapid pe λ corespunzător unei valori date a lui x, se poate aplica procedeul următor care s-a dovedit foarte util.

În partea finală a evoluției, cînd $z \to z_f$ și deci $V \to V(z_f)$, termenul

$$\left(1 + \frac{1}{\lambda V}\right) \to 0,$$

și ecuația diferențială (15) devine

$$V'' + \frac{\beta}{2}V' - \frac{V'^2}{V} = 0. \tag{23}$$

Cu substituția

$$V = e^{\int u dz}, \tag{24}$$

ecuaţia (23) devine

$$u' + \frac{\beta}{2} u = 0, \tag{25}$$

a cărei soluţie este

$$u = C_1 \, e^{-\frac{\beta}{2} z}. \tag{26}$$

Cu aceasta, ţinînd seama de (24), se obţine soluţia finală

$$V = C_2 \, e^{-\frac{2C_1}{\beta} e^{-\frac{\beta}{2} z}}. \tag{27}$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţia ca la $z = z_i$, $V = V_i$ şi în plus din condiţia izoperimetrică (10).

Din prima condiţie, notînd $\frac{2C_1}{\beta} = k$, rezultă

$$V = V_i e^{k\left(e^{-\frac{\beta}{2} z_i} - e^{-\frac{\beta}{2} z}\right)}. \tag{28}$$

Se remarcă mai sus că pentru ca viteza să scadă cu scăderea înălţimii este necesar să avem $k > 0$.

Ţinînd seama de expresia (28) a vitezei, de derivata sa şi de expresia exponenţială (14) a densităţii, avem

$$\frac{\rho V}{V'} = \frac{2a\rho_0}{\beta k} e^{-\frac{\beta}{2} z}. \tag{29}$$

Înlocuind expresia (29) în condiţia (10) şi efectuînd calculele se ajunge la ecuaţia algebrică

$$bk^2 - lk + c = 0, \tag{30}$$

unde

$$b = \frac{e^{\frac{\beta}{2} z_i} - e^{\frac{\beta}{2} z_f}}{a\rho_0},$$

$$c = \frac{2a\rho_0 (e^{-\frac{\beta}{2} z_i} - e^{-\frac{\beta}{2} z_f})}{\beta^2}.$$

Soluţia care are sens fizic a ecuaţiei (30) este

$$k = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4bc}}{2b}, \tag{31}$$

unde se poate remarca faptul că pe măsură ce parcursul pe orizontală l creşte, k creşte de asemenea, şi scăderea de viteză pe un interval de înălţime z_i, z_f dat, devine mai mare, aşa cum fizic este corect.

Determinînd astfel pe k, cu alte cuvinte pe legea de variaţie a vitezei, în partea finală a evoluţiei este definită, şi din (21) rezultă λ.

Calculele numerice au arătat că valoarea lui λ astfel determinată este foarte apropiată de cea exactă astfel că în integrarea numerică a sistemului (15 bis) a doua iterație este suficientă.

Cu legea optimă de variație a vitezei dedusă după cele de mai sus, vom căuta să determinăm legea optimă de variație a unghiului θ.

Este știut că pentru vehiculele de configurație cunoscută, raportul $\frac{C_z}{C_x}$ variază în limite bine precizate, și în această idee vom proceda așa cum se va arăta mai jos. Împărțim ecuațiile (6) și obținem

$$d\theta = \frac{C_z}{C_x} \frac{dV}{V}. \tag{32}$$

Integrînd, cu condițiile $\theta = \theta_i$, $V = V_i$, rezultă

$$\theta = \frac{C_z}{C_x} \ln \frac{V}{V_i} + \theta_i. \tag{33}$$

Deoarece prin definiție $\theta > 0$ și pe parcursul intrării el trebuie să crească, se vede că este necesar ca $\frac{C_z}{C_x} < 0$ și deci intrarea se face la portanță negativă.

Pentru determinarea valorii optime a raportului pe arcul de traiectorie respectiv, se folosește condiția izoperimetrică

$$\int_{z_f}^{z_i} \operatorname{ctg} \theta \, dz = l,$$

care trebuie satisfăcută identic de unghiul θ dat de (33). Înlocuind θ dat de (33) se obține ecuația care dă raportul $\frac{C_z}{C_x}$ de forma

$$\int_{z_i}^{z_i} \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{C_z}{C_x} \ln \frac{V}{V_i} \operatorname{tg} \theta_i}{\operatorname{tg} \frac{C_z}{C_x} \ln \frac{V}{V_i} + \operatorname{tg} \theta_i} dz = l, \tag{34}$$

care se soluționează numeric.

Calculele numerice au arătat cu prisosință că pentru valori ale raportului $\frac{C_z}{C_x}$ care se încadrează în gama valorilor practic admise, variația unghiului θ dată de (33) face ca arcul de traiectorie să treacă la $z = z_f$ prin $x = l$. În acest fel legea de variație a lui θ dată de (33) coincide cu cea optimală. În ceea ce privește calculul arcului de traiectorie optimă, avînd unghiul θ dat de (33), el se calculează numeric cu ajutorul ecuației

$$\frac{dx}{dz} = - \operatorname{ctg} \theta$$

prin metoda Runge-Kutta.

APLICAȚIE NUMERICĂ

Cu următoarele date

$z_i = 110.000$ m,
$z_f = 40.000$ m,
$l = 700.000$ m,
$\rho_0 = 0{,}125$ kgs^2/m^4,
$\beta = 1{,}395.10^{-4}$ m^{-1},
$V_i = 7.800$ m/s,
$\theta_i = 1{,}5°$,

s-a integrat numeric prin metoda Runge-Kutta sistemul (15 bis) avînd ca valori inițiale

$$V(z_i) = V_i,$$

$$u(z_i) = u_i = a\frac{\rho_i V_i}{\sin\theta_i}.$$

Valorile vitezei pentru intrarea optimă în timp minim astfel calculate pentru mai multe valori ale parametrului $a = \frac{SC_x}{2m}$ sînt date în graficul din figura 1.

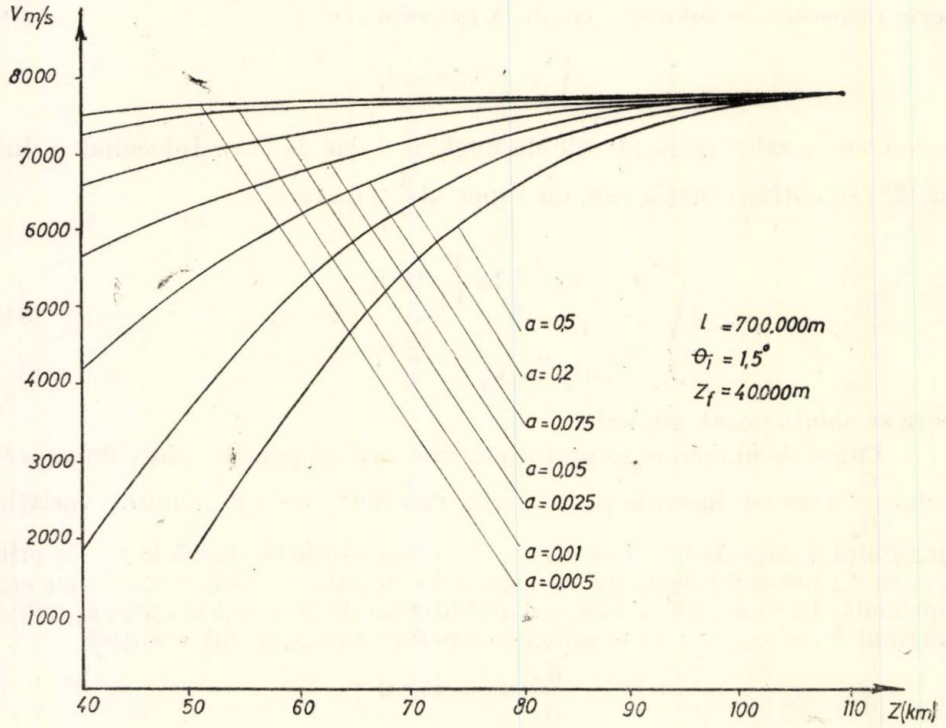


Fig. 1

Valorile optime ale raportului $\frac{C_z}{C_x}$ au fost determinate din ecuația (34) astfel ca arcele de traectorie optimă să treacă prin $x = l$ la $z = z_f$.

Avînd astfel valorile optime ale raportului $\frac{C_z}{C_x}$ cu relația (33) s-au calculat mai multe valori ale parametrului a valorile unghiului θ înscrie în graficul din figura 2.

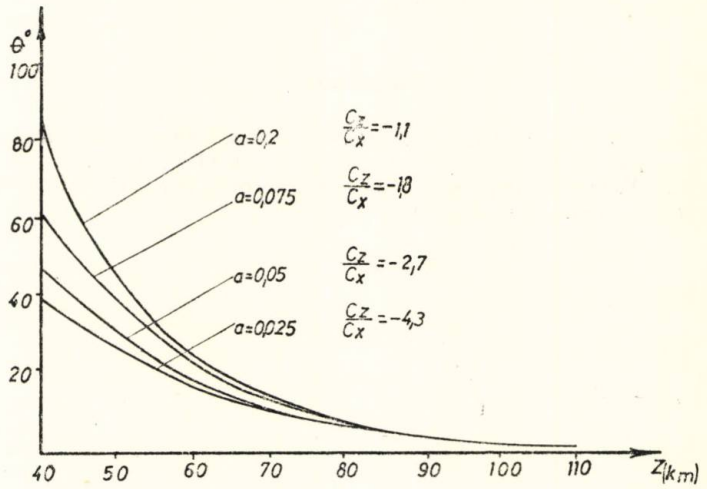


Fig. 2

Pentru a ilustra și forma arcelor de traiectorie optimă s-au calculat numeric pentru aceleași valori ale parametrului a arcelor de traiectorie optimă reprezentate în graficul din figura 3.

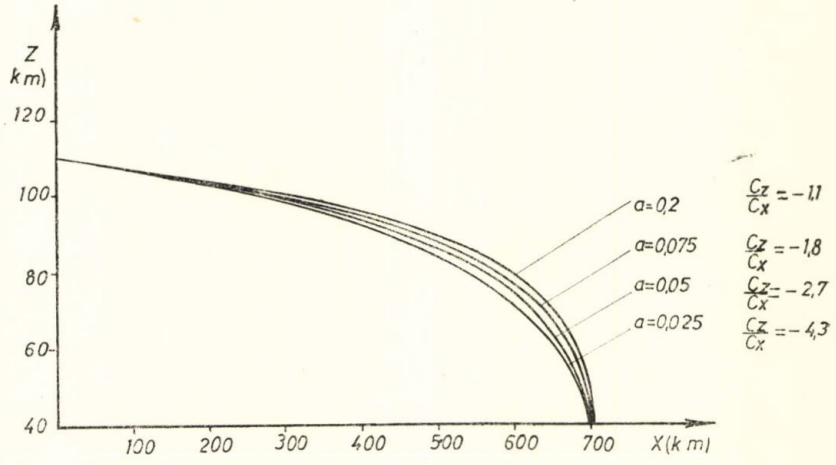


Fig. 3

Din calculele efectuate se poate remarca faptul că viteza optimă prezintă o variație descrescătoare cu scăderea altitudinii cu atît mai pronunțată cu cît parametrul a este mai mare.

În ceea ce privește unghiul θ acesta crește cu scăderea atitudinii creșterea fiind cu atît mai pronunțată cu cît parametrul a este mai mare.

Pentru valori obținute ale parametrului a arcele de traiectorie au o alură monetară așa cum se poate remarca din figura 3.

Primit la redacție la 20 *februarie* 1973

BIBLIOGRAFIE

1. AL. MARINESCU, *Sur l'optimisation de l'entrée des engins spatiaux dans l'atmosphère planetaire*, Rendiconti. Acad. Naz. dei Lincei, Roma **LI**, *5*, (1971).
2. AL. MARINESCU, V. Cardoș, *Intrarea în timp minim a vehiculelor spațiale în atmosfera planetară*, St. și cerc. mec. apl., **31**, *2*, (1972).

VIBRAŢIILE LATERALE DE ÎNCOVOIERE-RĂSUCIRE ALE GRINZII PENDUL

(partea a II-a)

de TOMA PANĂ
Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se stabileşte soluţia sistemului de ecuaţii neliniare care guvernează mişcarea vibratorie de încovoiere-răsucire a grinzii, produsă de oscilaţiile pendulare laterale ale acesteia, şi se studiază stabilitatea ei pentru regimurile situate în apropierea primei rezonanţe. Se ajunge la concluzia că mişcarea poate avea stabilitate orbitală numai dacă amplitudinea vibraţiei transversale de încovoiere nu depăşeşte o anumită valoare, proporţională cu energia totală a mişcării.

În prima parte a lucrării s-a arătat că în timpul oscilaţiei pendulare laterale deplasările η, ξ şi φ, ale unei secţiuni oarecare a grinzii, (fig. 1), sînt proporţionate cu funcţiile adimensionale $\bar{u}(\bar{t})$, $\bar{v}(\bar{t})$ şi $\bar{w}(\bar{t})$ care, pentru

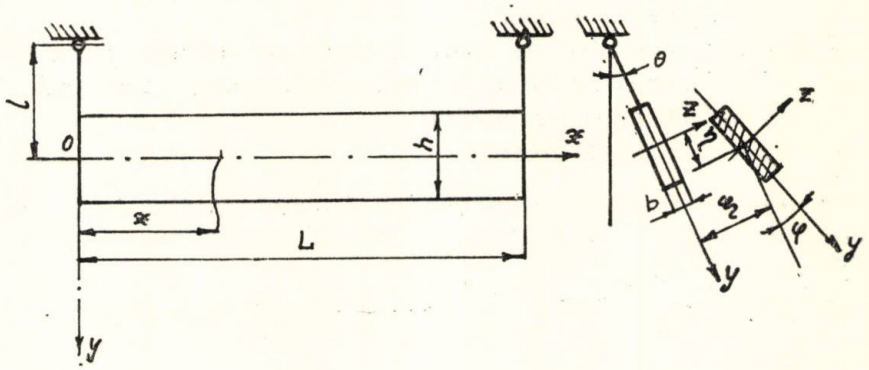


Fig. 1

primul mod de vibraţie, sînt legate de elongaţia adimensională $\bar{\theta}(\bar{t})$ a pendulului prin intermediul următorului sistem de ecuaţii diferenţiale [1]:

$$\bar{u}'' + \beta_y^2 \bar{u} = 2(\bar{\theta}')^2 + \frac{\pi}{2}(2\bar{v}'\bar{\theta}' + \bar{v}\bar{\theta}''),$$

$$\bar{v}'' + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}'' + \beta_z^2 \bar{v} = -\pi\,\bar{u}'\bar{\theta}' - \frac{\pi}{2}\,\bar{u}\,\bar{\theta}'',$$

$$\bar{w}'' + \frac{4}{\pi}\,\bar{\theta}'' + \beta_x^2\,\bar{w} = 0, \tag{1}$$

$$\bar{v}'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}'' + \frac{\pi}{2}\,\bar{\theta} = \frac{\pi^2}{8}\,\bar{u}''\bar{v} - \frac{\pi^2}{8}\bar{u}\bar{v}'' - \pi(\bar{\theta}''\bar{u} + \bar{\theta}'\bar{u}'),$$

În aceste ecuaţii, accentele simbolizează derivata în raport cu timpul adimensional $\bar{t} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t$, iar expresiile

$$\beta_x^2 = \frac{\pi^2\, l\, GId}{Jg\, L^2}, \qquad \beta_y^2 = \frac{\pi^4\, l\, EIz}{mg\, L^4}, \qquad \beta_z^2 = \frac{\pi^4\, l\, EIy}{mg\, L^4} \tag{2}$$

reprezintă rapoartele dintre pulsaţiile vibraţiilor proprii de răsucire şi de încovoiere ale barei şi pulsaţia oscilaţiei pendulare a acesteia, în scrierea cărora au fost utilizate notaţiile:

E şi G — modulul de elasticitate longitudinal şi transversal al materialului din care este confecţionată grinda,
g — acceleraţia gravitaţiei,
m şi J — masa şi momentul de inerţie mecanic al unităţii de lungime de grindă,
I_y şi I_z — momentele de inerţie axiale ale secţiunii transversale,
I_d — momentul de inerţie redus al secţiunii transversale,
l — lungimea tendonului,
L — lungimea grinzii.

Se precizează că spre deosebire de sistemul (7) din prima parte a lucrării, ultima ecuaţie a sistemului (1) nu conţine termenii de gradul al treilea.

Anterior s-a arătat că sistemul (1) admite soluţii de forma:

$$\bar{u} = \epsilon A \cos(\beta_y \bar{t} - \psi) + \epsilon^2 \bar{u}_2 + \epsilon^3 \bar{u}_3 + \ldots,$$

$$\bar{v} = \epsilon B \cos(r\bar{t} - \Phi) + \epsilon^2 \bar{v}_2 + \epsilon^3 \bar{v}_3 + \ldots, \tag{3}$$

$$\bar{w} = \epsilon C \cos(r\bar{t} - \Phi) + \epsilon^2 \bar{w}_2 + \epsilon^3 \bar{w}_3 + \ldots,$$

$$\bar{\theta} = \epsilon D \cos(r\bar{t} - \Phi) + \epsilon_2 \bar{\theta}^2 + \epsilon^3 \bar{\theta}_3 + \ldots,$$

în care A, B, C, D, Φ, și ψ sînt constante, iar r se obține din ecuația

$$\begin{vmatrix} r^2-\beta_z^2 & 0 & \frac{4}{\pi}r^2 \\ 0 & r^2-\beta_x^2 & \frac{4}{\pi}r^2 \\ r^2 & \frac{J}{ml^2}r^2 & \frac{\pi}{2}\left[\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)r^2-1\right] \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Înlocuind soluția (3) în ecuațiile (1) și reținînd numai termenii în ε^2 rezultă sistemul:

$$\bar{u}_2''+\beta_y^2\bar{u}_2 = Dr^2(2D+\pi B)\sin^2(r\bar{t}-\Phi)-\frac{\pi}{2}BDr^2\cos^2(r\bar{t}-\Phi),$$

$$\bar{v}_2''+\frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2''+\beta_z^2\bar{v}_2 = -\pi ADr\beta_y\sin(\beta_y\bar{t}-\psi)\sin(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\frac{\pi}{2}ADr^2\cos(\beta_y\bar{t}-\psi)\cos(r\bar{t}-\Phi),$$

$$\bar{w}_2''+\frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2''+\beta_x^2\bar{w}_2 = 0, \quad (5)$$

$$\bar{v}_2''+\frac{J}{ml^2}\bar{w}_2''+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_2''+\frac{\pi}{2}\bar{\theta}_2 =$$

$$=\left[\frac{\pi^2}{8}AB(r^2-\beta_y^2)+\pi ADr^2\right]\cos(\beta_y\bar{t}-\psi)\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$-\pi ADr\beta_y\sin(\beta_y\bar{t}-\psi)\sin(r\bar{t}-\Phi),$$

a cărui soluție este:

$$\bar{u}_2 = \frac{r^2}{2\beta_y^2}\left(2D^2+\frac{\pi}{2}DB\right)+$$

$$+\frac{r^2}{2(4r^2-\beta_y^2)}\left(2D^2+\frac{3\pi}{2}DB\right)\cos 2(r\bar{t}-\Phi),$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\cos[(\beta_y-r)\bar{t}-\psi+\Phi]+\frac{\delta_1}{\delta}\cos[(\beta_y+r)\bar{t}-\psi-\Phi], \quad (6)$$

$$\bar{w}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}\cos[(\beta_y-r)\bar{t}-\psi+\Phi]+\frac{\delta_2}{\delta}\cos[(\beta_y+r)\bar{t}-\psi-\Phi],$$

$$\theta_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta}\cos[(\beta_y-r)\bar{t}-\psi+\Phi]+\frac{\delta_3}{\delta}\cos[(\beta_y+r)\bar{t}-\psi-\Phi),$$

în care

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\beta_y - r)^2 - \beta_z^2 & 0 & \frac{4}{\pi}(\beta_y - r)^2 \\ 0 & (\beta_y - r)^2 - \beta_x^2 & \frac{4}{\pi}(\beta_y - r)^2 \\ (\beta_y - r)^2 & \frac{J}{ml^2}(\beta_y - r)^2 & \frac{\pi}{2}\left[\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)(\beta_y - r)^2 - 1\right] \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\pi}{4} ADr(r - 2\beta_y) & 0 & \frac{4}{\pi}(\beta_y - r)^2 \\ 0 & (\beta_y - r)^2 - \beta_x^2 & \frac{4}{\pi}(\beta_y - r)^2 \\ -\frac{\pi}{2} A(r - \beta_y)\left[\frac{\pi}{8} B(r + \beta_y) + Dr\right] & \frac{J}{ml^2}(\beta_y - r)^2 & \frac{\pi}{2}\left[\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)(\beta_y - r)^2 - 1\right] \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (\beta_y - r)^2 - \beta_z^2 & -\frac{\pi}{4} ADr(r - 2\beta_y) & \frac{4}{\pi}(\beta_y - r)^2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\pi}(\beta_y - r)^2 \\ (\beta_y - r)^2 & -\frac{\pi}{2} A(r - \beta_y)\left[\frac{\pi}{8} B(r + \beta_y) + Dr\right] & \frac{\pi}{2}\left[\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)(\beta_y - r)^2 - 1\right] \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (\beta_y - r)^2 - \beta_z^2 & 0 & -\frac{\pi}{4} ADr(r - 2\beta_y) \\ 0 & (\beta_y - r)^2 - \beta_x^2 & 0 \\ (\beta_y - r)^2 & \frac{J}{ml^2}(\beta_y - r)^2 & -\frac{\pi}{2} A(r - \beta_y)\left[\frac{\pi}{8} B(r + \beta_y) + Dr\right] \end{vmatrix},$$

şi

$$\delta = \begin{vmatrix} (\beta_y + r)^2 - \beta_z^2 & 0 & \frac{4}{\pi}(\beta_y + r)^2 \\ 0 & (\beta_y + r)^2 - \beta_x^2 & \frac{4}{\pi}(\beta_y + r)^2 \\ (\beta_y + r)^2 & \frac{J}{ml^2}(\beta_y + r)^2 & \frac{\pi}{2}\left[\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)(\beta_y + r)^2 - 1\right] \end{vmatrix},$$

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\pi}{4} ADr(r+2\beta_y) & 0 & \frac{4}{\pi}(\beta_y+r)^2 \\ 0 & (\beta_y+r)^2-\beta_x^2 & \frac{4}{\pi}(\beta_y+r)^2 \\ -\frac{\pi}{2}A(r+\beta_y)\left[\frac{\pi}{8}B(r-\beta_y)+Dr\right] & \frac{J}{ml^2}(\beta_y+r)^2 & \frac{\pi}{2}\left[\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)(\beta_y+r)^2-1\right] \end{vmatrix},$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} (\beta_y+r)^2-\beta_z^2 & -\frac{\pi}{4} ADr(r+2\beta_y) & \frac{4}{\pi}(\beta_y+r)^2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\pi}(\beta_y+r)^2 \\ (\beta_y+r)^2 & -\frac{\pi}{2}A(r+\beta_y)\left[\frac{\pi}{8}B(r-\beta_y)+Dr\right] & \frac{\pi}{2}\left[\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)(\beta_y+r)^2-1\right] \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} (\beta_y+r)^2-\beta_z^2 & 0 & -\frac{\pi}{4} ADr(r+2\beta_y) \\ 0 & (\beta_y+r)^2-\beta_x^2 & 0 \\ (\beta_y+r)^2 & \frac{J}{ml^2}(\beta_y+r)^2 & -\frac{\pi}{2}A(r+\beta_y)\left[\frac{\pi}{8}B(r-\beta_y)+Dr\right] \end{vmatrix},$$

Se observă că pentru $\beta_y = 2r$ atît paranteza $(4r^2 - \beta_y^2)$, cît și determinantul Δ se anulează, și ca urmare componentele soluției (6) devin infinite, deci are loc rezonanța.

SOLUȚIA SISTEMULUI PENTRU REGIMUL DE REZONANȚĂ

În condițiile unui regim de vibrație nestaționar, amplitudinile A, B, C, D și diferențele de fază Φ și ψ din soluția (3) nu mai rămîn constante în timp. Aceste cantități reprezintă parametrii variaționali ce descriu modificările de lungă perioadă ale formei de undă a principalelor armonice ale soluției, în timp ce cantitățile $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ etc., arată corectările suplimentare ce depind de armonicile superioare ale soluției. Astfel, înlocuind soluția (3) în sistemul (1) rezultă următoarele ecuații:

$$[A'' + 2A\beta_y\psi' - A(\psi')^2]\cos(\beta_y\bar{t} - \psi) - [2A'(\beta_y - \psi') - A\psi'']\sin(\beta_y\bar{t} - \psi) +$$

$$+\epsilon(\bar{u}_2'' + \beta_y^2\bar{u}_2) + \epsilon^2(\bar{u}_3'' + \beta_y^2\bar{u}_3) =$$

$$= \epsilon\left\{2(D')^2 + \pi B'D' + \frac{\pi}{2}[D'' - D(r-\Phi')^2]B\right\}\cos^2(r\bar{t} - \Phi) +$$

$$+\epsilon(2D^2+\pi DB)(r-\Phi')^2\sin^2(r\bar{t}-\Phi)-\epsilon\left\{(4DD'+\pi B'D+\pi BD')(r-\Phi')+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']B\right\}\sin(r\bar{t}-\Phi)\cos(r\bar{t}-\Phi)+\epsilon^2\left\{(4D'+\pi B')\bar{\theta}_2'+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}B\bar{\theta}_2''+\pi D'\bar{v}_2'+\frac{\pi}{2}D''-D(r-\Phi')^2]\bar{v}_2\right\}\cos(r\bar{t}-\Phi)-\epsilon^2\left\{(4D+\pi B)\bar{\theta}_2'(r-\varphi')+\right.$$

$$\left.+\pi D(r-\Phi')\bar{v}_2'+\frac{\pi}{2}[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']\bar{v}_2\right\}\sin(r\bar{t}-\Phi), \tag{9a}$$

$$\left\{[B''+2Br\Phi'-B(\Phi')^2]+\frac{4}{\pi}[D''+2Dr\Phi'-D(\Phi')^2]\right\}\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$-\left\{[2B'(r-\Phi')-B\Phi'']+\frac{4}{\pi}[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']\right\}\sin(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\epsilon\left(\bar{v}_2''+\frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2''+\beta_z^2\bar{v}_2\right)+\epsilon^2\left(\bar{v}_3''+\frac{4}{\pi}\bar{\theta}_3''+\beta_z^2\bar{v}_3\right)=$$

$$-\epsilon\pi\left\{A'D'+\frac{A}{2}[D''-D(r-\Phi')^2]\right\}\cos(\beta_y\bar{t}-\psi)\cos(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\epsilon\pi\left\{A'D(r-\Phi')+\frac{A}{2}[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']\right\}\cos(\beta_y\bar{t}-\psi)\sin(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\epsilon\pi AD'(\beta_y-\psi')\sin(\beta_y\bar{t}-\psi)\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$-\epsilon\pi AD(\beta_y-\psi')(r-\Phi')\sin(\beta_y\bar{t}-\psi)\sin(r\bar{t}-\Phi)- \tag{9b}$$

$$-\epsilon^2\pi\left[A'\bar{\theta}_2'+\frac{1}{2}A\bar{\theta}_2''\right]\cos(\beta_y\bar{t}-\psi)+\epsilon^2\pi A(\beta_y-\psi')\bar{\theta}_2'\sin(\beta_y\bar{t}-\psi)-$$

$$-\epsilon^2\pi\left\{D'\bar{u}_2'+\frac{1}{2}\bar{u}_2[D''-D(r-\Phi')^2]\right\}\cos(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\epsilon^2\pi\left\{D(r-\Phi')\bar{u}_2'+\frac{1}{2}\bar{u}_2[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']\right\}\sin(r\bar{t}-\Phi),$$

$$\left\{[C''+2rC\Phi'-C(\Phi')^2]+\frac{4}{\pi}[D''+2rD\Phi'-D(\Phi')^2]\right\}\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$-\left\{[2C'(r-\Phi')-C\Phi'']+\frac{4}{\pi}[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']\right\}\sin(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\epsilon\left(\bar{w}_2'' + \beta_x^2\bar{w}_2 + \frac{4}{\pi}\,\bar{\theta}_2''\right) + \epsilon^2\left(\bar{w}_3'' + \beta_x^2\bar{w}_3 + \frac{4}{\pi}\,\bar{\theta}_3''\right) = 0, \tag{9 c}$$

$$\left\{[B'' + 2rB\Phi' - B(\Phi')^2] + \frac{J}{ml^2}\,[C'' + 2rC\Phi' - C(\Phi')^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)[D'' + 2rD\Phi' - D(\Phi')^2]\right\} \cos\,(r\bar{t} - \Phi) -$$

$$-\left\{[2B'(r - \Phi') - B\Phi''] + \frac{J}{ml^2}\,[2C'(r - \Phi') - C\Phi''] + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,[2D'(r - \Phi') - D\Phi'']\right\} \sin\,(r\bar{t} - \Phi) +$$

$$+\epsilon\left[\bar{v}_2'' + \frac{J}{ml^2}\,\bar{w}_2'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_2'' + \frac{\pi}{2}\,\bar{\theta}_2\right] +$$

$$+\epsilon^2\left[\bar{v}_3'' + \frac{J}{ml^2}\,\bar{w}_3'' + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_3'' + \frac{\pi}{2}\,\bar{\theta}_3\right] =$$

$$= \epsilon\pi\left\{\frac{\pi}{8}\,B[A'' - A(\beta_y - \psi')^2] - \frac{\pi}{8}\,A[B'' - B(r - \Phi')^2] - \right.$$

$$\left. - A[D'' - D(r - \Phi')^2] - A'D'\right\} \cos\,(\beta_y\bar{t} - \psi)\cos\,(r\bar{t} - \Phi) -$$

$$-\epsilon\pi\left\{\frac{\pi}{8}\,B[2A'(\beta_y - \psi'] - A\psi''] - AD'(\beta_y - \psi')\right\} \sin\,(\beta_y\bar{t} - \psi)\cos\,(r\bar{t} - \Phi) +$$

$$+\epsilon\pi\left\{\frac{\pi}{8}\,A[2\,B'(r - \Phi') - B\Phi''] + A[2D'(r - \Phi') - D\Phi''] + \right. \tag{9 d}$$

$$\left. + A'D(r - \Phi')\right\} \cos\,(\beta_y\bar{t} - \psi)\sin\,(r\bar{t} - \Phi) - \epsilon\pi AD(\beta_y - \psi')(r - \Phi')\times$$

$$\times \sin\,(\beta_y\bar{t} - \psi)\sin\,(r\bar{t} - \Phi) + \epsilon^2\pi\left\{\frac{\pi}{8}\,[A'' - A(\beta_y - \psi')^2]\bar{v}_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{8}\,A\bar{v}_2'' - A'\bar{\theta}_2' - A\bar{\theta}_2''\right\} \times \cos\,(\beta_y\bar{t} - \psi) - \epsilon^2\pi\left\{\frac{\pi}{8}\,[2\,A'(\beta_y - \psi') - \right.$$

$$\left. - A\psi'']\bar{v}_2 - A\bar{\theta}_2'(\beta_y - \psi')\right\} \sin\,(\beta_y\bar{t} - \psi) - \epsilon^2\pi\left\{\frac{\pi}{8}\,[B'' - B(r - \right.$$

$$\left. - \Phi')^2]\bar{u}_2 - \frac{\pi}{8}\,B\bar{u}_2'' + [D'' - D(r - \Phi')^2]\bar{u}_2 + D'\bar{u}_2'\right\} \cos\,(r\bar{t} - \Phi) +$$

$$+\epsilon^2\pi\left\{\frac{\pi}{8}\,[2\,B'(r - \Phi') - B\Phi'']\bar{u}_2 + [2\,D'(r - \Phi') - D\Phi'']\bar{u}_2 + \right.$$

$$\left. + D\bar{u}_2'(r - \Phi')\right\} \sin\,(r\bar{t} - \Phi).$$

Dacă se admite că derivatele parametrilor variaţionali sînt de acelaşi ordin de mărime cu perturbaţia ϵ — care este presupusă a fi suficient de mică — atunci în ecuaţiile (9) pot fi neglijaţi termenii care conţin puterile perturbaţiei sau produsele ei cu derivatele parametrilor variaţionali. Astfel rezultă sistemul;

$$[A''+2A\beta_y\psi'-A(\psi')^2]\cos(\beta_y\bar{t}-\psi)-[2A'(\beta_y-\psi')-A\psi'']\sin(\beta_y\bar{t}-\psi)+$$

$$+\epsilon(\bar{u}_2''+\beta_y^2\bar{u}^2)=-\epsilon\frac{\pi}{2}DBr^2\cos^2(r\bar{t}-\Phi)+\epsilon(2D^2+\pi DB)r^2\sin^2(r\bar{t}-\Phi),$$

$$\left\{[B''+2rB\Phi'-B(\Phi')^2]+\frac{4}{\pi}[D''+2rD\Phi'-D(\Phi')^2]\right\}\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$-\left\{[2B'(r-\Phi')-B\Phi'']+\frac{4}{\pi}[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']\right\}\sin(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\epsilon\left(\bar{v}_2''+\frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2''+\beta_z^2\bar{v}_2\right)=\epsilon\frac{\pi}{2}ADr^2\cos(\beta_y\bar{t}-\psi)\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$-\epsilon\pi ADr\beta_y\sin(\beta_y\bar{t}-\psi)\sin(r\bar{t}-\Phi),$$

$$\left\{[C''+2rC\Phi'-C(\Phi')^2]+\frac{4}{\pi}[D''+2rD\Phi'-D(\Phi')^2]\right\}\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$-\left\{[2C'(r-\Phi')-C\Phi'']+\frac{4}{\pi}[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']\right\}\sin(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\epsilon\left(\bar{w}_2''+\beta_x^2\bar{w}_2+\frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2''\right)=0,$$

(10)

$$\left\{[B''+2rB\Phi'-B(\Phi')^2]+\frac{J}{ml^2}[C''+2rC\Phi'-C(\Phi')^2]+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)[D''+2rD\Phi'-D(\psi')^2]\right\}\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$\left\{-[2B'(r-\Phi')-B\Phi'']+\frac{J}{ml^2}[2C'(r-\Phi')-C\Phi'']+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)[2D'(r-\Phi')-D\Phi'']\right\}\sin(r\bar{t}-\Phi)+$$

$$+\epsilon\left[\bar{v}_2''+\frac{J}{ml^2}\bar{w}_2''+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_2''+\frac{\pi}{2}\bar{\theta}_2\right]=$$

$$=\epsilon\pi\left[\frac{\pi}{8}AB(r^2-\beta_y^2)+ADr^2\right]\cos(\beta_y\bar{t}-\psi)\cos(r\bar{t}-\Phi)-$$

$$-\epsilon\pi ADr\,\beta_y\sin(\beta_y\bar{t}-\psi)\sin(r\bar{t}-\Phi).$$

Introducînd schimbarea de variabilă

$$\omega = 2(r\bar{t} - \Phi) - (\beta_y \bar{t} - \psi) \tag{11}$$

și identificînd termenii în ecuațiile (10), se obțin următoarele sisteme:

$$\begin{aligned}
&[A'' + 2A\beta_y\psi' - A(\psi')^2] = -\epsilon\left(D^2 + \frac{3\pi}{2}DB\right)r^2\cos\omega,\\
&[2A'(\beta_y - \psi') - A\psi''] = -\epsilon\left(D^2 + \frac{3\pi}{2}DB\right)r^2\sin\omega,\\
&\bar{u}_2'' + \beta_y^2\bar{u}_2 = \left(D^2 + \frac{\pi}{4}DB\right)r^2;
\end{aligned} \tag{12 a}$$

$$\begin{aligned}
&[B'' + 2rB\Phi' - B(\Phi')^2] + \frac{4}{\pi}[D'' + 2rD\Phi' - D(\Phi')^2] =\\
&\qquad = \epsilon\frac{\pi}{4}ADr(r + 2\beta_y)\cos\omega,\\
&[2B'(r - \Phi') - B\Phi''] + \frac{4}{\pi}[2D'(r - \Phi') - D\Phi''] =\\
&\qquad = -\epsilon\frac{\pi}{4}ADr(r + 2\beta_y)\sin\omega,\\
&\bar{v}_2'' + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2'' + \beta_z^2\bar{v}_2 = \frac{\pi}{4}ADr(r - 2\beta_y)\cos[3(r\bar{t} - \Phi) - \omega];
\end{aligned} \tag{12 b}$$

$$\begin{aligned}
&[C'' + 2rC\Phi' - C(\Phi')^2] + \frac{4}{\pi}[D'' + 2rD\Phi' - D(\Phi')^2] = 0,\\
&[2C'(r - \Phi') - C\Phi''] + \frac{4}{\pi}[2D'(r - \Phi') - D\Phi''] = 0,\\
&\bar{w}_2'' + \frac{4}{\pi}\bar{\theta}_2'' + \beta_x^2\bar{w}_2 = 0;
\end{aligned} \tag{12 c}$$

$$\begin{aligned}
&[B'' + 2rB\Phi' - B(\Phi')^2] + \frac{J}{ml^2}[C'' + 2rC\Phi' - C(\Phi')^2] +\\
&\quad + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)[D'' + 2rD\Phi' - D(\Phi')^2] =\\
&\quad = \epsilon\frac{\pi}{2}(r + \beta_y)\left[\frac{\pi}{8}AB(r - \beta_y) + ADr\right]\cos\omega,\\
&[2B'(r - \Phi') - B\Phi''] + \frac{J}{ml^2}[2C'(r - \Phi'] +\\
&\quad + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)[2D'(r - \Phi') - D\Phi''] =
\end{aligned}$$

$$= -\epsilon\frac{\pi}{2}(r+\beta_y)\left[\frac{\pi}{8}AB(r-\beta_y)+ADr\right]\sin\omega, \qquad (12\ d)$$

$$\bar{v}_2'' + \frac{J}{ml^2}\bar{w}_2'' + \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)\bar{\theta}_2'' + \frac{\pi}{2}\bar{\theta}_2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}(r-\beta_y)\left[\frac{\pi}{8}AB(r+\beta_y)+ADr\right]\cos\left[3(rt-\Phi)-\omega\right].$$

Ecuaţiile prime ale sistemelor (12 b), (12 c) şi (12 d) alcătuiesc un sistem ce poate fi rezolvat în raport cu parantezele mari. Acelaşi lucru se poate face cu ecuţiile secunde ale sistemelor amintite. Porcedînd astfel, ecuaţiile (12) care conţin derivatele parametrilor variaţionali pot fi aduse la forma:

$$A''+2A\beta_y\psi' - A(\psi')^2 = -\epsilon(D^2+\frac{3\pi}{2}DB)\ r^2\cos\omega,$$

(13 a)

$$2A'(\beta_y-\psi') - A\psi'' = -\epsilon\,(D^2+\frac{3\pi}{2}DB)r^2\sin\omega;$$

$$B''+2rB\Phi' - B(\Phi')^2 = \epsilon\left\{ADr\left[\frac{\pi}{4}(r+2\beta_y)-qr\right]-\frac{\pi}{4}ABq(r^2-\beta_y{}^2)\right\}\cos\omega,$$

(13 b)

$$2B'(r-\Phi') - B\Phi'' = -\epsilon\left\{ADr\left[\frac{\pi}{4}(r+2\beta_y)-qr\right]-\frac{\pi}{4}ABq(r^2-\beta_y^2)\right\}\sin\omega$$

$$C''+2rC\Phi' - C(\Phi')^2 = -\epsilon q\left[\frac{\pi}{4}AB(r^2-\beta^2{}_y)+ADr^2\right]\cos\omega,$$

(13 c)

$$2C'(r-\Phi') - C\Phi'' = \epsilon q\left[\frac{\pi}{4}AB(r^2-\beta_y{}^2)+ADr^2\right]\sin\omega;$$

$$D''+2rD\Phi' - D(\Phi')^2 = \epsilon q\frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{8}AB(r^2-\beta_y{}^2)+\frac{1}{2}ADr^2\right]\cos\omega,$$

(13 d)

$$2D'(r-\Phi') - D\Phi'' = -\epsilon\frac{q\pi}{2}\left[\frac{\pi}{8}AB\,(r^2-\beta_y{}^2)+\frac{1}{2}ADr^2\right]\sin\omega,$$

unde cu q s-a notat expresia

$$q = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\right)\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)}. \qquad (14)$$

Derivatele parametrilor variaționali pot fi exprimate în funcție de timp prin intermediul variabilei ω, folosind relații de forma:

$$\begin{aligned} A' &= \epsilon A_0 \sin \omega, \\ B' &= \epsilon B_0 \sin \omega, \\ C' &= \epsilon C_0 \sin \omega, \\ D' &= \epsilon D_0 \sin \omega, \\ \Phi' &= \epsilon \Phi_0 \cos \omega, \\ \psi' &= \epsilon \psi_0 \cos \omega, \end{aligned} \tag{15}$$

în care A_0, B_0, C_0, D_0, Φ_0 și ψ_0 sînt considerate constante.

Înlocuind prima și ultima relație (15) în ecuațiile (13 a) și identificînd termenii rezultă un sistem algebric din rezolvarea căruia se obține:

$$A_0 = A\psi_0 = -\left(D^2 + \frac{3\pi}{4} DB\right) \frac{r^2}{2r + \beta_y}. \tag{16}$$

Înlocuind celelalte relații (15) în sistemele (13 b), (13 c), (13 d) și procedînd în mod similar, rezultă ecuațiile:

$$B_0(2r - \beta_y) + 2rB\Phi_0 = ADr\left[\frac{\pi}{4}(r + 2\beta_y) - qr\right] - \frac{\pi}{4} ABq(r^2 - \beta^2_y),$$

$$2B_0 r + B\Phi_0(2r - \beta_y) = -ADr\left[\frac{\pi}{4}(r + 2\beta_y) - qr\right] + \frac{\pi}{4} ABq(r^2 - \beta^2_y); \tag{17a}$$

$$C_0(2r - \beta_y) + 2rC\Phi_0 = -q\left[\frac{\pi}{4} AB(r^2 - \beta^2_y) + ADr^2\right],$$

$$2C_0 r + C\Phi_0(2r - \beta_y) = q\left[\frac{\pi}{4} AB(r^2 - \beta^2_y) + ADr^2\right]; \tag{17 b}$$

$$D_0(2r - \beta_y) + 2rD\Phi_0 = \frac{\pi}{2} q\left[\frac{\pi}{8} AB(r^2 - \beta^2_y) + \frac{1}{2} ADr^2\right],$$

$$2D_0 r + D\Phi_0(2r - \beta_y) = -\frac{\pi}{2} q\left[\frac{\pi}{8} AB(r^2 - \beta^2_y) + \frac{1}{2} ADr^2\right]. \tag{17 c}$$

Adunînd cele două ecuații ale fiecăruia din sistemele (17 a), (17 b) și (17, c) rezultă trei ecuații omogene care pot fi scrise sub forma

$$\frac{B_0}{B} = \frac{C_0}{C} = \frac{D_0}{D} = -\Phi_0. \tag{18}$$

Dacă în ecuaţiile (17) se exprimă constantele B_0, C_0 şi D_0 în funcţie de constanta Φ_0 şi de parametrii B, C, D, cu ajutorul relaţiilor (18), cele două ecuaţii ale fiecăruia din sistemele (17 a), (17 b) şi (17 c) devin identice. Astfel, rezultă următoarele ecuaţii algebrice:

$$\begin{aligned}
&\left[\beta_v + \frac{\pi}{4}\frac{A}{\Phi_0} q(r^2 - \beta^2{}_v)\right] B - \frac{A}{\Phi_0} r\left[\frac{\pi}{4}(r + 2\beta_v) - qr\right] D = 0,\\
&\left[\frac{A}{\Phi_0}\frac{\pi}{4} q\,(r^2 - \beta_v{}^2)\right] B + \beta_v\, C + \left[\frac{A}{\Phi_0} qr^2\right] D = 0,\\
&-\left[\frac{A}{\Phi_0}\frac{\pi^2}{16} q(r^2 - \beta_v{}^2)\right] B + \left[\beta_v - \frac{\pi}{4}\frac{A}{\Phi_0} qr^2\right] D = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

care alcătuiesc un sistem omogen în B, C, şi D, a cărui condiţie de compatibilitate este:

$$\begin{vmatrix}
\beta_v + \frac{\pi}{4}\frac{A}{\Phi_0} q(r^2 - \beta_v{}^2) & 0 & -\frac{A}{\Phi_0} r\left[\frac{\pi}{4}(r + 2\beta_v) - qr\right]\\
\frac{A}{\Phi_0}\frac{\pi}{4} q\,(r^2 - \beta_v^2) & \beta_v & \frac{A}{\Phi_0} qr^2\\
-\frac{A}{\Phi_0}\frac{\pi^2}{16} q(r^2 - \beta_v{}^2) & 0 & \beta_v - \frac{\pi}{4}\frac{A}{\Phi_0} qr^2
\end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Prin rezolvarea ecuaţiei (20) se obţine

$$\Phi_0 = p\ A, \tag{21}$$

unde

$$p = \frac{\pi^2 r(r + 2\beta_v)(r^2 - \beta_v{}^2)}{8\beta_v\left[-\beta_v{}^2 \pm \sqrt{\beta_v{}^4 + \frac{\pi r}{q}(r + 2\beta_v)(r^2 - \beta_v^2)}\right]} \tag{22}$$

În acest caz, din egalităţile (18) rezultă

$$B_0 = -p\,AB,\ C_0 = -p\,AC,\ D_0 = -p\,AD. \tag{23}$$

Deci, sistemul de ecuaţii diferenţiale (10) poate fi înlocuit prin sistemul variaţional:

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{d\bar{t}} &= -\epsilon\left(D + \frac{3\pi}{4} B\right)\frac{Dr^2}{2r + \beta_v}\sin\omega,\\
\frac{d\psi}{d\bar{t}} &= -\epsilon\left(D + \frac{3\pi}{4} B\right)\frac{Dr^2}{A(2r + \beta_v)}\cos\omega;
\end{aligned} \tag{24 a}$$

$$\frac{dB}{d\bar{t}} = -\epsilon pAB \sin\omega,$$

$$\frac{dC}{d\bar{t}} = -\epsilon pAC \sin\omega, \tag{24 b}$$

$$\frac{dD}{d\bar{t}} = -\epsilon pAD \sin\omega;$$

$$\frac{d\Phi}{d\bar{t}} = \epsilon pA \cos\omega. \tag{24 c}$$

Din integrarea sistemului (24 b) rezultă

$$B = k_1 D \quad \text{și} \quad C = k_2 D, \tag{25}$$

unde k_1 și k_2 sînt constante de integrare. Acestea pot fi determinate din ecuațiile (19) după ce în prealabil au fost înlocuite relațiile (25).

Se obține

$$k_1 = \frac{\pi}{4p\beta_y} r(r + 2\beta_y) - \frac{4}{\pi} \quad \text{și} \quad k_2 = -\frac{4}{\pi}. \tag{26}$$

Prima ecuație (24 a) și ultima ecuație (24 b) alcătuiesc un sistem care prin eliminarea lui sin ω se transformă într-o singură ecuație a cărei integrală este

$$A^2 - \left(1 + \frac{3\pi}{4} k_1\right) \frac{r^2}{p(2r + \beta_y)} D^2 = \mathcal{C}^2, \tag{27}$$

unde $\mathcal{C}$ este constanta de integrare.

Deoarece parametrii B, C și D pot fi examinați în funcție de parametrul A și de constanta $\mathcal{C}$, care este proporțională cu energia totală a mișcării, folosind relațiile (25, (26), și (27), ecuațiile variaționale (24 a) și (24 c) pot fi înlocuite prin sistemul autonom:

$$\frac{d\omega}{d\bar{t}} = 2r - \beta_y - \epsilon p \left(2A - \frac{\mathcal{C}^2 - A^2}{A}\right) \cos\omega, \tag{28}$$

$$\frac{dA}{d\bar{t}} = \epsilon p (\mathcal{C}^2 - A^2) \sin\omega,$$

care este complet integrabil. Prin eliminarea timpului adimensional $\bar{t}$ se obține ecuația diferențială:

$$[(2r - \beta_y)A + \epsilon p (\mathcal{C}^2 - 3A^2) \cos\omega]\, dA - \epsilon pA (\mathcal{C}^2 - A^2) \sin\omega\, d\omega = 0, \tag{29}$$

care are soluţia

$$\frac{2r - \beta_y}{2} A^2 + 2pA(\mathcal{C}^2 - A^2)\epsilon \cos \omega = c_0, \tag{30}$$

unde c_0 este constanta de integrare.

Eliminînd variabila ω între ultima ecuaţie (28) şi ecuaţia (30), rezultă

$$\mathrm{d}\bar{t} = \frac{4A\,dA}{\sqrt{[4p\epsilon A(\mathcal{C}^2 - A^2)]^2 - [2c_0 - (2r - \beta_y)A^2]^2}}. \tag{31}$$

Folosind notaţiile :

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon^2 A^2, \\ a &= \epsilon^2 \mathcal{C}^2, \\ b &= \frac{2r - \beta_y}{4p}, \\ c &= \frac{c_0 \epsilon^2}{p}, \end{aligned} \tag{32}$$

ecuaţia diferenţială (30) se mai scrie :

$$\mathrm{d}\bar{t} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{2p\sqrt{\sigma[\sigma^2 - \sigma(2a + b^2) + a^2] - \left[\frac{c^2}{4} - \sigma bc\right]}}, \tag{33}$$

Prin integrarea acestei relaţii rezultă legea de variaţie în timp a pătratului amplitudinei A care, după cum se vede, este o funcţie eliptică. Forma aproximativă a acesteia poate fi determinată prin intersecţia parabolei cubice :

$$P(\sigma) = \sigma[\sigma^2 - \sigma(2a + b^2) + a^2], \tag{34}$$

cu dreapta

$$Q(\sigma) = \frac{c^2}{4} - \sigma bc. \tag{35}$$

Relaţia (33) nu are semnificaţie fizică decît dacă sînt îndeplinite condiţiile :

$$\sigma > 0 \quad \text{şi} \quad F(\sigma) = P(\sigma) - Q(\sigma) > 0. \tag{36}$$

Pe domeniile pe care sînt îndeplinite aceste condiţii, amplitudinea A poate varia în limite finite sau poate creşte nelimitat. Prima situaţie corespunde unei mişcări vibratorii stabile, iar cea de-a doua, uneia insta-

bile. Deoarece domeniile pe care funcția $F(\sigma)$ este pozitivă și monoton crescătoare conduc la o mișcare instabilă, vor fi excluse din studiu. Rezultă de aici că pentru ca mișcarea să poată fi stabilă este necesar ca ecuația $F(\sigma) = 0$ să aibă trei rădăcini reale. Aceste rădăcini pot fi obținute

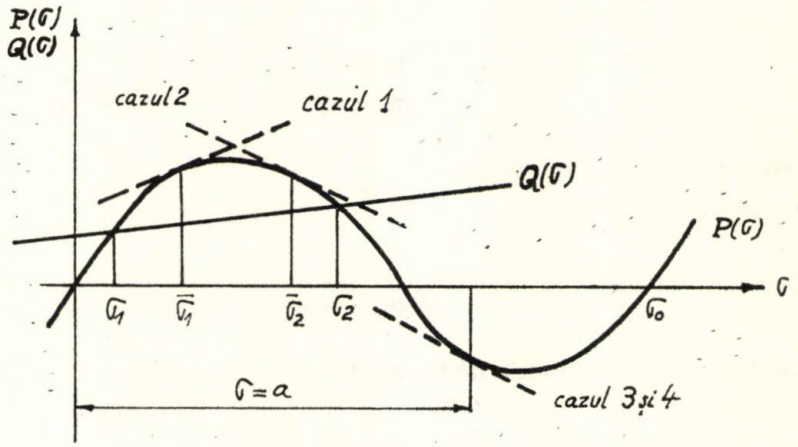


Fig. 2

prin intersecția parabolei $P(\sigma)$ cu dreapta $Q(\sigma)$, așa cum se arată în figura 2. Dacă cele trei rădăcini ale ecuației $F(\sigma) = 0$ se notaseră cu σ_1, σ_2 și σ_0 astfel încît $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_0$ se observă că mișcarea este stabilă numai pe domeniul $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ deoarece la capetele acestui domeniu $\frac{d\sigma}{dt}$ fiind nulă, mărimea σ variază între două valori constante în timp, care corespund unor regimuri de vibrație staționare.

Dacă se presupune că energia totală rămîne constantă în timp, atunci funcția $F(\sigma)$ depinde numai de parametrii b și c. Din relațiile (34) și (35) rezultă că la o valoare dată a parametrului b, parabola $P(\sigma)$ este unic determinată în timp ce dreapta $Q(\sigma)$ se poate transla și roti. Astfel diferența $\sigma_2 - \sigma_1$ poate fi mai mare sau mai mică ori se poate anula. În acest din urmă caz domeniul valorilor pentru care mișcarea vibratorie este stabilă se reduce la un punct, iar dreapta $Q(\sigma)$ devine tangentă la parabola $P(\sigma)$. La o valoare dată a parametrului b, dreapta poate fi tangentă la parabolă pentru trei valori ale parametrului c. Cele trei posibilități sînt reprezentate în figura 2 și corespund următoarelor situații:

$$P(\sigma) > 0, \qquad P'(\sigma) > 0, \tag{37 a}$$

$$P(\sigma) > 0, \qquad P'(\sigma) < 0, \tag{37 b}$$

$$P(\sigma) < 0, \qquad P'(\sigma) < 0. \tag{37 c}$$

Relațiile (37 a) și (37 b) corespund cazului în care $\sigma_1 = \sigma_2$, iar relațiile (37 c), celui în care $\sigma_2 = \sigma_0$.

Integrînd relaţia (33) pe domeniul considerat se obţine [2]

$$p(\bar{t}_2 - \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0 - \sigma_1}} \operatorname{dn}^{-1}\left[\left(\frac{\sigma_0 - \sigma_2}{\sigma_0 - \sigma)}\right) \middle| k^2\right]^{1/2}, \tag{38}$$

în care

$$k^2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_0 - \sigma_1}, \tag{39}$$

iar $\bar{t}_2$ este constanta de integrare.

Introducînd notaţia

$$g^2 = \frac{1}{p^2(\sigma_0 - \sigma_1)} \tag{40}$$

şi aplicînd relaţiei (38) funcţia delta amplitudine, rezultă

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_2}{\sigma_0 - \sigma} = \operatorname{dn}^2\left(\frac{\bar{t}_2 - \bar{t}}{g}\right), \tag{41}$$

de unde

$$\sigma = \frac{\sigma_2 - \sigma_0 k^2 \operatorname{sn}^2 \dfrac{(\bar{t}_2 - \bar{t})}{g}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\dfrac{\bar{t}_2 - \bar{t}}{g}\right)}. \tag{42}$$

Constanta de integrare poate fi determinată din condiţiile iniţiale, de exemplu dacă pentru $\bar{t}=0$, $\sigma=0$, se obţine

$$\bar{t}_2 = g \operatorname{sn}^{-1} \sqrt{\frac{\sigma_2}{k^2 \sigma_0}}. \tag{43}$$

Funcţia $\operatorname{sn}\left(\dfrac{\bar{t}_2 - \bar{t}}{g}\right)$ are perioada $4K$, unde

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{(1 - k^2 \sin^2\alpha)^{1/2}}. \tag{44}$$

Stabilitatea soluţiei (42) poate fi apreciată cu ajutorul ecuaţiilor traiectoriilor ce pot fi obţinute pe baza sistemului autonom (28). Acesta admite soluţia banală $A = \text{const.}$, $\omega = \text{const.}$, dacă sînt îndeplinite condiţiile :

$$A = \mathcal{C} \quad \text{şi} \quad 2r - \beta_y = 2 \in \mathcal{C} p \cos \omega \tag{45}$$

sau condițiile

$$\sin \omega = 0 \quad \text{și} \quad 2r - \beta_y = \epsilon p \left(2A - \frac{\mathcal{C}^2 - A^2}{A} \right). \tag{46}$$

Soluțiile acestor două sisteme reprezintă coordonatele punctelor singulare ale traiectoriilor. Într-adevăr, dacă se notează

$$\begin{aligned} X &= A \cos \omega, \\ Y &= A \sin \omega, \end{aligned} \tag{47}$$

și se ține seama de ecuațiile (28), ecuațiile traiectoriilor sînt date de relația

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\epsilon p [\mathcal{C}^2 - (X^2 + Y^2)] + X[2r - \beta_y - 2\epsilon p X]}{-Y[2r - \beta_y - 2\epsilon p X]}. \tag{48}$$

Punctele singulare, pentru care $\frac{dY}{dX} = \frac{0}{0}$, sînt în număr de patru și au coordonatele:

$$X_{1,2} = -\frac{1}{6\epsilon p} [2r - \beta_y \pm \sqrt{(2r - \beta_y)^2 + 12\epsilon^2 p^2 \mathcal{C}^2}], \qquad Y_{1,2} = 0, \tag{49}$$

$$X_{3,4} = \frac{2r - \beta_y}{2\epsilon p}, \qquad Y_{3,4} = \pm \sqrt{\mathcal{C}^2 - \left(\frac{2r - \beta_y}{2\epsilon p} \right)^2}. \tag{50}$$

Se observă că pentru $A = \mathcal{C}$ ecuația (48) devine:

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{X}{Y}, \tag{51}$$

care reprezintă ecuația unui cerc cu centrul în origine. Cele patru puncte singulare sînt dispuse astfel: primele două puncte sînt situate pe axa absciselor, de-o parte și de alta a centrului, iar celelalte două pe cerc. Din relațiile (50) se vede că ultimele două puncte singulare nu există decît dacă este îndeplinită condiția:

$$\left(\frac{2r - \beta_y}{2\epsilon p} \right)^2 \leqslant \mathcal{C}^2. \tag{52}$$

Aceste puncte se află la intersecția cercului limită, de rază $\mathcal{C}$, cu coarda verticală de abscisă $X = \frac{2r - \beta_y}{2\epsilon p}$, definită de condiția $\frac{dY}{dX} = \infty$, care fiind

o izoclină, punctele respective sînt de fapt puncte de bifurcaţie, aşa cum se arată în figura 3.

Punctele singulare ale căror coordonate sînt date de relaţiile (49 corespund cazului în care ecuaţia $F(\sigma) = 0$ are o rădăcină dublă în punctul de abscisă

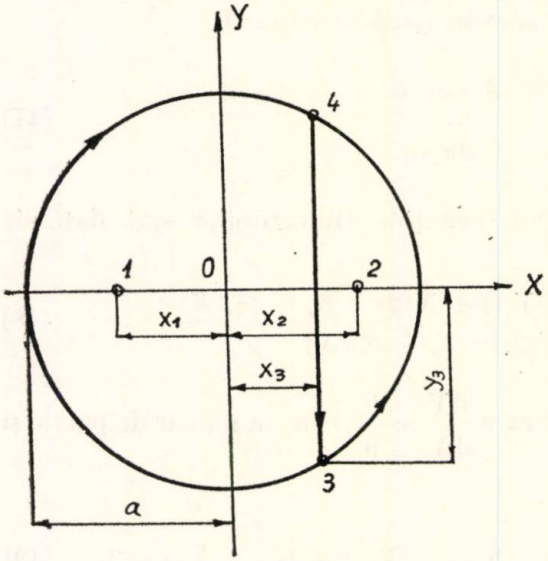


Fig. 3

$$\bar{\sigma}_{1,2} = \frac{a}{3} + \frac{8b}{9}\left[b \pm \sqrt{b^2 + \frac{3a}{4}}\right]. \tag{53}$$

Înlocuind această valoare în expresia ecuaţiei respective, rezultă corelaţia ce trebuie să existe între parametrii c, b şi a pentru ca vibraţia să poată fi stabilă. De exemplu, pentru cazul rezonanţei ($b=0$) se obţine

$$c^2 \leqslant \frac{16}{27} a^3. \tag{54}$$

Punctele singulare aflate pe cercul de rază a, ale căror coordonate sînt date de expresiile (50), corespund cazului în care dreapta $Q(\sigma) = 0$ este tangentă la parabola $P(\sigma) = 0$ în punctul $\sigma = a$. În acest caz rezultă pentru c expresia

$$c = 2\,a\,b. \tag{55}$$

Cum în baza relaţiei (52) trebuie îndeplinită condiţia $b^2 \leqslant \frac{a}{4}$, se obţine $c^2 \leqslant a^3$.

Din cele de mai sus rezultă că la rezonanţă, mişcarea vibratorie poate avea stabilitate orbitală dacă sînt îndeplinite condiţiile:

$$0 < \sigma < a, \qquad 0 \leqslant c^2 \leqslant \frac{16}{27} a^3. \tag{56}$$

În final, soluţia la rezonantă a sistemului (1) se poate scrie cu destulă acurateţe reţinînd, în fiecare din relaţiile (3), numai primii doi termeni. Parametrii A, B, C şi D se determină cu ajutorul relaţiilor (42), (25) şi (27), în care, în prealabil, s-a ţinut seama de notaţiile (22), (26) şi

(32), iar aproximația de ordinul al doilea a soluției se obține prin rezolvarea sistemului format din ecuațiile ultime ale sistemelor (12). Astfel, termenii de ordinul al doilea ai soluției (3) rezultă de forma :

$$\begin{aligned}
\bar{u}_2 &= \left(D^2 + \frac{\pi}{4} DB\right) \frac{r^2}{\beta_y^2} [1 + \beta_y^2 \cos(\beta_y \bar{t} - \psi)], \\
\bar{v}_2 &= \frac{\delta_1'}{\delta} \cos[(r + \beta_y)\bar{t} - \Phi - \psi], \\
\bar{w}_2 &= \frac{\delta_2'}{\delta} \cos[(r + \beta_y)\bar{t} - \Phi - \psi], \\
\bar{\theta}_2 &= \frac{\delta_3'}{\delta} \cos[(r + \beta_y)\bar{t} - \Phi - \psi],
\end{aligned} \tag{57}$$

în care

$$\delta_1' = \begin{vmatrix} -\frac{\pi}{4} ADr(r - 2\beta_y) & 0 & \frac{4}{\pi}(r + \beta_y)^2 \\ 0 & (r+\beta_y)^2 - \beta_x^2 & \frac{4}{\pi}(r + \beta_y)^2 \\ -\frac{\pi}{2}(r - \beta_y)\left[\frac{\pi}{8} AB(r+\beta_y) + ADr\right] & \frac{J}{ml^2}(r + \beta_y)^2 & \frac{\pi}{2}\left[\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)(r + \beta_y)^2 - 1\right] \end{vmatrix},$$

$$\delta_2' = \begin{vmatrix} (r+\beta_y)^2 - \beta_z^2 & -\frac{\pi}{4} ADr(r - 2\beta_y) & \frac{4}{\pi}(r + \beta_y)^2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\pi}(r + \beta_y)^2 \\ (r + \beta_y)^2 & -\frac{\pi}{2}(r - \beta_y)\left[\frac{\pi}{8} AB(r + \beta_y) + ADr\right] & \frac{\pi}{2}\left[\left(1 + \frac{J}{ml^2}\right)(r + \beta_y)^2 - 1\right] \end{vmatrix},$$

$$\delta_3' = \begin{vmatrix} (r+\beta_y)^2 - \beta_z^2 & 0 & -\frac{\pi}{4} ADr(r - 2\beta_y) \\ 0 & (r+\beta_y)^2 - \beta_x^2 & 0 \\ (r+\beta_y)^2 & \frac{J}{ml^2}(r+\beta_y)^2 & -\frac{\pi}{2}(r - \beta_y)\left[\frac{\pi}{8} AB(r + B_y) + ADr\right] \end{vmatrix}. \tag{58}$$

Parametrii Φ şi ψ conţinuţi atît în relaţiile (57), cît şi în termenii de ordinul întîi ai soluţiei (3) se determină integrînd ecuaţia (24 c) şi respectiv ecuaţia secundă a sistemului (24 a), după ce în prealabil în aceste relaţii s-au exprimat A, B, D şi cos ω în funcţie de $\bar{t}$ cu ajutorul relaţiilor (25), (26), (27), (30), (32) şi (42). Pentru un calcul aproximativ, dar totuşi suficient de exact, diferenţele de fază Φ şi ψ pot fi considerate constante. De asemenea, în calculul expresiilor (57), amplitudinile A, B şi D pot fi presupuse constante.

Rezonanţa studiată mai sus, care se produce cînd $r \to \frac{\beta_y}{2}$, şi care are loc între vibraţia de încovoiere transversală şi oscilaţia pendulară a grinzii nu este singura rezonanţă posibilă. Din examinarea relaţiilor (22), (25) şi (26) rezultă că dacă $r \to \beta_y$, atunci $p \to 0$, iar $B \to \infty$. Ca urmare se produce rezonanţa de ordinul al doilea care are loc între vibraţia de încovoiere laterală şi oscilaţia pendulară. Cum pentru rezonanţa de ordinul al doilea, relaţia (27) nu mai are sens, sistemul (1) se poate integra presupunînd că derivatele parametrilor variaţionali sînt de acelaşi ordin de mărime cu pătratul perturbaţiei ϵ şi reţinînd în ecuaţiile (9) numai termenii în ϵ^2. Deoarece în ecuaţiile (9) trebuiesc introduse soluţiile (6), calculele sînt mult mai laborioase decît cele efectuate cu prilejul studierii soluţiei sistemului (1) pentru rezonanţa de ordinul întîi.

Primit la redacţie la 13 martie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. T. PANĂ şi VASILICA COSAC, *Vibraţiile laterale de încovoiere-răsucire ale grinzii pendul* (partea I), St. cerc. mec. apl., **33**, *1* (1974).
2. L. M. MILNE—THOMSON, *Jacobian Elliptic Function Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1950.

STABILIREA EFORTURILOR UNITARE DIN ECLISELE LANȚURILOR CU ROLE ȘI ZALE SCURTE PRIN TENSOMETRIE

de N. N. ANTONESCU
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se studiază problema stabilirii eforturilor unitare din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte prin tensometrie electrică datorate atît eforturilor de montaj (asamblări cu strîngere), cît și încărcării cu o forță exterioară. Se stabilește metodologia de cercetare și se utilizează un echipament corespunzător ținînd seama de dimensiunile reduse ale ecliselor de lanț și ca urmare de folosirea unor traductori (mărci tensometrice) cu baza foarte mică (1,5 mm). În final se compară rezultatele obținute prin diverse metode teoretice de calcul, expuse în literatura de specialitate, cu cele stabilite experimental.

1. INTRODUCERE

Lanțurile cu role și zale scurte sînt standardizate atît la noi în țară (STAS 5174—67), cît și în alte țări. Principalele lor elemente componente sînt reprezentate în figura 1. Transmisiile cu lanțuri cu role și zale scurte sînt foarte mult folosite la viteze și sarcini ridicate, în diverse mașini și utilaje, cum sînt: vehicule, mașini și agregate rutiere, de construcții și textile, mașini agricole, mașini de ridicat și transportat, mașini-unelte, instalații miniere, utilaj petrolier etc. Clasificarea, construcția, avantajele și dezavantajele, diverse metode de calcul geometric, de precizie, funcțional și de rezistență, precum și alte date despre transmisiile cu lanțuri, sînt prezentate pe larg în diverse lucrări de specialitate [1],..., [8].

Eforturile din elementele lanțurilor provin pe de o parte din montaj, datorită asamblărilor cu strîngere dintre eclisele interioare și bucșe (B—EI), respectiv eclisele exterioare și bolțuri (b—EE), iar pe de altă parte datorită forțelor din exploatare, ca urmare a încărcării transmisiei respective la un anumit regim de lucru.

Durabilitatea transmisiilor cu lanț este determinată fie de distrugerea prin oboseală, fie de uzura elementelor acestora.

S-a constatat că în condițiile grele de exploatare a acestor transmisii (în special la instalațiile de foraj) durabilitatea transmisiei este limitată de fenomenul de oboseală și nu de uzură (cum se întîmplă în alte cazuri), elementul sensibil fiind eclisa. Scoaterea din funcțiune a lanțului se datorește, în primul rînd, ruperii prin oboseală a ecliselor în dreptul ochiului

şi mai rar slăbirii ajustajelor cu strîngere, spargerii rolelor sau ruperii bolţurilor, fără ca uzura elementelor componente (bolţ, bucşă, rolă) şi chiar a roţilor dinţate de antrenare să influenţeze buna funcţionare a transmisiei.

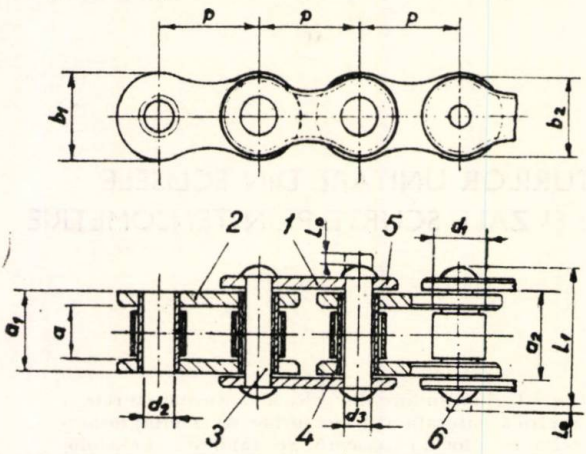


Fig. 1. — Lanţ cu role şi zale scurte simplu : 1 — eclisă exterioară ; 2 — eclisă interioară ; 3 — bolţ ; 4 — bucşă ; 5 — rolă ; 6 — bolţ de legătură.

Rezultă că problema stabilirii eforturilor unitare din eclise prezintă o mare importanţă atît teoretică, cît şi practică deoarece în funcţie de valorile acestora se poate face calculul corect de durabilitate la oboseală.

2. CALCULUL EFORTURILOR UNITARE DIN ECLISELE LANŢURILOR CU ROLE ŞI ZALE SCURTE

În literatura de specialitate sînt puţine lucrări care au abordat, mai pe larg, această problemă. Una din cele mai complete metode este expusă în lucrarea [1]. În această lucrare se cercetează problema stabilirii eforturilor din eclisele lanţurilor cu role şi zale scurte, prezentîndu-se un studiu complex în domeniul elastic şi plastic.

Toate lucrările care au studiat această problemă consideră că eforturile unitare totale din eclisă se calculează admiţînd principiul suprapunerii efectelor pentru eforturile datorate montajului (asamblărilor cu strîngere) şi forţelor operaţionale (de exploatare). Aşa cum se arată în [9] această ipoteză nu este total reală dar în funcţie de metoda folosită pentru stabilirea eforturilor datorate forţelor operaţionale, eforturile totale pot fi foarte apropiate de cele reale (experimentale).

Asamblările cu strîngere sînt considerate ca fiind tuburi cu pereţi groşi de lungime finită, eforturile calculîndu-se uşor cu relaţiile (1), cunoscute din teoria elasticităţii [10], [11] :

$$\sigma_\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)p,$$

$$\sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)p, \qquad (1)$$

$$\tau_{r\theta} = 0,$$

unde σ_θ și σ_r sînt eforturile unitare după direcția tangentei, respectiv razei, pentru elementul infinițional $r \cdot dr \cdot d\theta$ definit de coordonatele r și θ (fig. 2), iar $\tau_{r\theta}$ efortul unitar de forfecare, care în acest caz este nul.

Presiunea de fretare se determină, în funcție de mărimea strîngerii S, cu formule avînd la bază diverse ipoteze pentru distribuția acestora pe lungimea l, a asamblării. O relație de calcul a presiunii medii, foarte apropiată de realitate este următoarea [1], [9]:

$$p = \frac{S}{2a} \cdot \frac{1}{\frac{k}{E_1}\left(\frac{1+K_1^2}{1-K_1^2} - \mu_1\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{1+K_2^2}{1-K_2^2} - \mu_2\right)}, \tag{2}$$

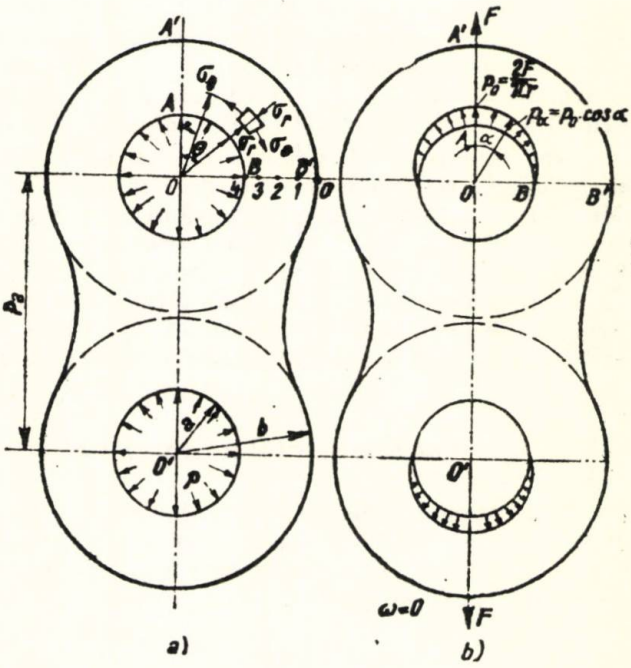


Fig. 2. — Schemele de încărcare și de calcul ale eclisei: *a* — încărcarea cu presiune interioară realizată printr-un ajustaj cu strîngere; *b* — încărcarea cu o forță de tracțiune axială.

unde $K_1 = c/a$; $K_2 = a/b$; $k = f(K_1, l)$ și se dă în tabele [10];
c reprezintă raza interioară a bucșei (pentru bolț $c = 0$);
E_1 și E_2, respectiv μ_1 și μ_2 — modulele de elasticitate, respectiv coeficienții lui Poisson pentru materialele bucșei (bolțului) și eclisei.

Eforturile unitare datorate forței operaționale F (fig. 2) se calculează cu expresiile cunoscute de la barele curbe [10], [11], deoarece în toate ipotezele de calcul, ochiul eclisei se consideră a fi o bară curbă. Pentru secțiunea critică $B - B'$ (fig. 2) [1], [4], ..., [9] relațiile de calcul a eforturilor unitare sînt:

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r},$$

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \tag{3}$$

unde N este forța axială (normală pe secțiune);

M — momentul încovoietor;

A — aria secțiunii transversale a ochiului eclisei;

e — excentricitatea (diferența dintre raza centrului geometric al secțiunii r_0 și raza axei neutre R).

Pentru secțiunea periculoasă $B - B'$, valorile eforturilor N și M sînt:

$$N = 0{,}5\,F;\quad M = C_M \cdot F \cdot r. \tag{4}$$

Valoarea coeficientului C_M este deosebit de importantă și se stabilește prin diverse ipoteze de calcul. Pentru determinarea lui C_M, majoritatea lucrărilor actuale, care studiază problema eforturilor din elementele lanțurilor, folosesc ipoteza expusă în [12] care nu este prea potrivită pentru acest caz [1], [9]. O valoare mult mai corectă (pentru cazul lanțurilor) a valorii C_M se determină folosind metoda expusă în [1].

De remarcat că valorile eforturilor unitare, datorate asamblării cu strîngere, respectiv forțelor de exploatare, se pot determina și prin „Metoda elementelor finite" expusă în [13]. Studiul eforturilor cu ajutorul acestei metode permite (folosind programe adecvate pentru calculator) să se stabilească eforturile în oricare punct al eclisei și în plus se pot studia și alte probleme ca: efectul lungimii finite a asamblării cu strîngere asupra variației presiunii de fretare în lungul asamblării, eforturile unitare datorită acțiunii simultane a fretării și forței de exploatare etc.

3. PRINCIPIUL METODEI ȘI TEHNICA EXPERIMENTALĂ FOLOSITĂ

Pentru determinarea eforturilor unitare produse în piese, se folosesc diverse metode indirecte, care măsoară deformațiile corespunzătoare acestora [11], [14] ș.a. Una dintre cele mai răspîndite metode constă în măsurarea deformațiilor pe suprafața pieselor cu ajutorul tensometroarelor mecanice, optice sau, cel mai frecvent, electrice. Măsurîndu-se alungirea relativă ε și cunoscînd modulul de elasticitate E se poate calcula ușor efortul unitar σ:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \ [\text{kgf/cm}^2] \text{ sau } [\text{daN/cm}^2]. \tag{5}$$

Această metodă este expusă pe larg în diverse lucrări de specialitate [11], [14] ș.a. astfel că nu va mai fi reluată în prezenta lucrare. În continuare se va prezenta pe scurt numai modul în care aceasta a fost folosită la determinările experimentale făcute, precum și aparatura utilizată.

Pentru încercările făcute s-a folosit o schemă de conectare cu punte (fig. 3), deoarece aceasta este mai sigură și permite compensarea ușoară a variațiilor de temperatură (care influențează rezistența traductorului deci produce erori la măsurare) folosind pentru rezistența R_4 un traductor de compensare, lipit pe o piesă similară cu cea care se studiază, identic cu cel de măsurare R_1.

Curentul care trece prin aparat (cu rezistența foarte mică) are valoarea :

$$I_g = \frac{R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_4 \cdot R_1 + R_4 \cdot R_1 \cdot R_2} \cdot V. \qquad (6)$$

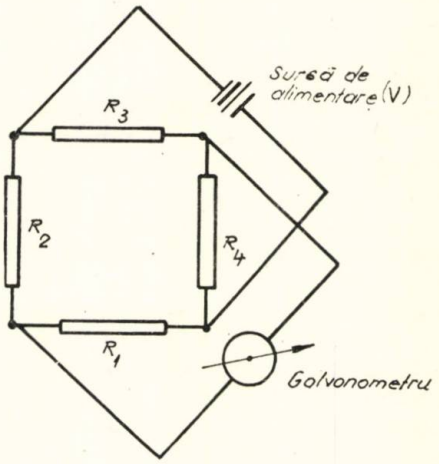


Fig. 3. — Schema de legare a traductorilor în punte.

Condiția ca puntea să fie în echilibru ($I_g = 0$) este

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4. \qquad (7)$$

De obicei se alege $R_2 = R_3 = R$, iar $R_4 = R_1 = R_t$.

În timpul măsurării, rezistența traductorului lipit pe piesă variază cu valoarea ΔR_t. Rezistența traductorului lipit pe piesă variază liniar cu deformațiile conform relației :

$$\Delta R_t = R_t(\gamma \cdot \varepsilon_x + \delta \cdot \varepsilon_y), \qquad (8)$$

unde ε_x și ε_y sînt lungirile piesei în direcția buclelor sîrmei traductorului, respectiv transversal pe acestea ;

γ și δ — factorii de sensibilitate longitudinală și transversală ai traductorului.

Sensibilitatea transversală δ este mică și de aceea, în general, se neglijează. Pentru baza $l < 2{,}5$ mm (așa cum este cazul la măsurătorile efectuate) se determină δ prin etalonare specială.

Dacă în timpul măsurării rezistența traductorului lipit pe piesă variază cu ΔR_t datorită deformațiilor și capătă valoarea $R_1 = R_t + \Delta R_t$, galvanometrul va fi străbătut de un curent I_g :

$$I_g = \frac{V}{2(R + R_t)} \cdot \frac{\Delta R_t}{R_t} = I_t \frac{\Delta R_t}{2R_t}, \qquad (9)$$

în care I_t este curentul care trece prin traductor.

Etalonînd corespunzător galvanometrul se pot citi direct valorile alungirii relative ε.

Ţinînd seama de dimensiunile mici ale ecliselor de lanţ, s-au folosit traductori (mărci tensometrice) cu baza foarte mică tip 1,5/120 LE 11 fabricaţi de firma Hotinger Baldwien Messtechnic (HBM) cu următoarele caracteristici:

— baza de măsurare $l = 1{,}5$ mm,
— rezistenţa traductorului $R_t = 120\ \Omega$ cu erori de max. $\pm 2\%$,
— constanta traductorului $K = 1{,}97$ cu erori de max. $\pm 1\%$,
— coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$,
— domeniul de compensare al temperaturilor 10...120°C.

De asemenea, au fost folosite şi mărci tensometrice tip rozetă cu raza cercului pe care se înscriu de 5 mm de aceeaşi fabricaţie HBM.

Mărcile tensometrice au fost lipite pe suprafeţele ecliselor după ce acestea în prealabil au fost bine curăţate şi degresate. Lipirea s-a făcut folosind un adeziv special HBM, pe bază de cianoacrilat.

Pentru efectuarea măsurătorilor a fost folosit următorul echipament (fig. 4):

1. Maşină hidraulică pentru încercări de tracţiune tip VEB fabricaţie RDG. Maşina poate realiza încărcări în trepte pînă la 30 tf, fapt ce a permis realizarea măsurătorilor pentru diverse valori ale forţei F.

2. Pupitrul de comandă al maşinii de tracţiune.

3. Dispozitiv foarte rigid care permite prinderea tuturor zalelor şi ecliselor lanţurilor cu pasul între 1 1/2 şi 2 1/2 in.

4. Avometru tip „Univeko", pentru citirea şi menţinerea constantă a tensiunii de alimentare.

5. Cutie de comutare tip HBM cu 74 contacte în activ şi 20 în compensator. Cutia este prevăzută cu posibilităţi de corectare a influenţei capacitive a cablurilor de conexiune şi adaptabilitate la rezistenţa specifică a traductorului.

6. Autotransformator pentru reglarea tensiunii de alimentare.

7. Punte electronică tip „DDM-4" (Digital Dehnungsmesser) pentru măsurarea şi citirea directă a alungirii relative ε în $\mu m/m$. Puntea are limitele de măsurare între 0 şi $\pm 9999\ \mu m/m$, iar precizia de citire (nesimetria) este $\pm 2{,}4\%$ dar mai mică decît două unităţi de indicaţii. Citirea s-a făcut automat excluzînd eroarea operatorului.

8. Înregistrator cifric prin imprimare numerică tip „Kienzle" D 11 E (fabricaţie HBM), cu dispozitiv de înregistrare cu bandă. Parametrii principali ai înregistratorului sînt: viteza de imprimare 3 rînduri/s, poziţii 5...14, limitele de temperatură $t = -5...+35°C$ şi eroare zero.

Aparatura de înregistrare folosită aparţine „Institutului pentru proiectări şi cercetări de utilaj petrolier" filiala Ploieşti. Aceasta a fost folosită la efectuarea acestor măsurători, în acest montaj complet, pentru prima oară în ţară.

4. ÎNCERCĂRILE EFECTUATE ŞI REZULTATELE OBŢINUTE

4.1. STABILIREA EFORTURILOR UNITARE DATORITĂ STRÎNGERII

Aceste măsurători s-au făcut pentru ajustajele bucşă-eclise interioare, ale lanţurilor 40 A ($p = 2$ 1/2 in) şi 32 A($p = 2$ in). La ambele zale strîngerea măsurată a fost $S = 0{,}080$ mm. Mărcile tensometrice au fost lipite pe suprafaţa interioară a ecliselor, conform schemelor din figurile 5*a* şi *b*.

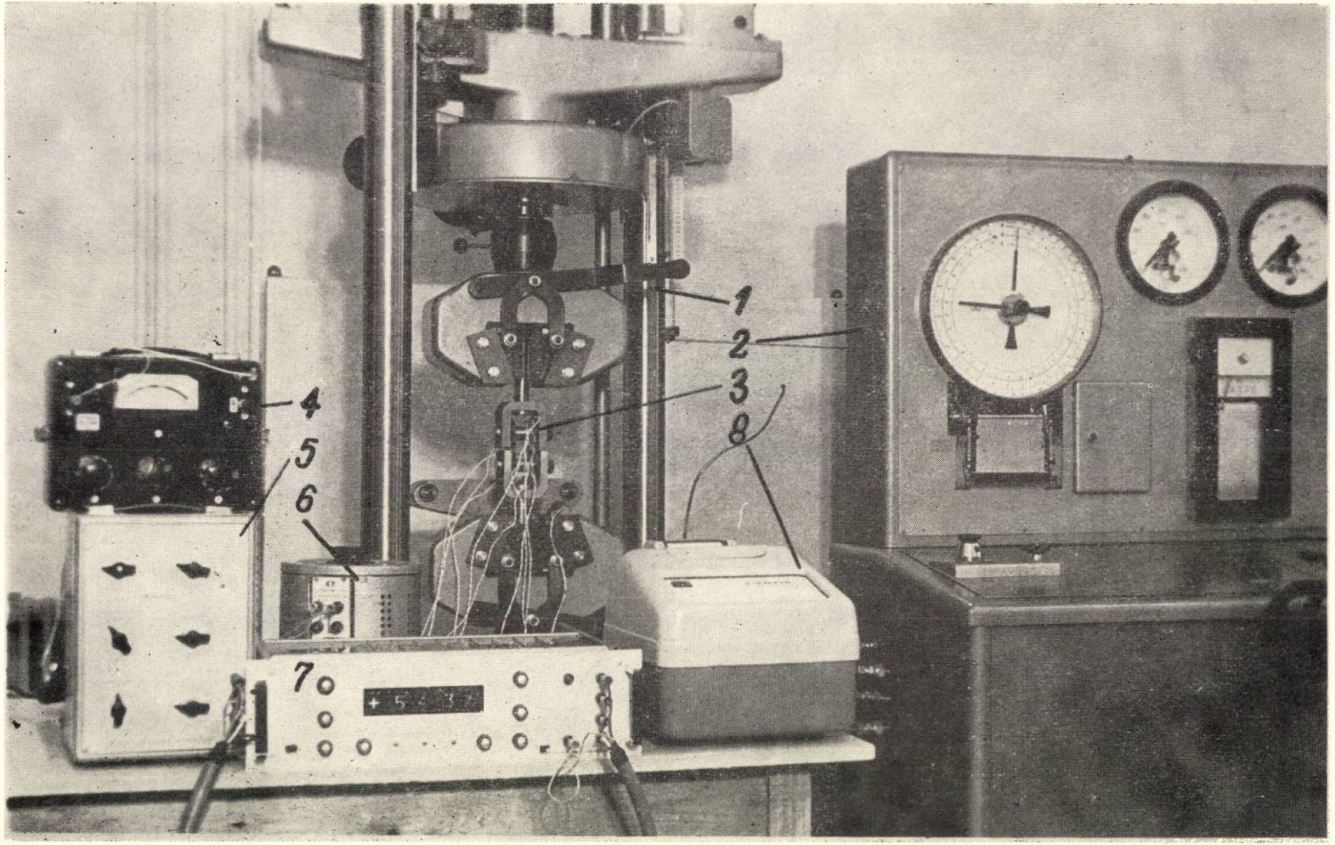


Fig. 4. — Echipamentul folosit pentru realizarea încercărilor experimentale.

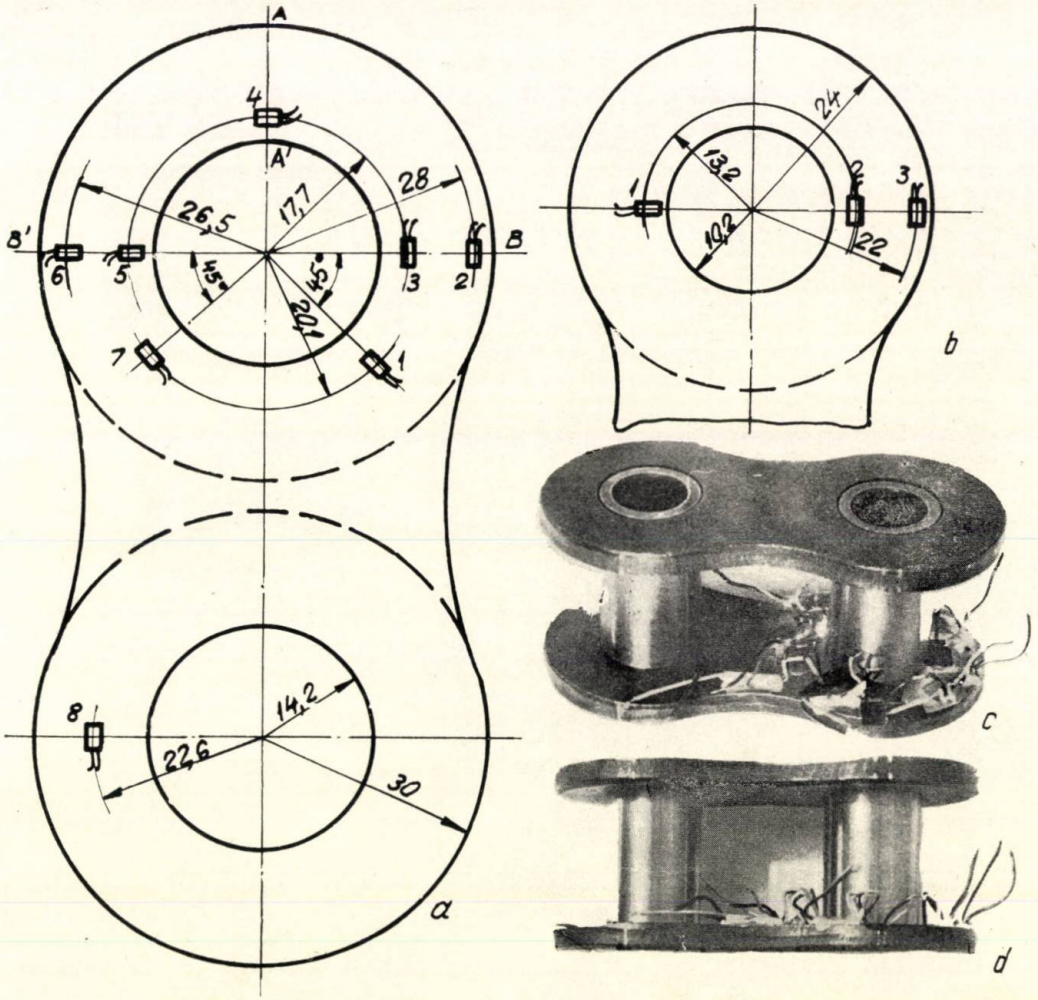


Fig. 5. — Plasarea mărcilor tensometrice pentru măsurătorile efectuate pe zale de lanţ : *a* — eclisă interioară 40A ; *b* — eclisă interioară 32A ; *c* — za interioară 40A ; *d* — za interioară 32A.

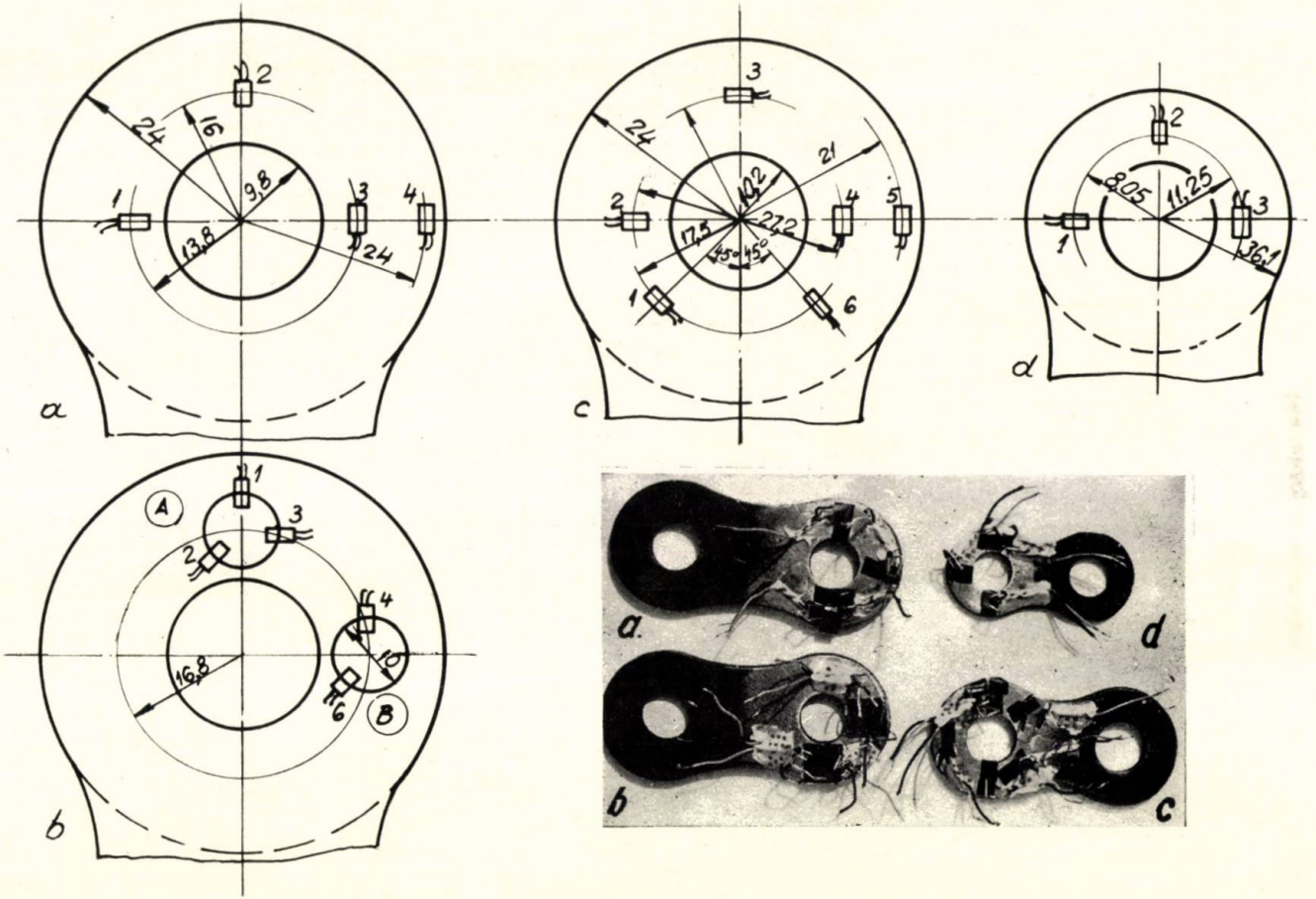


Fig. 6. — Plasarea mărcilor tensometrice pe eclise : *a* — eclisă exterioară 40A ; *b* — eclisă exterioară 40A cu mărci rozetă ; *c* — eclisă interioară 32A ; *d* — eclisă interioară 24A.

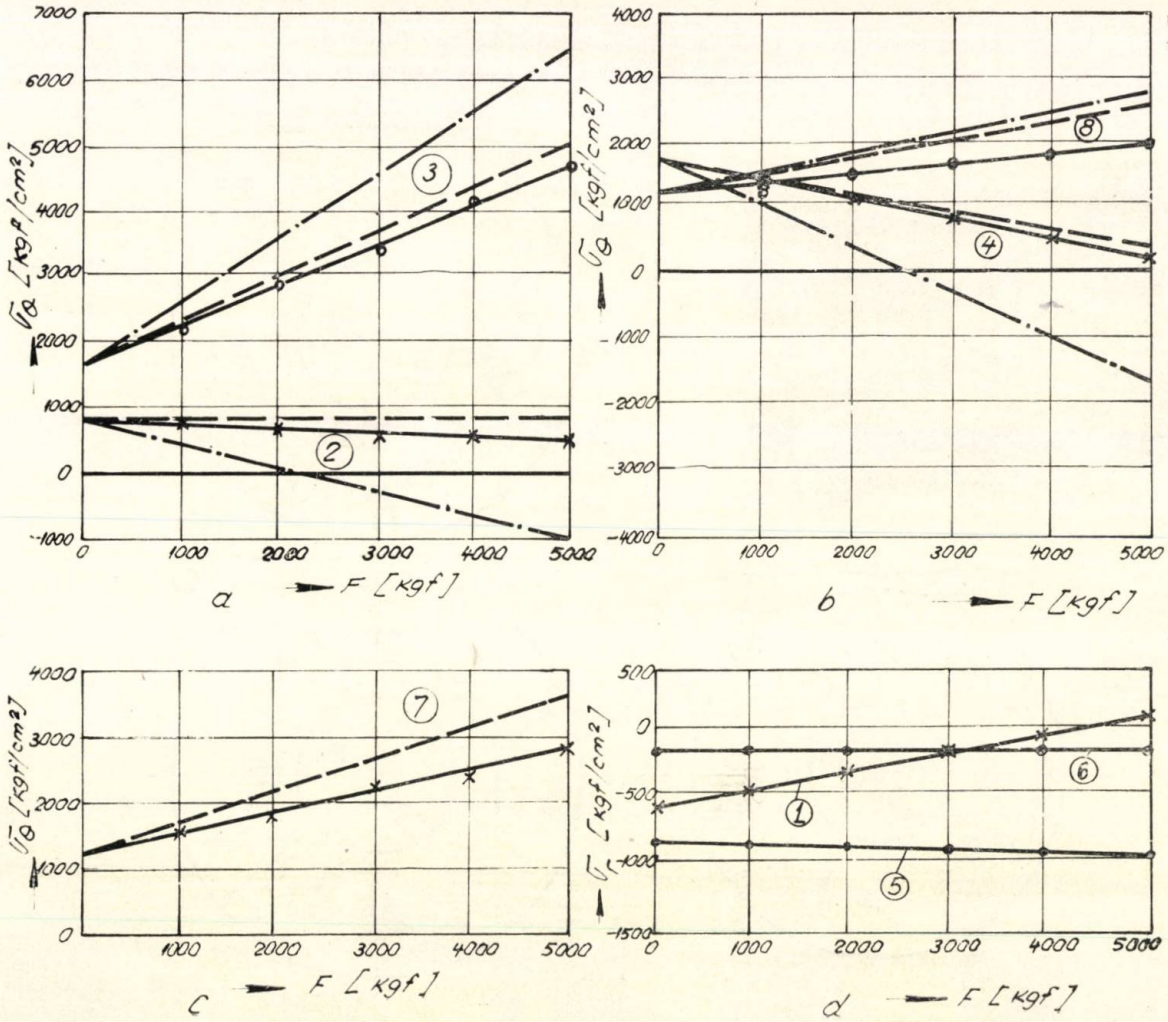


Fig. 7. — Diagramele de variație a eforturilor unitare la zaua interioară 40A, pentru mărcile 1,...,8 din fig. 5*a*.

Eclisa pe care nu s-au fixat mărci tensometrice a fost presată în prealabil în cele două bucșe. Apoi s-au fixat eclisele între două plăci, s-a făcut egalizarea temperaturilor, s-a citit valoarea de referință și după aceea, cu ajutorul presei hidraulice s-a realizat asamblarea cu strîngere între eclisa cu mărci tensometrice și bucșe, obținîndu-se zale interioare (ZI) de lanț (fig. 5*c* și *d*). După aceasta s-a efectuat o nouă citire, iar prin diferență față de bază au fost stabilite valorile pe direcțiile de plasare a mărcilor.

Valorile obținute din măsurători, precum și cele calculate prin ipoteza teoretică (relațiile 1 și 2) sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Valorile eforturilor unitare provenite din strîngere.

Tipul zalei	Strîngerea		Valoarea	Poziția mărcii tensometrice (fig. 5)							
				1	2	3	4	5	6	7	8
	Măsurată	Efectivă		σ_r	σ_θ	σ_θ	σ_θ	σ_r	σ_r	σ_θ	σ_θ
				kgf/m²							
ZI 40A	80	66	Măsurată	— 610	810	1490	1720	—855	—142	1210	1095
			Calculată	— 580	860	1600	1600	—815	—117	1300	1105
ZI 32A	80	66	Măsurată	—1140	1780	703	—	—	—	—	—
			Calculată	—1060	1850	715	—	—	—	—	—

Comparînd valorile calculate cu cele obținute prin măsurare, se constată că acestea sînt destul de apropiate. Erorile obținute sînt de maximum 7,5% cu excepția mărcii din poziția 6, la zaua lanțului 40 A, unde se obține o diferență mai mare și anume de circa 17%. Acest lucru permite tragerea concluziei că metoda de calcul folosită pentru eforturile unitare, provenite din strîngere, este corectă.

4.2. STABILIREA EFORTURILOR UNITARE PROVENITE DIN FORȚA DE TRACȚIUNE F

Măsurătorile s-au efectuat atît pe zale montate (fig. 5), pentru a se stabili eforturile din tracțiune plus strîngere în condițiile solicitării zalei ca un cadru, așa cum se întîmplă în realitate, cît și pe eclise ale diverselor tipuri de lanțuri (fig. 6). De remarcat că pentru acest ultim caz s-au folosit perechi de eclise, așezate simetric în dispozitiv, una cu mărci tensometrice și alta fără. De asemenea, au fost folosite bolțuri cu diverse diametre pentru a studia și efectul jocului J, asupra variației eforturilor din ochiul eclisei.

Pentru ușurința comparației rezultatele obținute experimental și prin calcul, pentru toate tipurile de zale și eclise încercate precum și pentru fiecare marcă tensometrică, au fost reprezentate grafic în figurile 7,...,12. În toate aceste reprezentări curbele obținute experimental sînt

trasate cu linie continuă, cele calculate prin metoda expusă în [1] cu linie întreruptă, iar cele cu metoda expusă în [12], pentru secțiunile $B-B'$ și $A-A'$, cu linie întreruptă și puncte.

Pentru zalele interioare ale lanțului 40A, respectiv 32A reprezentarea nu începe din origine pentru $F = 0$, ci de la valorile rezultate în urma realizării asamblărilor cu strîngere (tabela 1).

Din analiza rezultatelor prezentate în diagramele din fig. 7,..., 12 rezultă următoarele concluzii mai importante:

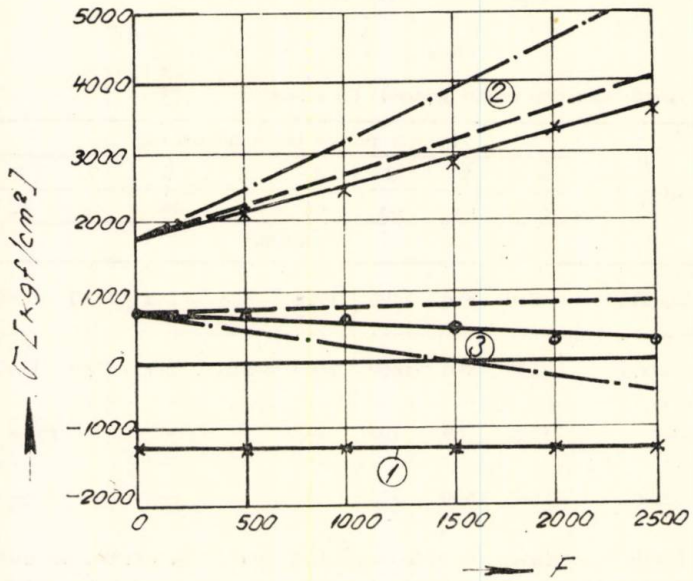


Fig. 8. — Diagramele de variație a eforturilor unitare la zaua interioară 32 A, pentru mărcile 1,2 și 3 din fig. 5*b*.

1. Încărcarea cu forța F în lungul axei eclisei nu produce eforturi unitare σ_r în secțiunea periculoasă $B-B'$. Așa cum arată curbele de variație ale mărcilor dispuse radial în această secțiune (5 și 6 din fig. 7*d*, 1 din fig. 8, 1 din fig. 9*d*, 2 din fig. 11*b* și 1 din fig. 12), efortul σ_r rămîne practic constant. Creșterea, foarte mică în valoare absolută, se explică prin contracția alezajului eclisei pe direcția $B-B'$ care duce la o mărire extrem de mică a presiunii de fretare la ajustajele cu strîngere, respectiv la apariția unei presiuni de contact la asamblările cu $J = 0$.

2. Pe direcția lui F, în partea opusă sensului ei de acționare, σ_r scade la asamblările cu strîngere ca urmare a slăbirii acesteia (diagrama mărcii 1 din fig. 7*d*). Această situație concordă cu aspectul fizic al solicitării, lucru confirmat și de diagrama mărcii 6 din figura 11 *b*, unde se vede că σ_r este pozitiv și crește cu F.

3. Pe direcția și în sensul lui F, σ_r crește datorită faptului că aici presiunea de contact are valoarea maximă (diagramele mărcilor 2 din figura 9*d* și 1 din fig. 10*a*). Pentru cazul asamblărilor fără strîngere, se constată, așa cum era și de așteptat, că valoarea acestuia este cu atît mai mare cu cît jocul dintre piese crește, deoarece aceeași forță F se transmite pe o suprafață de contact mai redusă. În acest caz distribuția cosinusoidală a presiunii de contact, acceptată în lucrarea [1], se modifică căpătînd

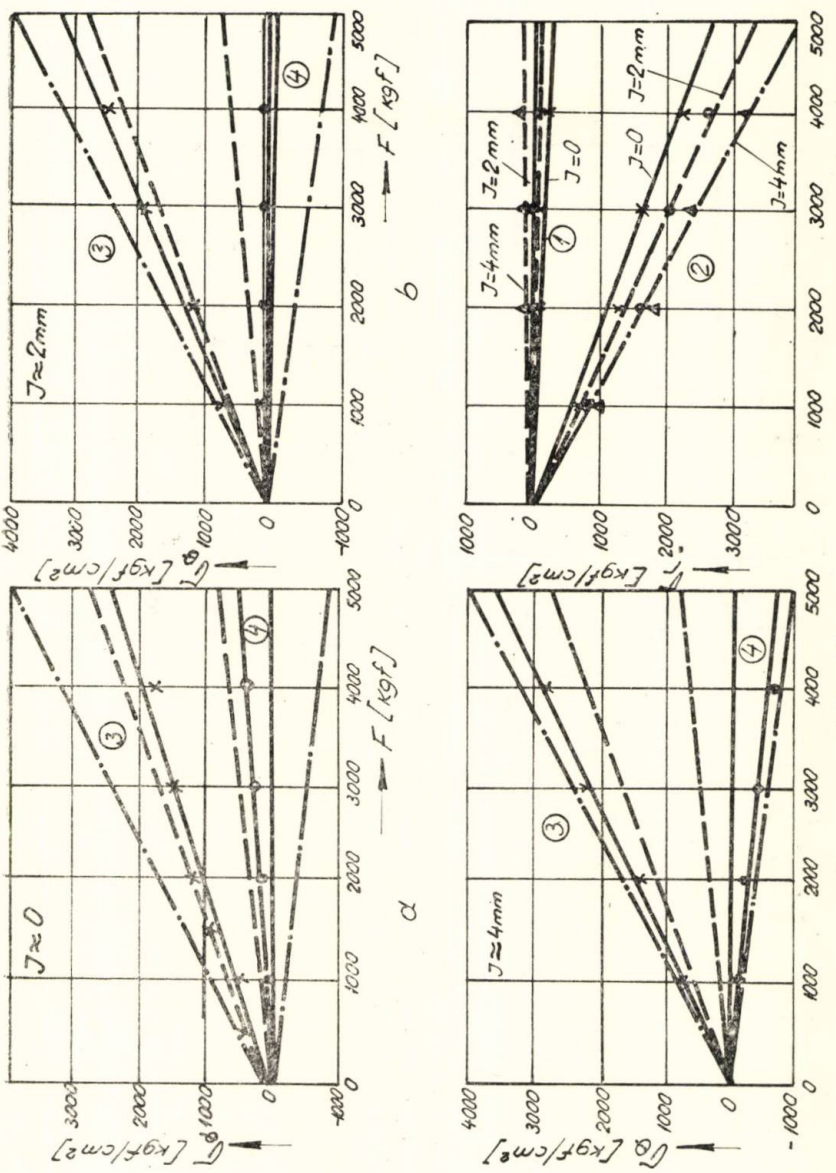


Fig. 9. — Diagramele de variație a eforturilor unitare la eclisa exterioară 40A, pentru mărcile 1,...,4 din fig. 6a.

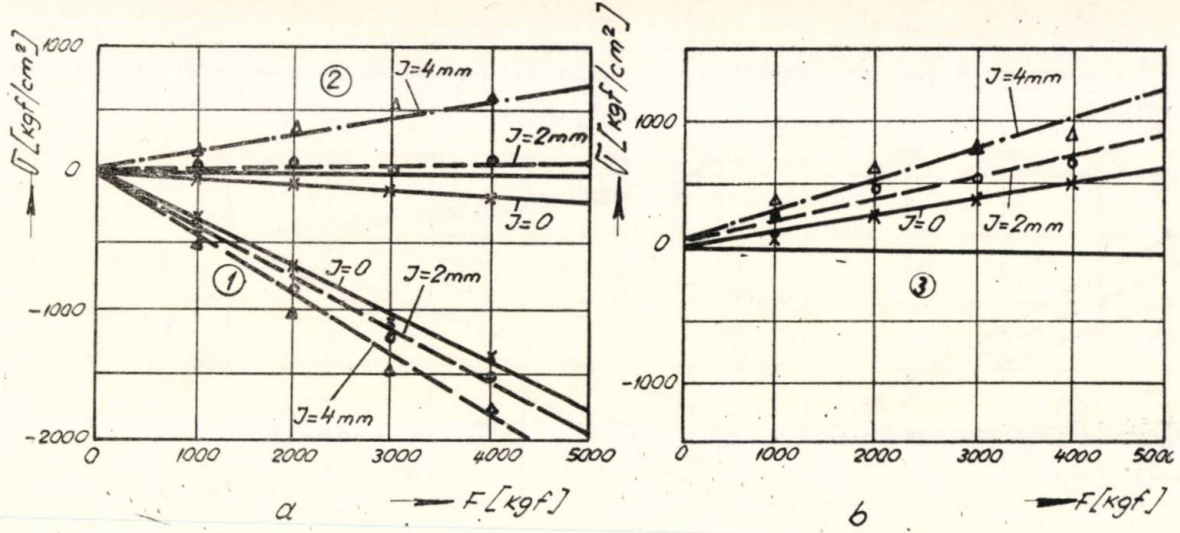


Fig. 10. — Diagramele de variație a eforturilor unitare la eclisa exterioară 40A, pentru marca rozetă A din fig. 6*b*.

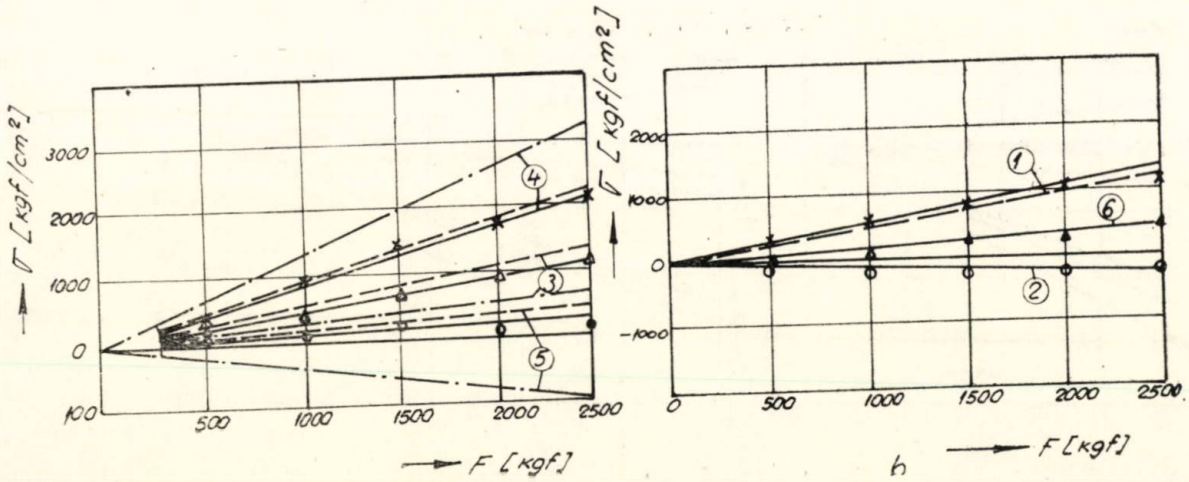


Fig. 11. — Diagramele de variație a eforturilor la eclisa interioară 32 A, pentru mărcile 1, . . . , 6 din fig. 6*c*.

o formă mai ascuțită (de exemplu o parabolă). Pentru aceste mărci s-a reprezentat numai variația experimentală, deoarece prin calcul aceste valori nu se pot stabili prea exact și nici nu este necesar.

4. La încărcarea ecliselor numai cu forța de tracțiune F efortul unitar σ_θ determinat experimental, în secțiunea periculoasă $B-B'$, este destul de apropiat de cel calculat prin metoda expusă în [1]. Astfel avem :

— valori experimentale ceva mai mari pe conturul interior ($r \to a$) așa cum reiese din diagramele mărcilor 3 din figura 9*a*, 4 din figura 11*a* și 3 din figura 12 ;

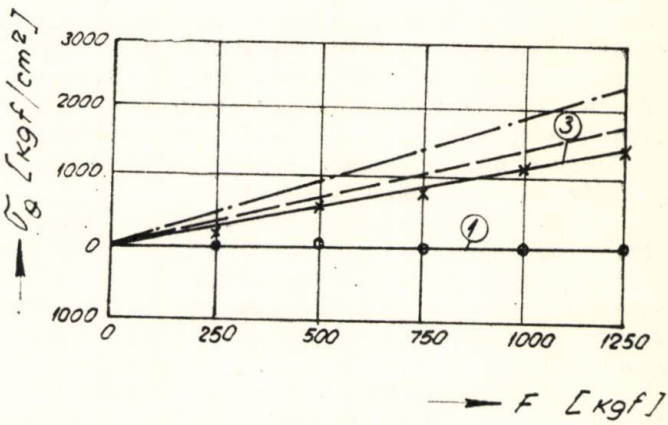


Fig. 12. — Diagramele de variație a eforturilor unitare la eclisa interioară 24 A, pentru mărcile 1 și 3 din fig. 6*d*.

— valori experimentale ceva mai mici pe conturul exterior ($r \to b$) așa cum reiese din diagramele mărcilor 4 din figura 9*a* și 5 din figura 11*a*.

Aceste rezultate arată că momentul de încovoiere calculat prin metoda expusă în [1] este ceva mai mic decît în realitate. Această concluzie concordă și cu rezultatele experimentale obținute prin măsurătorile fotoelastice [9]. Rezultă că în expresia momentului încovoietor determinat prin metoda expusă în [1], ar trebui introdusă o corecție printr-un coeficient ceva mai mare ca unu, pentru cazul acesta de încărcare.

Pentru cazul zalelor montate și supuse la tracțiune rezultatele experimentale pentru σ_θ, în secțiunea periculoasă $B-B'$, față de cele calculate prin metoda expusă în [1], admițînd principiul suprapunerii efectelor, sînt ceva mai mici atît pe conturul interior (diagramele mărcilor 3 din fig. 7*a* și 2 din fig. 8), cît și pe cel exterior (diagramele mărcilor 2 din fig. 7*a* și 3 din fig. 8). Această concluzie arată că în realitate, eforturile totale din eclise nu sînt o suprapunere exactă a eforturilor unitare date de cele două solicitări aplicate separat. Acest lucru (confirmat și de rezultatele experimentale prezentate în [9]) se datorește faptului că se schimbă geometria sistemului și caracterul încărcării acestuia, față de cazul solicitării separate a ecliselor.

Ținînd seama de această constatare se deduce ușor concluzia că, pentru cazul ecliselor de lanț, metoda de calcul expusă în [1] pentru eforturile unitare datorate forței F este avantajoasă deoarece dînd valori ceva mai mici decît în realitate, pentru efectul combinat cu strîngerea se obțin rezultate apropiate de cele reale.

5. Metoda de calcul expusă în [1] dă rezultatele apropiate de cele experimentale şi în secţiunea $A-A'$ (diagramele mărcilor 4 din fig. 7*b* şi 3 din fig. 11*a*). Aceeaşi concluzie se constată şi în alte secţiuni cum este cea de la 45° faţă de axa longitudinală a eclisei (diagramele mărcilor 7 din fig. 7*c* şi 1 din fig. 11*b*). Diferenţa mai mare obţinută la marca 7 figura 7*c* se explică prin faptul că aceasta a fost aşezată foarte aproape de axa neutră şi o eroare oricît de mică în plasarea ei faţă de poziţia stabilită, duce la diferenţe apreciabile faţă de calcul.

6. Din compararea diagramelor experimentale, pentru mărcile enumerate la punctul 4 cu cele calculate după metoda expusă în [12] se constată diferenţe foarte mari între acestea, în toate cazurile. Acest lucru se datoreşte faptului că formula de calcul pentru momentul încovoietor dă valori prea mari în special în secţiunea periculoasă $B-B'$. Rezultă că această metodă nu este indicată pentru acest caz. În schimb se constată că valorile experimentale se apropie de cele calculate prin această metodă, pentru jocuri mari între bolţ şi alezajul ecliselor (diagramele mărcilor 3 şi 4 din fig. 9*a*, *b* şi *c*). Această situaţie nu se întîlneşte practic decît în cazul pieselor cu ochi pentru susţinere.

7. Folosirea pentru eclise a mărcilor rozetă, nu permite decît constatări calitative, deoarece au raza (baza) de 5 mm practic acoperind mai mult de jumătate din lăţimea ochiului eclisei. În acest mod nu mai poate fi vorba de considerarea acesteia ca un punct, în raport cu piesa, deci fiecare ramură a rozetei indică valori pentru puncte diferite cu variaţii mari ale eforturilor.

Rezultatele obţinute cu rozeta plasată în secţiunea A (fig. 6*b*) sînt trecute în diagramele din figura 10 şi au semnul celor teoretice (valorile teoretice în aceste puncte se calculează cu mari erori şi nu se poate face o comparaţie reală). De asemenea, variaţia lor cu jocul este în sensul aşteptat din punct de vedere teoretic. Rozeta plasată în secţiunea B nu a lucrat în timpul înregistrării, dînd valori fără sens. Acelaşi lucru s-a întîmplat şi cu marca 2 de la eclisa interioară a lanţului 24A (fig. 6*d*).

4.2. STABILIREA CICLULUI DE VARIAŢIE A FORŢEI DIN LANŢ

Pentru a se putea face calculul la oboseală al lanţurilor, trebuie cunoscut ciclul real de variaţie al forţei F din acestea, la o rotaţie completă. Ciclul teoretic este cel din figura 13 [7] ş. a.

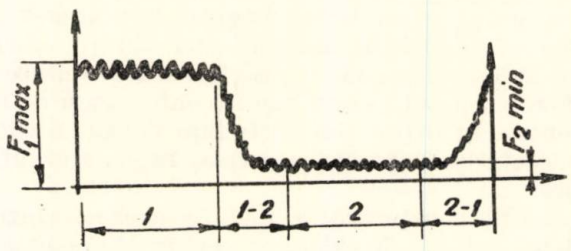


Fig. 13. — Ciclul teoretic de solicitare a lanţului: 1 — ramura conducătoare; 1 — 2 descărcarea pe roata condusă; 2 — ramura condusă; 2 — 1 încărcarea pe roate conducătoare.

Pentru determinarea experimentală a acestuia s-a plasat o marcă tensometrică la mijlocul unei eclise dintr-un lanţ, în lungul axei acesteia, direcţie pentru care efortul unitar este direct proporţional cu forţa F.

Lanțul a fost montat pe standul de încercat transmisii cu lanț existent actualmente la Institutul de petrol și gaze Ploiești și prezentat în [7]. Rezultatele experimentale obținute pentru toate încercările și turațiile folosite, au dat o diagramă (ciclu) de variație ca cea din figura 14.

Fig. 14. — Ciclul real de variație al forței operaționale, pentru lanțul 16 A, stabilit prin tensometrare.

Se constată că ciclul de variație obținut este foarte apropiat de cel teoretic. Analizînd aceste rezultate se obțin următoarele concluzii mai importante :

— în ramura pasivă, forța poate fi considerată uniformă, avînd oscilații în jurul unei valori medii datorită forțelor dinamice (vibrații) ;

— trecerea de la ramura pasivă la cea activă se face destul de repede și uniform ; la ieșirea după roate condusă se obține un maxim (datorat probabil unui șoc), iar imediat după acesta o valoare mai scăzută după care forța în ramura activă rămîne relativ uniformă, cu oscilațiile datorite efectelor dinamice ;

— descărcarea pe roata conducătoare se face mai neuniform (cu oscilații destul de mari), lucru explicabil deoarece pe măsură ce lanțul avansează spre ramura pasivă forța din el scade (se descarcă pe fiecare dinte) ; salturile care apar în această perioadă sînt efectul ciocnirii rolelor la angrenarea cu dinții roții;

— valoarea minimă din ramura pasivă se găsește foarte aproape de zero, astfel că pentru ușurința calculului la durabilitate s-ar putea asimila ciclul real cu unul pulsator.

5. CONCLUZII

Problema stabilirii eforturilor unitare din eclisele lanțurilor precum și a ciclului de variație a acestora, este deosebit de importantă deoarece permite efectuarea calculului de durabilitate la oboseală al lanțurilor.

Pentru calculul eforturilor unitare sînt prezentate diverse metode mai mult sau mai puțin adecvate pentru cazul lanțurilor cu role și zale scurte. Pentru a stabili domeniile de valabilitate precum și limitele acestor metode sînt necesare determinări experimentale.

Considerăm că în cazul lanțurilor cele mai adecvate metode experimentale sînt prin tensometrie electrică, prezentată în această lucrare, precum și prin fotoelasticitate [9].

Rezultatele experimentale obținute prin tensometrie sînt importante deoarece pe lîngă faptul că permit cunoașterea mărimii și variației reale a eforturilor din lanțuri permit și tragerea unor concluzii utile privind ipotezele teoretice de calcul.

Primită la redacție la 12 noiembrie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. ANTONESCU, St. cerc. mec. apl., **32**, *2*, 291–328 (1973).
2. D. RAȘEEV și N. N. ANTONESCU, Cercetări metalurgice, *14*, 285–308 (1973).
3. N. N. ANTONESCU și D. RAȘEEV, St. cerc. mec. apl., **32**, *5*, 1017–1048 (1973).
4. N. G. RACHNER, Stahlgelenkketten und Kettentriebe spring Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1962.
5. N. V. VOROBIEV, Țepenie peredaci, Mașinostraienia, Moskva 1968.
6. N. ZOLLNER, Kettentriebe, Karl Hanzer Verlag, München 1966.
7. I. MINOIU și N. TATU, Petrol și gaze, *3*, 197–208 (1969).
8. B. HOROVITZ, I. MINOIU ș.a., *Transmisii și variatoare prin curele și lanțuri*, Edit. tehnică, București 1971.
9. N. N. ANTONESCU și TH. HUIDU, St. cerc. mec. apl., **30**, *3*, 627–643 (1971).
10. G. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, Edit. Didactică și Pedagogică, București 1969.
11. D. S. PONOMARIOV și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini* (vol. 1, 2 și 3) Edit. tehnică, București 1960–1962.
12. E. LEHER, Spannungsverteilung in Konstruktionselementen, V.D.I. Verlag GMBH, Berlin, 7, 1934.
13. O. C. ZIENKIEWICZ, The Finite Element Method in Engineering Science, McGrow-Hill, London ș.a., 1971.
14. G. BUZDUGAN și M. BLUMFELD, *Tensometrie electrică rezistivă*, Editura tehnică, București, 1968.

DETERMINAREA ANALITICĂ A DEFORMAȚIILOR ȘI EFORTURILOR ÎN ÎMBINAREA FILETATĂ CONICĂ, LA ÎNȘURUBAREA CU FORȚĂ DE PRESTRÎNGERE

de V. ULMANU
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se cercetează starea de deformații și eforturi în îmbinarea filetată conică sub acțiunea sarcinii de prestrîngere și a efectului încovoietor al componentelor acesteia distribuite pe spirele filetului, ținînd seama de rigiditatea variabilă a cepului și mufei filetate.
Legea de distribuție a sarcinii de prestrîngere în lungul axei filetului se determină rezolvînd în eforturi ecuația de compatibilitate a principalelor deformații ale filetului.
Determinarea deformației cepului sub acțiunea efectului încovoietor al forțelor distribuite pe spire se efectuează asimilînd cepul cu un înveliș cilindric avînd grosimea de perete variabilă în lungul axei.

Filetele conice înșurubate cu forță de prestrîngere se utilizează pentru transmiterea eforturilor mari, cu asigurarea simultană a etanșeității. Unul din domeniile importante de utilizare îl constituie îmbinările garniturii de foraj, denumite filete speciale, un tip reprezentativ fiind filetul RS1, prezentat în figura 1. Aplicațiile practice se vor referi la acest tip de filet.

Datorită formei constructive, pe porțiunea filetată variază atît rigiditatea cepului și mufei, cît și efectul încovoietor exercitat asupra cepului sau mufei de forțele distribuite pe spirele filetului.

În lucrare se determină repartiția deformațiilor și eforturilor în îmbinarea filetată înșurubată cu forță de prestrîngere, ținînd seama și de efectul încovoietor exercitat asupra pieselor filetate de forțele distribuite pe spire, considerînd cepul și mufa de rigiditate variabilă.

1. DETERMINAREA LEGII DE REPARTIZARE A FORȚEI DE PRESTRÎNGERE ÎN ÎMBINAREA FILETATĂ CONICĂ

1.1. ECUAȚIA DE COMPATIBILITATE A DEFORMAȚIILOR

Se exprimă analitic faptul că atît deformațiile spirelor, cît și ale pieselor filetate trebuie să fie compatibile, respectiv modificarea pasului datorită alungirii cepului și comprimării mufei sub acțiunea sarcinilor

axiale trebuie să fie permisă atît prin încovoierea spirelor, cît şi prin deplasarea radială relativă între cep şi mufă. Exprimînd în eforturi ecuaţia de compatibilitate a deformaţiilor, se obţine ecuaţia de determinare a distribuţiei de eforturi în îmbinare, [1], [2], [3].

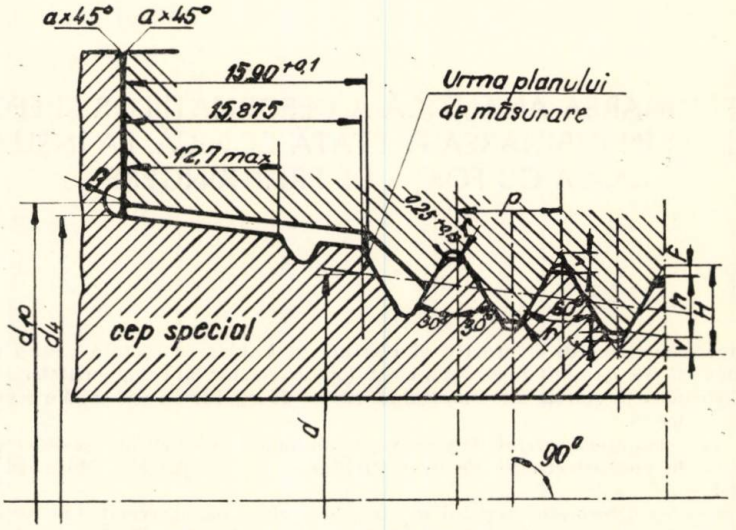


Fig. 1. — Geometria filetului special.

Datorită faptului că la înşurubarea filetului apare blocaj pe umerii racordului special, în îmbinare se dezvoltă următorul sistem de forţe (fig. 2):

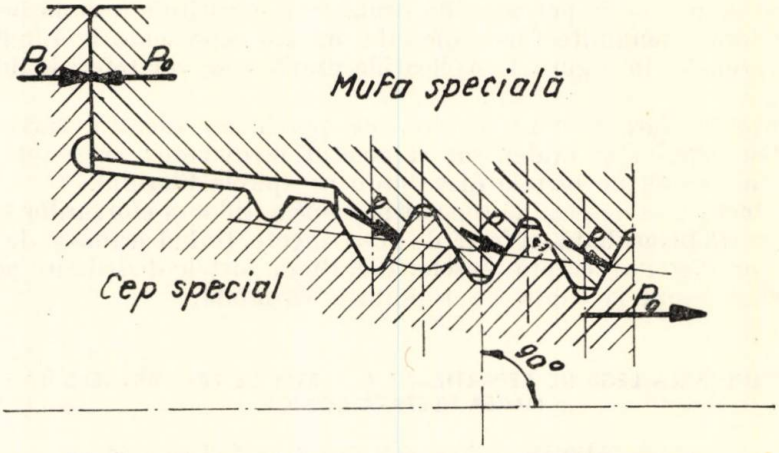


Fig. 2. — Sistemul de forţe în îmbinarea filetată prestrînsă.

P_0 — forţa de tracţiune în cep, respectiv compresiune în mufă;
p — presiuni normale la suprafaţa spirelor.

Presiunile normale la suprafaţa spirelor pot fi descompuse într-o componentă radială, p_r, şi una axială, p_a.

Sub acţiunea forţelor rezultante presiunilor se produc următoarele deformaţii principale ale cepului, mufei şi spirelor :

— componenta axială a presiunii pe spiră produce încovoierea spirei, a cărei săgeată în direcţia axială estei notată y;

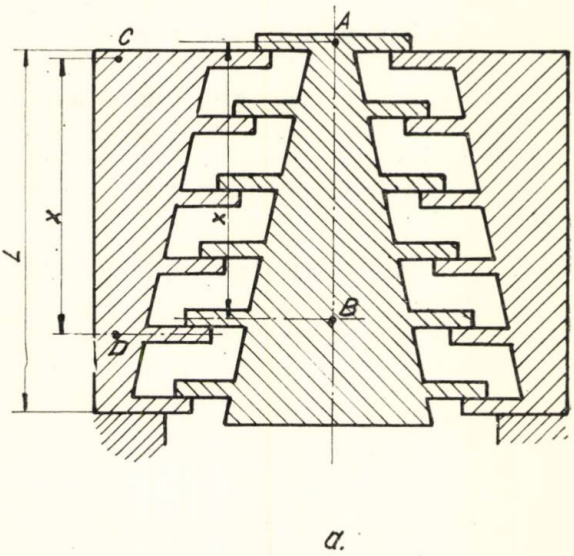
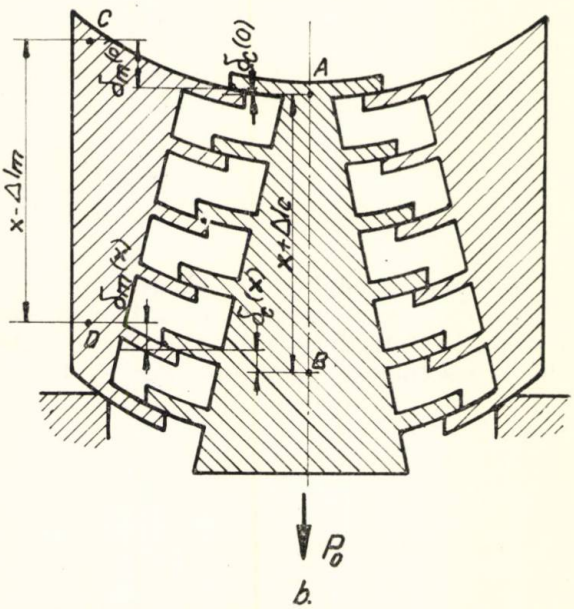


Fig. 3. — Reprezentarea schematizată a îmbinării filetate conice; *a* — înainte de deformare; *b* — în stare deformată.



— componenta radială a presiunii pe spiră produce o deplasare radială a cepului şi mufei, notată u;

— sarcina axială acţionînd asupra cepului şi mufei produce alungirea respectiv comprimarea acestora, notată Δl.

Egalitatea deformațiilor se poate scrie adoptînd pentru îmbinarea filetată conică reprezentarea schematizată din figura 3, în care s-a notat cu x o lungime curentă, iar indicii au semnificația : c — cep, m — mufă, iar o — planul de origine.

Notînd δ deplasarea unei spire de filet în direcție axială datorită încovoierii și deplasării radiale a elementului filetat, rezultă

$$\delta = y + u.\operatorname{tg}\ \beta, \tag{1}$$

β fiind jumătate din unghiul profilului filetului.

Din figura 3*b* se poate scrie ecuația de compatibilitate a deformațiilor, [1] :

$$x + \Delta l_c, + \delta_c(0) + \delta_m(0) = x - \Delta l_m + \delta_c(x) + \delta_m(x) \tag{2}$$

sau

$$\Delta l_c + \Delta l_m = [\delta_c(x) + \delta_m(x)] - [\delta_c(0) + \delta_m(0)]. \tag{3}$$

1.2. DEFORMAȚIA AXIALĂ A CEPULUI ȘI MUFEI

Sub acțiunea forței de prestrîngere P_0, într-o secțiune transversală a cepului sau mufei iau naștere eforturi unitare normale, variabile în lungul axei filetului. Sub acțiunea lor, o lungime x din cep sau mufă se va alungi, respectiv comprima, cu valoarea

$$\Delta l_c = \int_0^x \frac{\sigma_{cep}(x)}{E_c}\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

$$\Delta l_m = \int_0^x \frac{\sigma_m(x)}{E_m}\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

E fiind modulul de elasticitate.

În scopul exprimării deformațiilor din ecuația (2) în funcție de aceeași variabilă, se introduce noțiunea „intensitate a forței axiale distribuite pe lungimea filetată", notată $q(x)$, [1]. Din definiție rezultă relația

$$\int_0^L q(x)\cdot \mathrm{d}x = P_0, \tag{6}$$

L fiind lungimea filetată.

Ca urmare, sarcina axială dezvoltată într-o secțiune curentă la distanța x de origine se poate exprima cu relația

$$P(x) = \int_0^x q(x)\cdot \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Utilizînd relaţia (7), se pot exprima eforturile unitare σ_c şi σ_m, în ipoteza că acestea se distribuie uniform pe secţiunea transversală, astfel:

$$\sigma_c(x) = \frac{P(x)}{F_c(x)} = \frac{\int_0^x q(x)\cdot \mathrm{d}x}{F_c(x)}, \tag{8}$$

$$\sigma_m(x) = \frac{P(x)}{F_m(x)} = \frac{\int_0^x q(x)\cdot \mathrm{d}x}{F_m(x)}, \tag{9}$$

$F_c(x)$,$F_m(x)$ reprezintă aria transversală a cepului, respectiv a mufei. Înlocuind expresiile (8) şi (9) în relaţiile (4) şi (5) şi ţinînd seama că cepul şi mufa se execută din acelaşi material ($E_c = E_m = E$), rezultă expresiile deformaţiilor axiale ale cepului şi mufei:

$$\Delta l_c = \frac{1}{E}\int_0^x \frac{\int_0^x q(x)\cdot \mathrm{d}x}{F_c(x)}, \tag{10}$$

$$\Delta l_m = \frac{1}{E}\int_0^x \frac{\int_0^x q(x)\cdot \mathrm{d}x}{F_m(x)}. \tag{11}$$

1.3. DEFORMAŢIA DE ÎNCOVOIERE A SPIREI

Pentru determinarea săgeţii spirei sub acţiunea componentei axiale a presiunii uniform distribuite pe spiră, $p_a(x)$, spira filetului se asimilează cu o placă circulară încastrată pe conturul interior (fig. 4), a cărei grosime scade liniar de la centru spre periferie, după relaţia

$$H = H_{\max}\left(1 - \frac{r_s}{a}\right), \tag{12}$$

unde

r_s este raza curentă a spirei;

a — raza unui cerc ce trece prin vîrful geometric al spirei;

H, $H_{\max}$ — înălţimea curentă, respectiv maximă, a spirei.

Pentru exprimarea deformaţiei de încovoiere a spirei în funcţie de variabila $q(x)$, se exprimă un element de sarcină $\mathrm{d}P(x)$ care acţionează pe lungimea elementară $\mathrm{d}x$ atît în funcţie de $p_a(x)$, cît şi de $q(x)$, rezultînd:

$$p_a(x) = q(x)\frac{p}{F_s}, \tag{13}$$

unde

p este pasul filetului;

F_s — suprafaţa spirei filetului proiectată într-un plan perpendicular pe axa filetului.

Se foloseşte metodologia expusă în lucrarea [4], integrînd ecuaţia diferenţială de ordinul doi determinată pentru plăci de grosime variabilă.

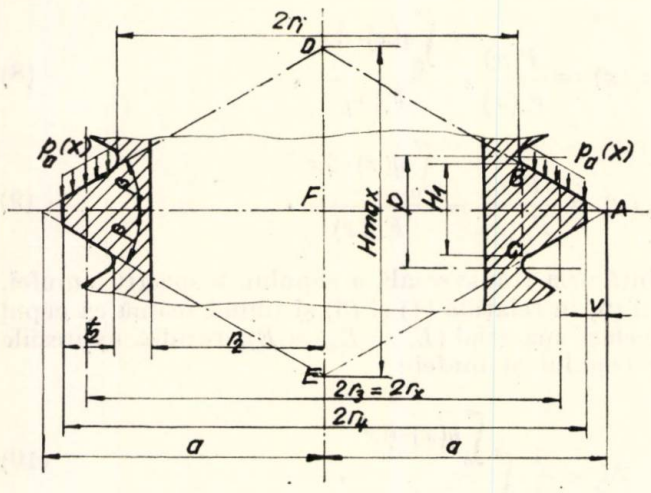


Fig. 4. — Geometria unei spire de filet.

Pentru filetul propus spre studiu, constantele de integrare au rezultat:

$$A = 0{,}730129\,\frac{p_a(x)\cdot a^3}{2\cdot D_{\max}};$$

$$B = -\,0{,}1271001\,\frac{p_a(x)\cdot a^3}{2\cdot D_{\max}},$$

D fiind rigiditatea la încovoiere a plăcii (spirei). S-a determinat apoi expresia săgeţii spirei, constanta de integrare avînd valoarea:

$$C = -\,0{,}363833\,\frac{p_a(x)\cdot a^4}{2\cdot D_{\max}}.$$

Folosind aceste valori, se obţine expresia finală a săgeţii spirei:

$$y = \frac{p_a(x)a^4}{2D_{\max}}\left\{-0{,}363833 + 0{,}730129(\ln\rho+2\rho) - 0{,}1271001\left[-2\rho - \right.\right.$$

$$-\ln(1-\rho)+\frac{1}{1-\rho}\Big]-\frac{1}{9}\rho+\frac{1}{6}\ln\rho-\frac{29}{36}\ln(1-\rho)-$$

$$-\frac{7}{36(1-\rho)}+\rho_4^2\left[-\frac{1}{6}\ln\rho+\frac{1}{2}\ln(1-\rho)+\frac{1}{3(1-\rho)}\right]+ \qquad (14)$$

$$+\frac{1+\rho_4^2}{6}\left[2\rho\ln(1-\rho)-2\rho-2\ln(1-\rho)-\rho-\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^3}{9}-\frac{\rho^4}{16}\right]+$$

$$\left.+\frac{\rho_4^2}{6}\left[-2(\rho\ln\rho-\rho)-\frac{8}{3}\ln(\rho+1)-\frac{10}{3(\rho+1)}+\frac{2}{(\rho+1)^2}-\ln\frac{\rho+1}{\rho-1}\right]\right\};$$

ρ reprezintă o variabilă curentă în planul spirei, definită ca mărime adimensională de relaţia

$$\rho = \frac{r_s}{a}.$$

În ecuaţia de compatibilitate a deformaţiilor se foloseşte săgeata determinată pentru diametrul mediu al filetului, respectiv pentru $\rho = 0{,}955$. Calculînd valoarea rigidităţii la încovoiere a spirei, $D_{max} = 0{,}30334 \cdot 10^4 \cdot a^3$, rezultă

$$y = 0{,}01292 \cdot 10^{-4} \cdot a \cdot p_a(x).$$

În această expresie se înlocuieşte dimensiunea a prin raza curentă $r(x)$, pe baza relaţiei

$$a = r(x) + 2{,}187 \text{ mm}$$

dedusă din figura 4, observînd că putem considera cu o bună aproximaţie valoarea 2,187 mm mică în raport cu raza $r(x) \approx 47$ mm.

Rezultă în final

$$y = 0{,}01346 \cdot 10^{-4} \cdot p_a(x) \cdot r(x). \tag{15}$$

1.4. DEPLASAREA RADIALĂ RELATIVĂ ÎNTRE CEP ŞI MUFĂ DATORITĂ COMPONENTEI RADIALE A PRESIUNII PE SPIRĂ

Sub acţiunea presiunilor radiale, cepul şi mufa suferă deplasări radiale de sens opus care însumîndu-se conduc la o deplasare radială relativă. Ţinînd seama că filetul are bisectoarea flancurilor perpendiculară pe axă, rezultă

$$p_r(x) = p_a(x) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \varphi),$$

unde β este semiunghiul flancurilor;

φ — unghiul de frecare.

Deplasarea radială relativă a mufei şi cepului se determină cu formulele lui Lamé pentru tuburi cu pereţi groşi, [4], pentru presiunea radială uniform distribuită pe lungimea unui pas, avînd valoarea

$$p_a(x) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \varphi) \frac{t_2}{p}.$$

Rezultă deplasările radiale ale cepului şi mufei:

$$u_c(x) = r(x) \frac{\operatorname{tg}(\beta - \varphi) \cdot t_2}{p \cdot E} \left[\frac{1 + \left(\frac{r_2}{r_x}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_2}{r_x}\right)^2} - \mu \right] \cdot p_a(x), \tag{16}$$

$$u_m(x) = r(x) \frac{\operatorname{tg}(\beta - \varphi) \cdot t_2}{p \cdot E} \left[\frac{1 + \left(\frac{r_x}{r_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_x}{r_1}\right)^2} + \mu \right] \cdot p_a(x). \tag{17}$$

Pentru a exprima deplasările radiale în funcţie de $q(x)$, se foloseşte expresia :

$$p_a(x) = q(x)\,\frac{p}{2\pi \cdot r(x) \cdot t_2}\cdot$$

1.5. LEGEA DE VARIAŢIE A SARCINII DE PRESTRÎNGERE ÎN LUNGUL AXEI FILETULUI

Înlocuind expresiile determinate pentru deplasări şi deformaţii în ecuaţia (2) de compatibilitate a deformaţiilor se obţine ecuaţia de determinare a sarcinii $q(x)$ distribuite pe lungimea filetului :

$$\frac{1}{E}\left[\int_0^x \frac{\int_0^x q(x)\mathrm{d}x}{F_c(x)}\mathrm{d}x + \int_0^x \frac{\int_0^x q(x)\mathrm{d}x}{F_m(x)}\right] = 2.0{,}1346\cdot 10^{-5}\frac{p}{2\pi t_2}\,q(x) +$$

$$+\frac{\mathrm{tg}(\beta-\varphi)\mathrm{tg}\beta}{2\pi E}\cdot\left[\frac{1+\left(\frac{r_2}{r_x}\right)^2}{1-\left(\frac{r_2}{r_x}\right)^2}+\frac{1+\left(\frac{r_x}{r_1}\right)^2}{1-\left(\frac{r_x}{r_1}\right)^2}\right]q(x) -$$

$$-\,2\cdot 0{,}1346\cdot 10^{-5}\,\frac{p}{2\pi t_2}\,q(0) - \frac{\mathrm{tg}(\beta-\varphi)\mathrm{tg}\beta}{2\pi E}\times$$

$$\times\left[\frac{1+\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2}{1-\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2}+\frac{1+\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}{1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}\right]q(0). \qquad (18)$$

Pentru filetul propus spre studiu, introducînd notaţii simplificatoare, rezultă

$$G = 0{,}2692\cdot 10^{-5}\,\frac{p}{2t_2} = 0{,}26\cdot 10^{-5},$$

$$L = \frac{\mathrm{tg}(\beta-\varphi)\mathrm{tg}\beta}{2E} = 0{,}141\,\frac{1}{E},$$

$$\gamma(x) = \frac{1+\left(\frac{r_2}{r_x}\right)^2}{1-\left(\frac{r_2}{r_x}\right)^2}+\frac{1+\left(\frac{r_x}{r_1}\right)^2}{1-\left(\frac{r_x}{r_1}\right)^2}\cdot$$

Introducînd aceste notații în ecuația (18) și derivînd în raport cu x în scopul eliminării integralei, ținînd seama că r_0 = constant, se obține

$$\frac{1}{E}\left[\frac{1}{F_c(x)}+\frac{1}{F_m(x)}\right]\int_0^x q\,(x)\mathrm{d}x=\frac{G}{\pi}q'(x)+\frac{L}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\gamma(x)\cdot q(x)]. \quad (18')$$

Pentru rezolvarea ecuației integrodiferențiale (18')se caută întîi obținerea unei forme mai comode, deoarece atît secțiunea cepului, $F_c(x)$, cît și a mufei, $F_m(x)$, sînt variabile cu x. În acest scop, se aproximează expresiile $\frac{1}{F_c(x)}+\frac{1}{F_m(x)}$ și $\gamma(x)$ cu polinoame în x, astfel:

$$\frac{1}{F_c(x)}+\frac{1}{F_m(x)}=2{,}161\cdot10^{-7}x^2-3{,}101\cdot10^{-5}x+27{,}091\cdot10^{-4}, \quad (19)$$

$$\gamma(x)=6{,}238\cdot10^{-4}x^2-5{,}470\cdot10^{-2}x+7{,}64. \quad (20)$$

Înlocuind expresiile (19) și (20) în ecuația (18'), se obține:

$$\frac{1}{\pi E}(2{,}161\cdot10^{-7}x^2-3{,}101\cdot10^{-5}x+27{,}091\cdot10^{-4})\int_0^x q(x)\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{0{,}26\cdot10^{-5}}{\pi}q'(x)+\frac{0{,}141}{\pi E}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[q(x)\cdot(6{,}238\cdot10^{-4}x^2-5{,}470\cdot10^{-2}x+7{,}64)\right]. \quad (21)$$

Pentru rezolvarea ecuației integrodiferențiale (21), se împarte ecuația la coeficientul integralei apoi se derivează încă o dată obținînd o ecuație diferențială de ordinul doi cu coeficienți variabili, de forma

$$q(x)+P_1(x)\cdot q'(x)+P_2(x)\cdot q''(x)=0. \quad (22)$$

S-a utilizat o metodă de integrare numerică, [5], folosind un calculator electronic. Notînd cu h lungimea pasului de discretizare, expresiile derivatelor sînt:

$$\frac{\mathrm{d}q(x)}{\mathrm{d}x}\approx\frac{q_{i+1}-q_i}{h},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q(x)}{\mathrm{d}x^2}\approx\frac{q_{i-1}-2q_i+q_{i+1}}{h^2}.$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația (22), se obține relația de recurență între valorile funcției în trei puncte succesive:

$$q_{i+1}=\frac{P_{1i}\cdot h-h^2+2P_{2i}}{P_{1i}\cdot h+P_{2i}}q_i-\frac{P_{2i}}{P_{1i}\cdot h+P_{2i}}q_{i-1}. \quad (23)$$

Condiţiile la limită sînt următoarele:
— pentru $x = 0$, din ecuaţia (21) se obţine:

$$q_1 = 1{,}033 q_0,$$

— observînd că ecuaţia diferenţială conţine variabila $q(x)$ în toţi termenii, se admite o valoare arbitrară pentru $q(0)$, iar valorile $q(x)$ rezultă

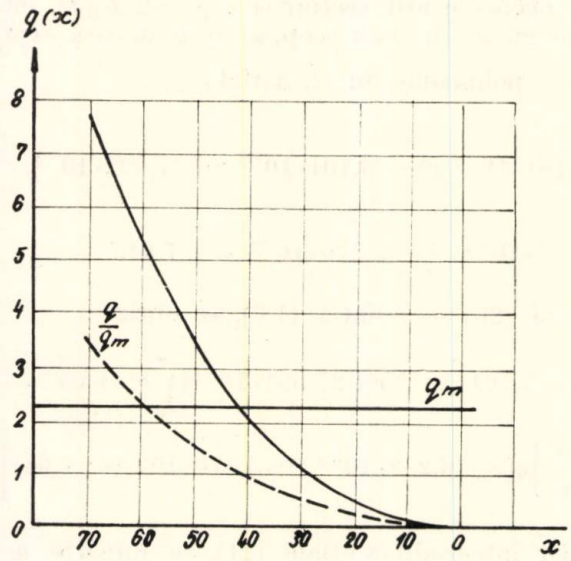


Fig. 5. — Variaţia sarcinii $q(x)$ în lungul axei filetului.

relative la această valoare. Deoarece valoarea iniţială $q(0)$ este arbitrară, după rezolvarea numerică se translatează abscisa în punctul de ordonată $q(0) = 0$.

S-a determinat repartizarea sarcinii axiale în cep, reprezentată în figura 5.

1.6. DETERMINAREA REPARTIZĂRII SARCINII DE PRETENSIONARE PE SPIRELE FILETULUI

Din modul de deducere a variaţiei sarcinii axiale în lungul filetului conic, rezultă că valorile $q(x)$ sînt dependente de valoarea iniţială. În scopul eliminării acestui considerent, se determină o sarcină medie constantă echivalentă încărcării totale, raportînd apoi ordonatele diagramei $q(x)$ la sarcina medie, q_m. Conform definiţiei, sarcina medie rezultă:

$$q_m = \frac{P_0}{L} = \frac{\int_0^L q(x)\, \mathrm{d}x}{L}, \tag{24}$$

$L = 70$ mm la filetul propus pentru studiu.
Integrînd grafic se obţine sarcina medie $q_m = 2{,}29$ Kgf/mm.

Raportînd ordonatele $q(x)$ la sarcina medie, se obţine variaţia sarcinii axiale distribuită pe lungimea filetului ca mărime adimensională, reprezentată în figura 5 cu linie întreruptă. Se constată că solicitarea maximă este de circa 3,4 ori solicitarea medie.

În scopul obţinerii sarcinilor pe spire, se integrează funcţia $q(x)$ în limitele unui pas :

$$\begin{aligned} P_{01} &= \int_0^p q(x)\mathrm{d}x, \\ P_{02} &= \int_p^{2p} q(x)\mathrm{d}x, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_{0n} &= \int_{(n-1)p}^{np} q(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{25}$$

Integrînd grafic şi raportînd apoi valorile obţinute la sarcina totală, se obţine încărcarea procentuală a spirelor filetului, prezentată în tabela 1.

Tabela 1

Încărcarea procentuală a spirelor filetului conic

Nr. de ordine al spirei faţă de vîrful conului.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Sarcina pe spiră, %	0	0,15	0,56	1,05	1,86	2,80	4	5,3	7,1	9,2	12	15	18,5	22,5
Sarcina cumulată în dreptul spirei, %	0	0,15	0,71	1,76	3,62	6,42	10,42	15,72	22,8	32	44	59	77,5	100

2. DETERMINAREA ANALITICĂ A DEFORMAŢIILOR ŞI EFORTURILOR ÎN CEP DATORITĂ EFECTULUI ÎNCOVOIETOR AL FORŢELOR DISTRIBUITE PE SPIRE

Se ia în consideraţie solicitarea cepului prin momente încovoietoare variabile axial datorită momentului forţelor pe spire în raport cu centrul de greutate al secţiunii transversale curente cuprinsă între două genera-

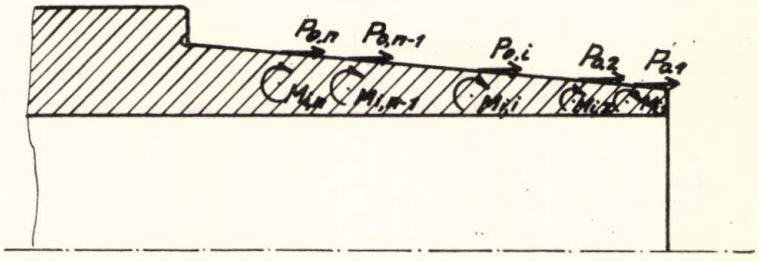


Fig. 6. — Solicitarea prin momente încovoietoare a cepului filetat.

toare distanţate cu o unitate (fig. 6). Solicitarea este variabilă atît datorită variaţiei forţelor pe spire, cît şi a braţului forţelor.

2.1. ECUAȚIA DE DETERMINARE A DEFORMAȚIEI SIMETRICE A CEPULUI

S-a asimilat cepul cu un înveliș cilindric avînd grosimea de perete variabilă în lungul axei, solicitat cu moment încovoietor distribuit pe suprafață.

Considerînd echilibrul unui element de înveliș (fig. 7), presupunînd că forțele exterioare se reduc la un moment încovoietor variabil $M_i(x)$

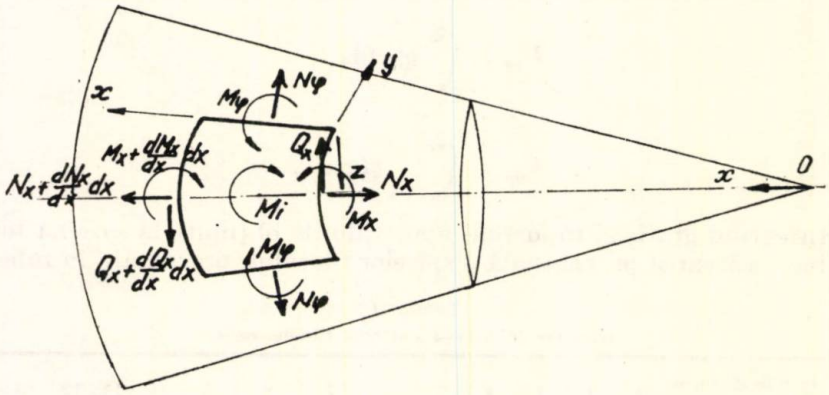


Fig. 7. — Starea de eforturi pe un element de înveliș.

rezultă [6]:

$$\frac{dN_x}{dx} r \cdot d\varphi \cdot dx = 0,$$

$$\frac{dQ_x}{dx} r \cdot d\varphi \cdot dx + 2N_\varphi \cdot dx \frac{d\varphi}{2} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{dM_x}{dx} r \cdot d\varphi \cdot dx + M_i(x) \cdot r \cdot d\varphi \cdot dx - Q_x \cdot r \cdot d\varphi \cdot dx = 0,$$

r fiind raza mediană a învelișului.
Prima ecuație arată că forțele N_x sînt constante și vor fi presupuse nule în cadrul acestui calcul. Celelalte două ecuații pot fi scrise sub forma:

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{r} N_\varphi = 0,$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x + M_i(x) = 0. \tag{27}$$

Considerînd deplasările punctelor suprafeţei mediane a învelişului şi aplicînd legea lui Hooke generalizată se obţin relaţiile :

$$N_\varphi = -\frac{E \cdot h \cdot w}{r},$$

$$M_\varphi = \mu \cdot M_x, \tag{28}$$

$$M_x = -D\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2},$$

în care

w este deplasarea radială a învelişului ;

h — grosimea învelişului ;

$D = \dfrac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a învelişului.

Explicitînd Q_x din prima ecuaţie (27) şi introducîndu-l în a doua, folosind relaţiile (28), se obţine ecuaţia de determinare a deformaţiei învelişurilor cilindrice circulare :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(D \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right) + \frac{E \cdot h}{r^2} w = \frac{\mathrm{d}M_i(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{29}$$

2.2. CALCULUL DEFORMAŢIILOR ŞI EFORTURILOR ÎN CEP

Deoarece învelişul (cepul) este de grosime variabilă, alegînd originea sistemului de axe ca în figura 7 rezultă relaţiile :

$$h = \alpha \cdot x, \tag{30}$$

$$D = \frac{E \cdot \alpha^3}{12(1-\mu^2)} x^3. \tag{31}$$

La filetul propus pentru studiu, rezultă

$$h = 0{,}125x \text{ m[m]},$$

$$D = 3{,}76\ x^3 \text{ [Kgf.mm]},$$

$$r \approx 36{,}32 \text{ [mm]}.$$

Expresia momentului încovoietor distribuit s-a determinat corespunzător unei valori curente a sarcinii de pretensionare, $P_0 = 240$ tf, repartizată pe spirele filetului conform legii deduse la § 1.6. :

$$M_i(x) = 0{,}21 \cdot x^2 - 15{,}65 \cdot x + 294\left[\frac{\text{Kgf} \cdot \text{mm}}{\text{mm}^2}\right]. \tag{32}$$

Înlocuind expresiile deduse pentru h, D, r și $M_i(x)$ în ecuația (29), se obține

$$3{,}76\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(x^3\,\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)+\frac{2{,}1\cdot 10^4\cdot 0{,}125}{36{,}32^2}\,x\cdot w=0{,}42x-15{,}65. \tag{33}$$

Pentru calculul deplasării radiale din ecuația diferențială de ordinul patru (33), se folosește o metodă numerică utilizînd diferențele centrale, lungimea pasului de discretizare fiind aleasă $h = 5$ mm [5]. Se obține o relație de recurență între valorile deplasărilor radiale în cinci puncte consecutive :

$$y_{i+2}(i^3+3i^2)-y_{i+1}(4i^3+6i^2-6i)+y_i(6i^3+1{,}23i)-y_{i-1}(4i^3-6i^2-$$

$$-6i)+y_{i-2}(i^3-3i^2)=2{,}795i-20{,}8. \tag{34}$$

Cele patru condiții la limită sînt :
— la fața frontală a cepului, respectiv $i = 8$:

$$M_x=0 \text{ sau } D\,\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=0, \text{ respectiv } y_9-2y_8+y_7=0, \tag{35}$$

$$Q_x=0 \text{ sau } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-D\,\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)+M_i(x)=0, \text{ respectiv}$$

$$4y_{10}-5y_9-6y_8=0\,; \tag{36}$$

— în dreptul umerilor de reazem al filetului, respectiv pentru $i = 26$ se consideră cepul încastrat, rezultînd :

săgeata nulă, sau $\quad y_{26}=0, \tag{37}$

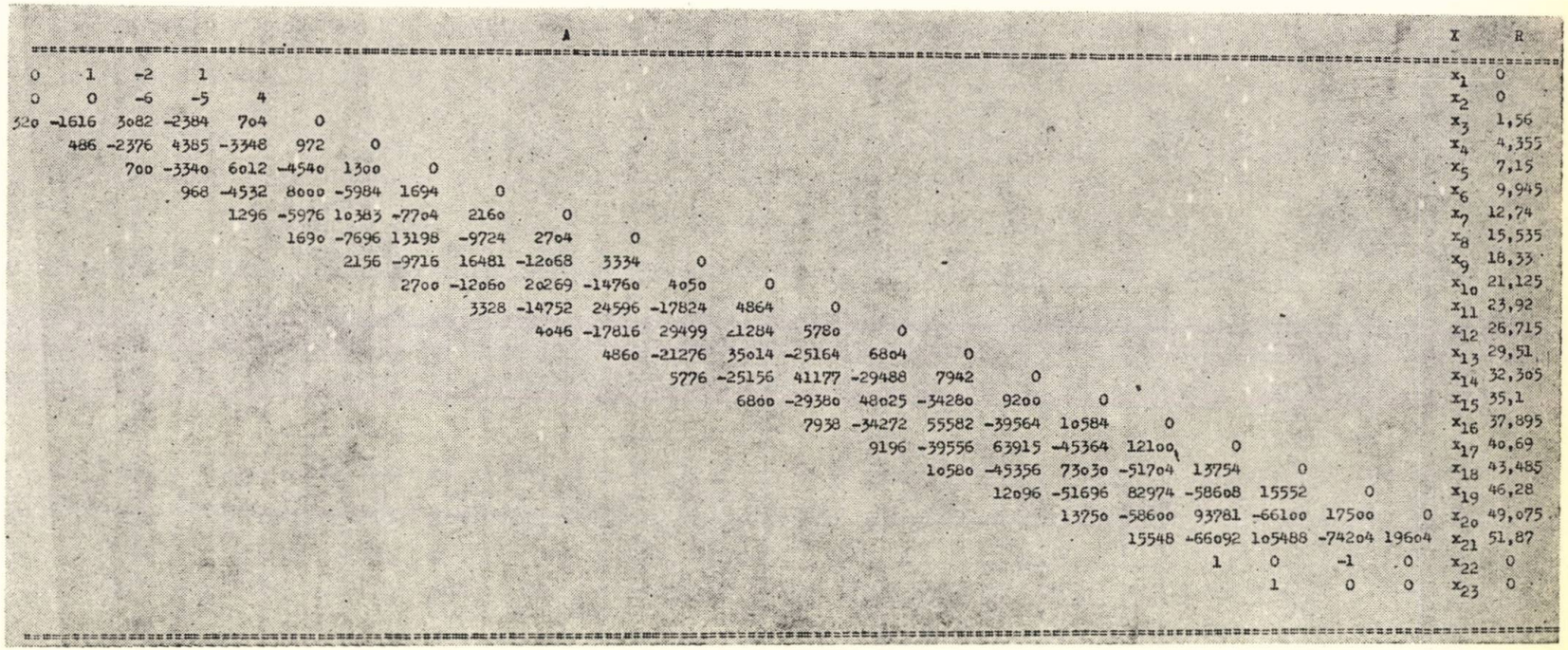
rotirea nulă, sau $\quad y'_{26}=0$ care conduce la

$$y_{27}-y_{25}=0. \tag{38}$$

Considerînd ansamblul celor 19 ecuații provenite din scrierea formulei de recurență pentru valorile $i = 8 \ldots 26$ și cele patru condiții la limită, rezultă un sistem de 23 ecuații liniare cu 23 de necunoscute prezentat în scriere matriceală, pentru filetul propus spre studiu și necunoscutele numerotate de la 1 la 23, în figura 8.

Membrul drept al ecuațiilor sistemului este proporțional cu valoarea solicitării exterioare, deci soluțiile sistemului vor fi proporționale cu solicitarea.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații s-au folosit algoritmul de calcul și subrutina „GELB", prezentate în [7], folosind un calculator electronic.



A																					X	R
0	1	-2	1																		x_1	0
0	0	-6	-5	4																	x_2	0
32o	-1616	3o82	-2384	7o4	0																x_3	1,56
	486	-2376	4385	-3348	972	0															x_4	4,355
		7oo	-334o	6o12	-454o	13oo	0														x_5	7,15
			968	-4532	8ooo	-5984	1694	0													x_6	9,945
				1296	-5976	1o383	-77o4	216o	0												x_7	12,74
					169o	-7696	13198	-9724	27o4	0											x_8	15,535
						2156	-9716	16481	-12o68	3334	0										x_9	18,33
							27oo	-12o6o	2o269	-1476o	4o5o	0									x_{10}	21,125
								3328	-14752	24596	-17824	4864	0								x_{11}	23,92
									4o46	-17816	29499	-1284	578o	0							x_{12}	26,715
										486o	-21276	35o14	-25164	68o4	0						x_{13}	29,51
											5776	-25156	41177	-29488	7942	0					x_{14}	32,305
												68oo	-29380	48o25	-3428o	92oo	0				x_{15}	35,1
													7938	-34272	55582	-39564	1o584	0			x_{16}	37,895
														9196	-39556	63915	-45364	121oo	0		x_{17}	4o,69
															1o58o	-45356	73o3o	-517o4	13754	0	x_{18}	43,485
																12o96	-51696	82974	-586o8	15552	x_{19}	46,28
																	13750	-586oo	93781	-66loo	175oo	0	x_{20}	49,o75
																		15548	-66o92	1o5488	-742o4	196o4	x_{21}	51,87
																			1	0	-1	0	x_{22}	0
																				1	0	0	x_{23}	0

Fig. 8. — Sistemul de ecuaţii scris sub formă matriceală.

Determinarea valorilor momentului M_x şi forţei N_φ s-a efectuat de asemenea numeric, pentru care au rezultat relaţiile finale:

$$M_x = -18{,}8 \cdot i^3 (w_{i+1} - 2w_i + w_{i+1}) \left[\frac{\text{Kgf} \cdot \text{mm}}{\text{mm}} \right],$$

$$N = -361 \cdot i \cdot w \left[\frac{\text{Kgf}}{\text{mm}} \right].$$

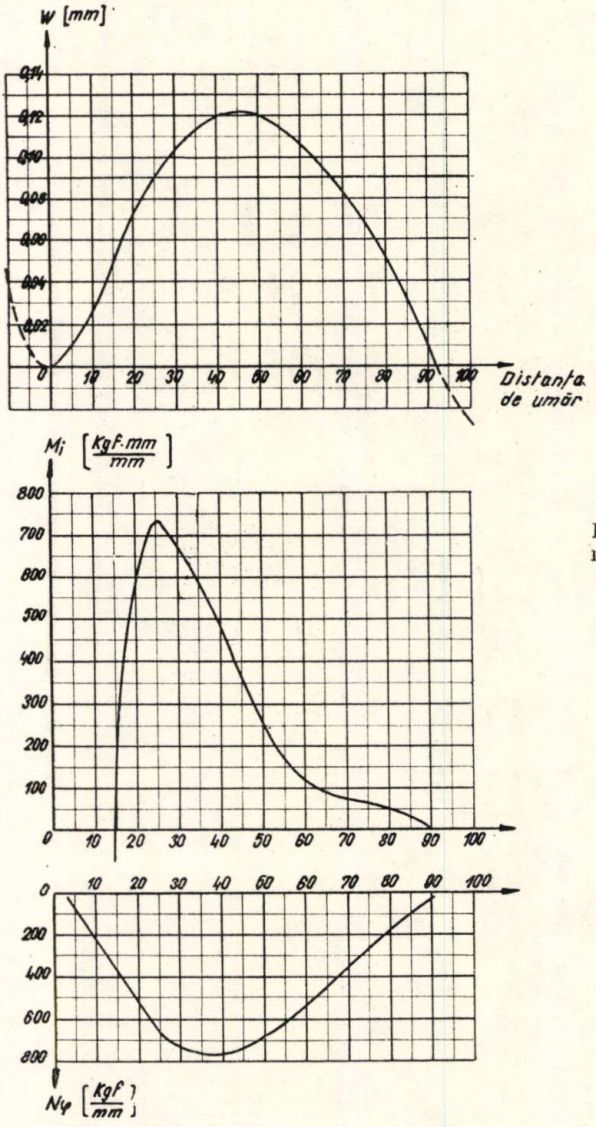


Fig. 9. — Valorile deplasărilor radiale w, momentului M_x şi forţei N_φ.

Valorile deplasării radiale w, momentului M_x şi forţei N_φ sînt reprezentate în figura 9.

Deplasarea radială a suprafeţei mediane a cepului are semnul pozitiv deci este orientată spre axa cepului. Valoarea maximă se află în zona centrală a filetului la circa 45 mm de umăr.

5. CONCLUZII

1. Calculul distribuţiei de eforturi în îmbinarea filetată conică sub acţiunea forţei de prestrîngere, ţinînd seama şi de efectul încovoietor al forţelor distribuite pe spire, s-a efectuat luînd în consideraţie deplasarea suprafeţei mediane a pieselor filetate. Ca urmare, pentru determinarea distribuţiei de eforturi pe grosimea pieselor este necesară o ipoteză de repartizare. Într-o primă aproximaţie eforturile unitare se pot admite uniform distribuite pe secţiunea transversală.

2. Metoda analitică de determinare a repartizării sarcinii de prestrîngere în cep a pus în evidenţă că solicitarea maximă este de circa 3,4 ori solicitarea medie şi se dezvoltă la baza cepului.

3. Metoda propusă permite determinarea analitică a influenţei diferitelor elemente ale filetului asupra gradului de neuniformitate a distribuţiei de eforturi.

4. Deformaţia radială a cepului este orientată spre axa lui şi este variabilă în lungul axei, avînd valoarea maximă la circa 45 mm de umerii îmbinării.

5. Efectul încovoietor al forţelor distribuite pe spirele filetului conic este sensibil, conducînd la modificarea substanţială a stării de deformaţii şi eforturi în îmbinarea filetată.

Primită la redacţie la 17 ianuarie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. Birger, *Rasciot rezibovih soedinenii*, Oboronghiz, Moskwa, 1959.
2. G. E. Paland, *Gewindelastverteilung in der Schrauben-Muttern Verbindung*, Konstruction **9** (1967).
3. E. Stoeckly, H. J. Macke, *Effect of Taper on Screw-Thread Load Distribution*, J. of Eng. for Ind. Trans. of ASME sr.B ian. 1952.
4. S. D. Ponomariov ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, Bucureşti, 1963, Edit. tehnică vol. 2.
5. M. G. Salvadori, M. L. Baron, *Metode numerice în tehnică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1972.
6. S. Timoshenko, *Théorie des Plaques et des Coques*, Paris et Liège 1951.
7. I. Dumitrescu, Vl. Dumitrescu, Gh. Spiridon, *Determinarea eforturilor din elementele turlelor de foraj de tip A prin utilizarea sistemelor de calcul automat*, Petrol şi Gaze, oct. 1973.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL UNUI AMORTIZOR ELECTRO-HIDRAULIC DE VIBRAȚII PENTRU MAȘINI-UNELTE

de I. GHEGHEA

Institutul politehnic București

În lucrare se descrie construcția, funcționarea și rezultatele obținute la reducerea amplitudinei oscilațiilor unui sistem ce simulează bara de alezat, cu ajutorul unui amortizor activ electrohidraulic. Alegerea corectă a fazei și amplitudinii semnalului de reacție permite o reducere apreciabilă a vibrațiilor cu o masă auxiliară relativ mică.
Se prezintă grafice de variație a amplitudinii oscilațiilor în funcție de frecvență și de mărimea masei auxiliare.

Autooscilațiile ce apar în procesul de așchiere a metalelor duc atît la o uzură prematură a organelor mașinii, cît și la micșorarea preciziei dimensionale și de formă a pieselor prelucrate. Din aceste motive se caută metode de reducere a vibrațiilor în special la mașinile unelte de precizie.

Una din aceste metode constă în utilizarea amortizorilor activi. Acestea aplică organului mașinii, ale cărui vibrații trebuie amortizate, oscilații în antifază cu cele existente, reducînd astfel amplitudinea acestora. Oscilațiile suplimentare se obțin cu un sistem compus dintr-o masă auxiliară introdusă în mișcare cu un sistem electrodinamic sau electro-hidraulic comandat la rîndul său de un semnal electric derivat de la organul în vibrație.

Rezultatele obținute în cazul folosirii unui vibrator electrodinamic sînt descrise în [1], [2]. Datorită faptului că aceste vibratoare au gabarit mare, nu întotdeauna este posibil să fie atașate la organul mașinii unelte.

Vibratoarele electrohidraulice, care au dimensiuni mult mai mici, înlătură acest neajuns. Despre utilizarea unui amortizor activ realizat pe cale electrohidraulică se comunică în [3].

În lucrarea de față se descrie construcția, modul de funcționare și rezultatele obținute cu un amortizor electrohidraulic, la amortizarea vibrațiilor unei bare încastrate la un capăt și liberă la celălalt care simulează bara de alezat. Experiențele au avut ca scop studierea influenței greutății masei auxiliare asupra reducerii amplitudinei oscilațiilor și punerea la punct a sistemului folosit.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 5, 1974, P. 891–896

Amplitudinea mare a oscilaţiilor în special la frecvenţa de rezonanţă a sistemului (organului) maşinii în vibraţie se datoreşte coeficientului mic de amortizare internă a metalelor din care sînt confecţionate piesele componente. Utilizarea amortizorului activ realizat pe cale electrohidrau-

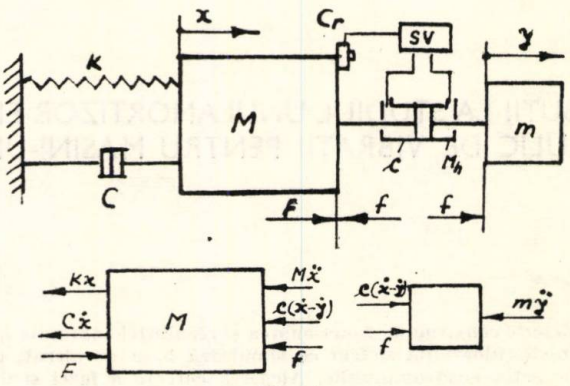


Fig. 1

lică are acelaşi efect ca mărirea coeficientului de amortizare internă a materialului.

Aceasta se poate demonstra considerînd sistemul principal în vibraţie ca o masă concentrată M de care printr-un motor hidraulic cu coeficientul de amortizare c se leagă masa auxiliară m (fig. 1) Masa M este introdusă în mişcare oscilatorie de forţa armonică F.

Motorul hidraulic în al cărui circuit se află o servovalvă (SV) comandată de semnalul electric dat de captorul Cr montat pe masa M, aplică atît masei M, cît şi masei m forţa f.

Ecuaţiile de mişcare a maselor M şi m sînt :

$$Mx - Cx + c(x - y) + Kx = F - f, \tag{1}$$

$$my - c(x - y) = f, \tag{2}$$

unde

M este masa sistemului principal;
m — masa auxiliară;
C — coeficientul de amortizare al sistemului principal:
c — coeficientul de amortizare a sistemului auxiliar (amortizor);
K — constanta elastică a sistemului principal;
F — forţa ce acţionează asupra sistemului principal;
f — forţa dată de sistemul auxiliar;
x,y — deplasarea sistemului principal şi, respectiv, auxiliar.

Înlocuind f din (2) în (1) se obţine

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + m\ddot{y} = F. \tag{3}$$

Din (3) rezultă că pentru a obține un coeficient de amortizare mărit este necesar ca $\ddot{y} \sim \dot{x}$. Deoarece servovalva introduce un defazaj între semnalul de intrare și cel de ieșire, variabil cu frecvența, pentru a obține $\ddot{y} \sim \dot{x}$ între traductorul de oscilații și servovalvă trebuie introdusă o instalație pentru schimbarea fazei semnalului electric.

În această situație ecuația (3) devine

$$M\ddot{x} + (C + K_1 m)\dot{x} + Kx = F, \tag{4}$$

unde

$$K_1 = \frac{A_m \cdot B \cdot D_m}{S},$$

A_m este amplitudinea răspunsului traductorului de oscilații;
B — coeficientul de amplificare al instalației electronice:
D_m — amplitudinea răspunsului servovalvei;
S — secțiunea activă a cilindrului motorului hidraulic.

Din ecuația (4) se observă că coeficientul de amortizare al sistemului combinat, compus din sistemul principal și cel auxiliar, depinde de produsul $K_1 m$. Deci cu creșterea masei m și a coeficientului K_1 scade amplitudinea oscilațiilor masei M. Prin folosirea unui traductor de oscilații și al unei servovalve cu un bun răspuns se mărește mult coeficientul K_1. În afară de aceasta, alegerea corectă a defazajului între oscilațiile sistemului

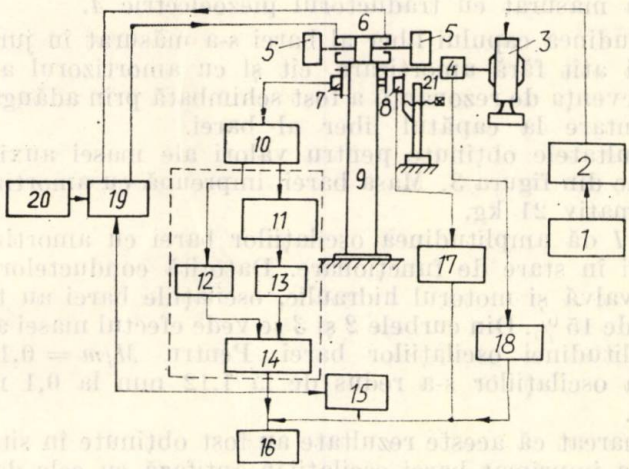


Fig. 2

principal și auxiliar este o condiție esențială pentru obținerea unor bune rezultate.

Pentru a demonstra practic cele deduse teoretic s-a conceput și realizat instalația reprezentată schematic în figura 2 unde

1. — reprezintă generator de oscilații;
2. — amplificator de putere,
3. — vibrator electrodinamic;
4. — dinamometru piezoelectric,

5. — masă auxiliară; *6.* — motor hidraulic; *7.* — vitezometru; *8.* — captor de deplasare; *9.* — bară de alezat; *10, 14, 17, 18.* — amplificator; *11.* — integrator; *12, 13* — potenţiometru; *15.* — dispozitiv de înregistrare; *16.* — osciloscop; *19.* — servovalvă; *20.* — pompă hidraulică, *21.* — tijă metalică.

Bara de alezat cu diametrul de 73,5 mm şi lungimea — 508 mm, avînd un orificiu interior cu diametrul de 50,8 mm, are un capăt fixat rigid într-un fundament din beton. La capătul liber al barei este fixată tija vibratorului electrodinamic *3* care imprimă barei mişcarea oscilatorie. Tot la acest capăt se găseşte vitezometrul *7* şi amortizorul activ compus din motorul hidraulic *6* şi masele auxiliare *5*.

Pentru a se obţine faza corectă, semnalul dat de vitezometru se amplifică şi se introduce în instalaţia electronică *IE*. Aici semnalele se integrează şi se adună cu cel de amplificator, iar apoi după amplificare se aplică servovalvei. Variind amplitudinea celor două semnale cu ajutorul potenţiometrelor *12* şi *13* se realizează un astfel de defazaj între oscilaţii barei şi cele ale masei auxiliare *m* încît să se obţină amortizarea maximă.

În timpul experienţelor a fost măsurată deplasarea capului liber al barei cu ajutorul captorului de deplasare inductiv *8*, ale cărei indicaţii au fost atît înregistrate, cît şi măsurate pe ecranul osciloscopului. Forţa aplicată barei de către vibratorul *3*, menţinută constantă în timpul experienţelor, s-a măsurat cu traductorul piezoelectric *4*.

Amplitudinea capului liber al barei s-a măsurat în jurul frecvenţei de rezonanţă atît fără amortizare, cît şi cu amortizorul avînd diferite mase *m*. Frecvenţa de rezonanţă a fost schimbată prin adăugarea de greutăţi suplimentare la capătul liber al barei.

Cu rezultatele obţinute pentru valori ale masei auxiliare *m* s-au trasat curbele din figura 3. Masa barei, împreună cu amortizorul, a totalizat aproximativ 21 kg.

Curba *1* dă amplitudinea oscilaţiilor barei cu amortizorul montat dar fără a fi în stare de funcţionare. Datorită conductelor de legătură dintre servovalvă şi motorul hidraulic, oscilaţiile barei au fost atenuate în proporţie de 15 %. Din curbele *2* şi *3* se vede efectul masei amortizorului asupra amplitudinei oscilaţiilor barei. Pentru $M/m = 0{,}15$ (curba *3*) amplitudinea oscilaţiilor s-a redus de la 1,12 mm la 0,1 mm; deci de peste 11 ori.

De remarcat că aceste rezultate au fost obţinute în situaţia în care amortizorul a imprimat barei oscilaţii în antifază cu cele date de vibratorul *3* — Cînd această condiţie nu este îndeplinită se obţine fie o amortizare mică, fie o amplificare a oscilaţiilor, în cazul cînd cele două mişcări aplicate barei sînt în fază.

Experienţele au fost repetate pentru o altă frecvenţă de rezonanţă a sistemului. Din figura 4 se observă o reducere mai mică a amplitudinii oscilaţiilor la aceeaşi masă a amortizorului şi acelaşi coeficient de amplificare a semnalului ce intră în servovalvă.

Această mişcare a amortizării se datoreşte înrăutăţirii răspunsului servovalvei cu mărirea frecvenţei.

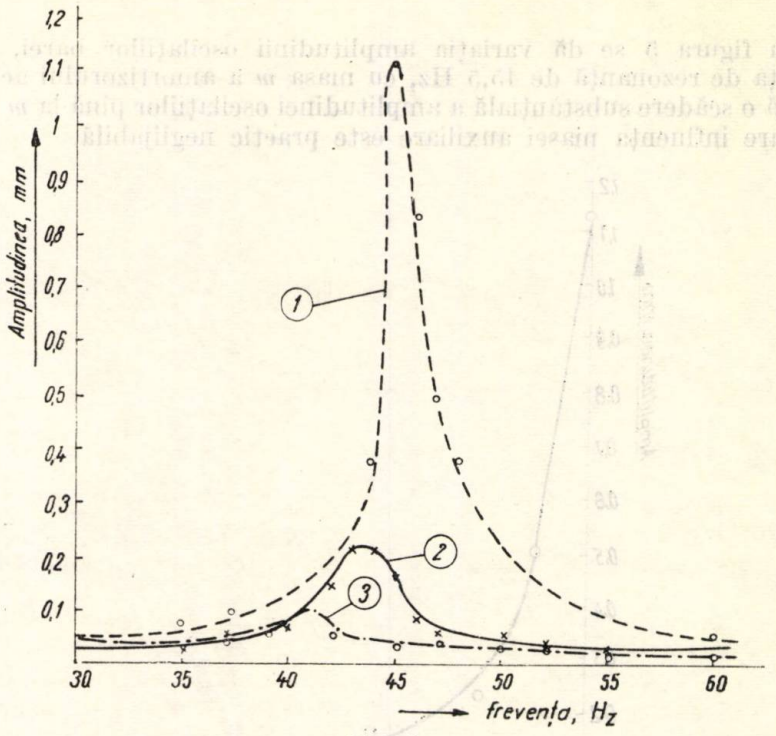

Amplitudinea, mm
1,2
1,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1
2
3
30
35
40
45
50
55
60
frevenţa, Hz

Fig. 3

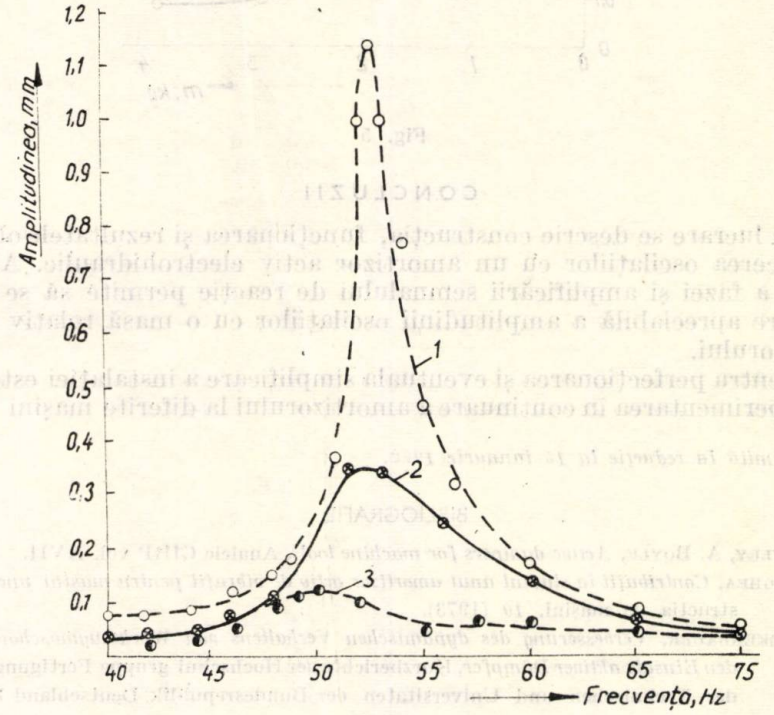

Amplitudinea, mm
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1
2
3
40
45
50
55
60
65
75
Frecvenţa, Hz

Fig. 4

În figura 5 se dă variaţia amplitudinii oscilaţiilor barei, pentru frecvenţa de rezonanţă de 45,5 Hz, cu masa m a amortizorului activ. Se constată o scădere substanţială a amplitudinei oscilaţiilor pînă la $m = 2$ kg după care influenţa masei auxiliare este practic neglijabilă.

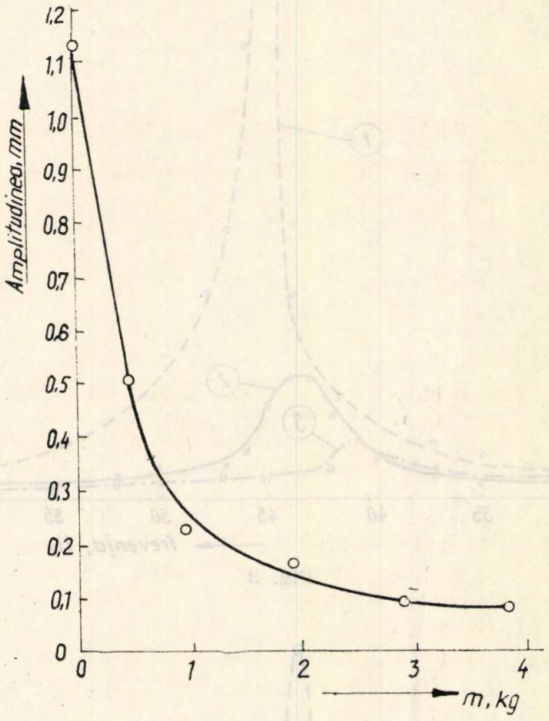


Fig. 5

CONCLUZII

În lucrare se descrie construcţia, funcţionarea şi rezultatele obţinute în reducerea oscilaţiilor cu un amortizor activ electrohidraulic. Alegerea corectă a fazei şi amplificării semnalului de reacţie permite să se obţină o scădere apreciabilă a amplitudinii oscilaţiilor cu o masă relativ mică a amortizorului.

Pentru perfecţionarea şi eventuala simplificare a instalaţiei este necesară experimentarea în continuare a amortizorului la diferite maşini unelte.

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1972.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cowley, A. Boyle, *Active dampers for machine tools*, Analele CIRP vol. XVII.
2. I. Gheghea, *Contribuţii la studiul unui amortizor activ de vibraţii pentru maşini unelte*, Construcţia de maşini, *10* (1973).
3. K. Beckenbauer, *Verbesserung des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschonen durch den Einsatz aktiver Dämpfer*, Kurzberichte der Hochschul gruppe Fertigungstechnik der Technischen und Universitaten der Bundesrepublik Deutschland *78* (1969).

CONTRIBUȚII PRIVIND STUDIUL UNOR INTERDEPENDENȚE ALE FENOMENELOR DINAMICE LA MAȘINILE DE RECTIFICAT EXTERIOR

de C. ISPAS
Institutul politehnic București

În lucrare se studiază interdependența dintre deplasările păpușii portpiatră pe două coordonate generalizate. Concluziile și rezultatele cercetării, cu implicații directe asupra preciziei de prelucrare la rectificare, pot fi folosite în activitatea cercetătorilor și proiectanților mașinilor de rectificat.

Rectificarea este unul dintre cele mai complexe procese de așchiere datorită faptului că scula — corp de rotație — posedă un foarte mare număr de tăișuri, a căror dispunere și capacitate de așchiere sînt aleatorii.

Prin rectificare se îndepărtează cu frecvență mare așchii de dimensiuni foarte mici, ceea ce ar permite generarea unor suprafețe foarte netede, cu înaltă precizie dimensională și de formă. În acest fel, fenomenele dinamice, care însoțesc acest proces de așchiere, au importanță primară în cadrul factorilor ce influențează parametrii calitativi ai suprafeței generate prin rectificare.

Studiul fenomenelor dinamice în procesul de rectificare se află, de cîțiva ani, în atenția tuturor centrelor de cercetare a mașinilor-unelte din lume deoarece rectificarea capătă o pondere din ce în ce mai mare la prelucrarea prin așchiere în majoritatea uzinelor constructoare de mașini, ceea ce reclamă cu acuitate îmbunătățirea performanțelor mașinilor de rectificat.

Cu toate că volumul cercetărilor asupra fenomenelor dinamice ale mașinilor de rectificat a devenit impresionant, nu s-au stabilit încă puncte unitare de vedere asupra problemelor generale, există o serie de contradicții privind aprecierea și determinarea stabilității sistemului dinamic al mașinii de rectificat, asupra caracterului vibrațiilor și naturii lor, asupra mecanismului de transpunere a vibrațiilor pe suprafața generată, o altă serie de probleme rămînînd încă neatacată (influența fenomenului de stick-slip, a ridicării saniei port-piatră și mesei, a parametrilor constructivi ai subansamblurilor mașinilor de rectificat asupra desfășurării fenomenelor dinamice etc.).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 5, 1974, P. 897—907

Situaţia se petrece deoarece numărul factorilor care participă în procesul dinamic la rectificare este mare, implicaţia lor şi legăturile dintre ei fiind deosebit de complexe şi intime. La cauzele enunţate ar trebui adăugate varietatea mare a soluţiilor constructive adoptate şi influenţa, uneori hotărîtoare, a particularităţilor de realizare tehnologică a acestora.

Dar, în acelaşi timp, trebuie consemnate şi importantele progrese înregistrate în studiul fenomenelor dinamice la rectificare. În acest sens, cea mai importantă problemă rezolvată constă în stabilirea unitară a componenţei sistemului dinamic la rectificare. Astfel, cercetătorii şcolilor de avangardă din acest domeniu [1] — [6] consideră sistemul dinamic al maşinilor de rectificat ca fiind format din interacţiunea sistemului elastic echivalent şi procesul de rectificare, analog sistemelor dinamice general valabile pentru maşinile-unelte, la care trebuie adăugate circuitele de reacţie datorate ondulaţiilor de pe suprafaţa piesei şi uzurii pietrei de rectificat [4].

Referitor la caracterul şi legităţile unor elemente ale acestui sistem dinamic, părerile cercetătorilor sînt întrucîtva convergente. Aşa se întîmplă cu procesul de rectificare, care, în marea majoritate a lucrărilor, se exprimă prin caracteristica sa statică. Singura excepţie o constituie lucrarea [5] în care autorii stabilesc pe cale experimentală caracteristica dinamică a procesului de rectificare. Interesant că în lucrările sale anterioare [4] etc., unul dintre autori susţine, în urma unor justificări convingătoare, larga aplicabilitate a caracteristicii statice a procesului de rectificare.

De asemenea, majoritatea cercetătorilor neglijează circuitul de reacţie datorat ondulaţiilor de pe suprafaţa piesei, considerînd că influenţa acestuia asupra desfăşurării fenomenelor este nesemnificativă. Lucrările lui R. Hahn, cel care a introdus pentru prima dată în sistem acest circuit de reacţie, susţine contrariul.

Pentru elucidarea problemei, trebuie avut în vedere raportul dintre duritatea pietrei de rectificat şi caracteristicile mecanice ale piesei de prelucrat [7].

Din lucrările publicate pînă în prezent, rezultă că în cadrul sistemului dinamic, problema cea mai controversată o constituie structura sistemului elastic echivalent al maşinilor de rectificat exterior. În acest sens, majoritatea cercetătorilor deosebesc sistemele elastice parţiale ale sculei şi piesei, separate între ele printr-un element practic nedeformabil — batiul. Unii dintre cercetători [1], [4] consideră că un rol hotărîtor în comportarea dinamică a acestei categorii de maşini-unelte o are numai sistemul elastic parţial al pietrei de rectificat, căruia i se atribuie un singur grad de libertate, celălalt sistem putînd fi neglijat. Alţi cercetători [2], [6] atribuie sistemului elastic al pietrei de rectificat două grade de libertate şi sistemului piesei un grad de libertate, ambele sisteme fiind dispuse în planul format de axele pietrei şi piesei. În alte lucrări [3] etc., sistemul elastic echivalent al maşinilor de rectificat exterior este considerat şi mai complex, dar dispus în acelaşi plan, enunţat mai sus. Este evident, că în astfel de condiţii, rezultatele cercetărilor teoretice sînt foarte diferite, iar justificările experimentale practic nereproductibile.

Considerîndu-se foarte complicată soluţionarea acestei probleme, în lucrarea de faţă se abordează elucidarea unei interdependenţe dintre fenomenele dinamice la maşinile de rectificat exterior, datorată tocmai complexităţii structurii sistemului elastic echivalent.

Pentru precizarea ariei preocupărilor analizei ce urmează se face o reprezentare a sistemului dinamic al maşinilor de rectificat exterior,

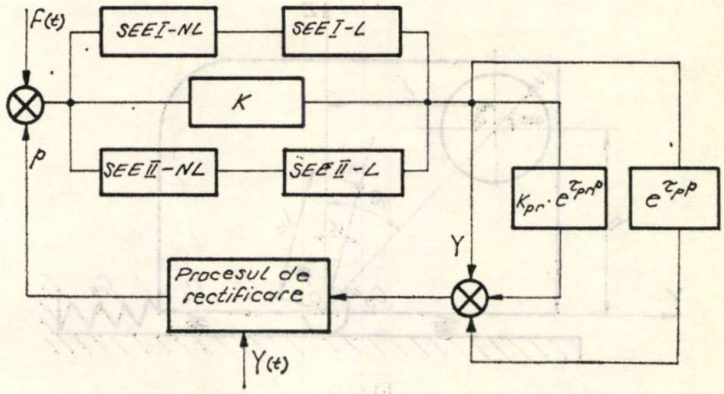


Fig. 1

în care sistemul elastic echivalent se detaliază prin generalizarea rezultatelor obţinute de cercetătorii din acest domeniu (fig. 1).

Pe schema prezentată, elementele SEEI-L şi SEEII-L reprezintă componentele liniare ale sistemelor parţiale ale pietrei de rectificat şi piesei; SEEI-NL şi SEEII-NL componentele neliniare ale aceloraşi sisteme parţiale. Componentele neliniare menţionate sînt datorate jocurilor, histerezisului, curburii caracteristicii, interdependenţei neliniare dintre fenomenele dinamice etc. ce nu pot fi evitate în condiţiile acţiunii forţelor cu valori mici din procesele de rectificare, frecare, din motoarele de acţionare.

Elementul K apare în sistemul dinamic ca urmare a particularităţii procesului de rectificare de a se desfăşura în condiţiile tensionării prealabile a sistemului elastic echivalent. Acest element reprezintă rigiditatea de contact dintre piatra de rectificat şi piesă şi a fost pus în evidenţă pentru prima dată de către R. Snoeys [6] ca avînd o caracteristică neliniară parabolică. Caracterul neliniar al rigidităţii de contact dintre piesă şi piatra de rectificat a fost obţinut pe cale experimentală prin solicitări statice, iar existenţa sa a fost sugerată de dependenţa vibraţiilor pietrei de rectificat în raport cu amplitudinea ondulaţiilor de pe periferia acesteia [2].

Lucrarea de faţă abordează problema formei constructive a păpuşii portpiatră şi studiul va cuprinde componenta liniară SEEI-L a sistemului parţial al sculei.

Astfel, analiza mişcărilor subansamblului păpuşii port-piatră în întregimea sa, considerat corp nedeformabil ca şi a influenţei acestora asupra preciziei de prelucrare, permite ca din totalul de şase grade de

libertate să poată fi considerate drept esențiale numai trei și anume, cele din planul ZOY (fig. 2).

În acest fel, studiul ce urmează cuprinde deplasările liniare pe direcțiile X și Z și rotirea φ a subansamblului în jurul centrului său de rigiditate. Pentru simplificare, se consideră că centrul de rigiditate se află în planul ghidajelor, determinarea poziției sale comportînd o

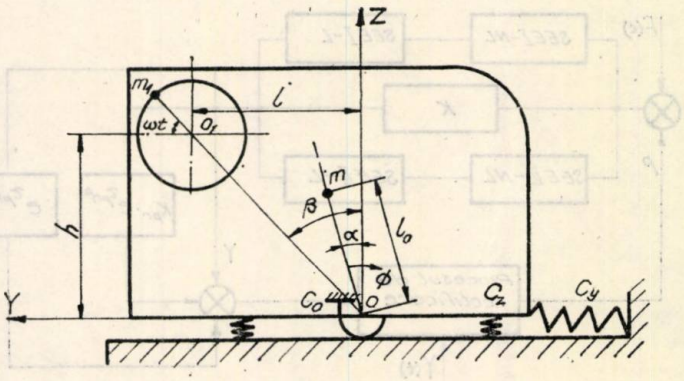


Fig. 2

metodică analogă determinării centrului de rigiditate la încovoierea unei bare cu secțiune asimetrică. Astfel, din ecuația de echilibru a momentelor forțelor, care acționează asupra păpușii portpiatră, scrisă în raport cu centrul de greutate al subansamblului (fig. 3),

$$f_1 C_1 (a - b) = f_2 \cdot C_2 \cdot b, \tag{1}$$

și din ecuația deformațiilor,

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{a - y_0}{y_0}, \tag{2}$$

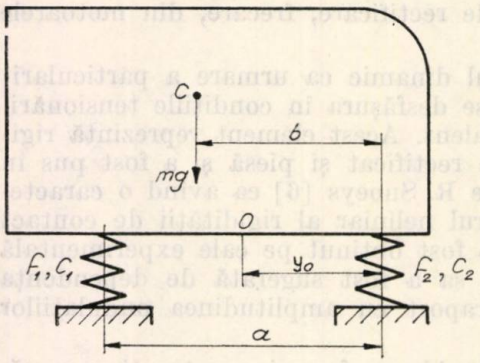


Fig. 3

rezultă relația de poziționare a centrului de rigiditate:

$$y_0 = \frac{C_1 a(a - b)}{C_1(a - b) + C_2 b}. \tag{3}$$

Pentru diverse tipuri de ghidaje, ca natură (cu frecare mixtă, hidrostatice și de rostogolire) și formă (plane, în V, dreptunghiulare și combinate) diferite vor fi rigiditățile C_1 și C_2 ale resoartelor echivalente și parametrii dimensionali a,b. Din studiul ce urmează se va vedea că poziția centrului de rigiditate influențează desfășurarea fenomenelor vibratorii ale păpușii portpiatră.

Între coordonatele generalizate alese există o strînsă interdependenţă, ceea ce face ca ecuaţiile diferenţiale ale sistemului considerat să fie complete, rezolvarea lor ridicînd serioase dificultăţi. Însă, în acest fel, interpretarea fizică a soluţiilor este mult mai comodă.

În studiul de faţă se urmăreşte a se stabili influenţa variaţiei poziţiei unghiulare φ a păpuşii portpiatră asupra variaţiei distanţei dintre piesă şi sculă, determinantă în aprecierea preciziei de prelucrare. Pentru a se realiza scopul propus, este suficient a se studia mişcările pe cele două direcţii : Y şi Φ. Astfel, pe lîngă uşurarea studiului se obţine o mai evidentă interdependenţă între mişcările de pe direcţiile considerate.

Trecînd la studiul propriu-zis, se scriu ecuaţiile diferenţiale de mişcare pe direcţiile Y şi Φ. În acest scop se utilizează principiul lui Lagrange.

Energia cinetică a sistemului este dată de realţia :

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(J_0 + ml_0^2)\,\dot{\varphi}^2 + ml_0\dot{y}\,\dot{\varphi}\cos\alpha. \tag{4}$$

Energia potenţială a aceluiaşi sistem se exprimă prin :

$$E_p = \frac{1}{2} C_y \cdot y^2 + \frac{1}{2} C_0\,\varphi^2. \tag{5}$$

Dintre forţele exterioare sistemului se au în vedere forţa de frecare şi forţele excitatoare datorate dezechilibrului organelor aflate în mişcare de rotaţie (piatra de rectificat cu axul său, rotorul motorului electric de acţionare a lanţului cinematic principal).

Considerînd că sînt îndeplinite condiţiile frecării mixte, a cărei expresie permite generalizarea soluţiilor obţinute, pentru cazul analizat se acceptă ipoteza proporţionalităţii dintre forţa de frecare şi valoarea instantanee a unghiului de rotire φ. Astfel,

$$F = k_0 \cdot \varphi. \tag{6}$$

Expresia forţei excitatoare, considerînd că acţionează în acelaşi plan, aplicată fiind în centrul pietrei de rectificat, este

$$P = m_1\, e\, \omega^2. \tag{7}$$

Pe baza ecuaţiei lui Lagrange,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i, \tag{8}$$

unde q_i reprezintă coordonata generalizată ;

Q_i — forța generalizată, ce acționează asupra sistemului pe direcția coordonatei q_i,

se obțin ecuațiile diferențiale :

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + ml_0\ddot{\varphi}\cos\alpha + C_y \cdot y &= m_1 e\omega^2 \cos\omega t - k_0 \cdot \varphi, \\ ml_0\ddot{y}\cos\alpha + (J_0 + ml_0^2)\,\ddot{\varphi} + C_0\varphi &= m_1 e\omega^2 L\cos\beta\cos\omega t, \end{aligned} \tag{9}$$

în care m este masa păpușii portpiatră;

m_1 — masa arborelui principal;

J_0 — momentul de inerție al păpușii portpiatră în raport cu centrul său de greutate;

C_y — rigiditatea sistemului pe direcția Y;

C_0 — rigiditatea torsională a subansamblului;

k_0 — coeficientul de proporționalitate a forței de frecare în raport cu unghiul de rotire;

e — excentricitatea arborelui principal cu piatra de rectificat montată;

ω — viteza unghiulară a arborelui principal.

Celelalte notații au semnificațiile indicate în figura 2.

După cum se poate constata, sistemul este format din ecuații diferențiale liniare, în rezolvarea sa putîndu-se utiliza transformata Laplace.

Pentru rezolvarea problemei se va considera p, care este o variabilă complexă, un operator diferențial și anume $p = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

În acest fel, transformata Laplace a sistemului de mai sus rezultă a fi :

$$\begin{aligned} d_{11}(p)\cdot y + d_{12}(p)\cdot\varphi &= m_1\, e\omega^2 \frac{p}{p^2+\omega^2}, \\ d_{21}(p)\cdot y + d_{22}(p)\cdot\varphi &= m_1\, e\omega^2 \frac{p}{p^2+\omega^2} L\cos\beta, \end{aligned} \tag{10}$$

unde

$$d_{11}(p) = mp^2 + C_y,$$

$$d_{22}(p) = (J_0 + ml_0^2)\,p^2 + C_0,$$

$$d_{12}(p) = ml_0\cos\alpha\cdot p^2 + k_0,$$

$$d_{21}(p) = ml_0\cos\alpha\cdot p^2.$$

Cu ajutorul teoremei lui Cramer, soluția în raport cu necunoscuta y se exprimă prin

$$Ly(p) = \frac{m_1\, e\omega^2 \cdot \dfrac{p}{p^2+\omega^2}\begin{vmatrix} 1 & d_{12}(p) \\ L\cos\beta & d_{22}(p) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{11}(p) & d_{12}(p) \\ d_{21}(p) & d_{22}(p) \end{vmatrix}}, \tag{11}$$

iar soluția în φ este

$$L\varphi(p) = \frac{m_1 e\omega^2 \dfrac{p}{p^2+\omega^2}\begin{vmatrix} d_{11}(p) & 1 \\ d_{21}(p) & L\cos\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{11}(p) & d_{12}(p) \\ d_{21}(p) & d_{22}(p) \end{vmatrix}}. \tag{12}$$

Prin dezvoltarea determinanților respectivi se obține

$$Ly(p) = m_1 e\omega^2 \frac{p}{p^2+\omega^2}\left[\frac{A_1 p^2}{p^4+2\gamma p^2+\delta^2} + \frac{B_1}{p^4+2\gamma p^2+\delta^2}\right], \tag{13}$$

$$L\varphi(p) = m_1 e\omega^2 \frac{p}{p^2+\omega^2}\left[\frac{A_2 p^2}{p^4+2\gamma p^2+\delta^2} + \frac{B^2}{p^4+2\gamma p^2+\delta^2}\right], \tag{14}$$

unde

$$A_1 = \frac{J_0 + ml_0(l_0 - L\cos\alpha\cdot\cos\beta)}{mJ_0 + m^2 l_0^2 \sin\alpha},$$

$$B_1 = \frac{C_0 - k_0 L\cos\beta}{mJ_0 + m^2 l_0^2 \sin\alpha},$$

$$A_2 = \frac{m(L\cos\beta - l_0\cos\alpha)}{mJ_0 + m^2 l_0^2 \sin\alpha},$$

$$B_2 = \frac{L\cos\beta\cdot C_v}{mJ_0 + m^2 l_0^2 \sin\alpha},$$

$$2\gamma = \frac{C_v(J_0 + ml_0^2) + m(C_0 + l_0 k_0\cos\alpha)}{mJ_0 + m^2 l_0^2 \sin\alpha},$$

$$\delta^2 = \frac{C_v\cdot C_0}{mJ_0 + m^2 l_0^2 \sin\alpha}.$$

Variația în timp a variabilelor y și φ se stabilește cu ajutorul tabelelor de corespondență ale transformatelor Laplace.

În acest sens determinarea originalelor expresiilor din parantezele relațiilor (13) și (14) ar presupune, înainte de toate, cunoașterea constantelor γ și δ. Analiza numitorului acestor expresii conduce la concluzia existenței numai a unei singure variante posibile. Astfel, cum γ și δ sînt numere pozitive și întotdeauna $\gamma > \sqrt{\gamma^2 - \delta^2}$, rezultă că ecuația $p^4 + 2\gamma p^2 + \delta^2 = 0$ admite numai rădăcini complexe.

Atunci

$$L^{-1}\frac{p^2}{p^4 + 2\gamma p^2 + \delta^2} = M(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \tag{15}$$

iar

$$L^{-1}\frac{1}{p^4 + 2\gamma p^2 + \delta^2} = N(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \tag{16}$$

unde

$$\omega_1^2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \delta^2},$$

$$\omega_2^2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \delta^2},$$

$$M = \frac{\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2},$$

$$N = \frac{1}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}.$$

Procedînd la înlocuirile şi grupările corespunzătoare de termeni se stabilesc următoarele soluţii :

$$y(t) = m_1 e\omega^2 \cos \omega t(A_1 M + B_1 N)(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \tag{17}$$

$$\varphi(t) = m_1 e\omega^2 \cos \omega t(A_2 M + B_2 N)(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \tag{18}$$

Expresiile astfel obţinute dovedesc existenţa soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale de mişcare a păpuşii portpiatră pe direcţiile Y şi Φ şi caracterul analog al acestor mişcări.

Dar, orice înclinare φ a păpuşii portpiatră corespunde unei variaţii a distanţei dintre piesă şi sculă, amplificînd vibraţiile existente pe direcţia Y.

Acest lucru s-a explicat pe figura 4, în care, spre simplificarea demonstraţiei, s-a considerat că piesa are o poziţie fixă, punctul de rotire al subansamblului se află la distanţa l de verticala axei pietrei de rectificat, distanţa de la aceeaşi axă pînă la planul ghidajelor fiind h.

Prin rotirea cu unghiul φ a păpuşii portpiatră rezultă o deplasare δ a axei pietrei de rectificat faţă de axa piesei.

Pentru evaluarea deplasării δ se consideră că aceasta este compusă din deplasările Δ_1 şi Δ_2, a căror mărime se exprimă prin

$$\Delta_1 = h \sin \varphi \tag{17}$$

şi

$$\Delta_2 = l(1 - \cos \varphi). \tag{18}$$

Pentru a determina dependența dintre deplasarea Δ_1 și unghiul φ, funcția sinus din expresia (17) se dezvoltă în serie :

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots$$

Cum unghiul φ este mic, rezultă că termenii în φ^3, φ^5, φ^7 etc., au valori neglijabile, și din membrul drept al dezvoltării poate fi reținut numai primul termen.

Pe baza considerațiilor menționate expresia (17) a deplasării Δ_1 poate fi scrisă astfel :

$$\Delta_1 = h \cdot \varphi. \qquad (19)$$

Prin dezvoltarea în serie și a funcției cosinus din expresia (18) și neglijarea valorilor termenilor în φ^2, φ^4, φ^6 etc., se poate arăta că $\Delta_2 \approx 0$. În acest fel, deplasarea δ devine

$$\delta \cong \Delta_1 = h\varphi. \qquad (20)$$

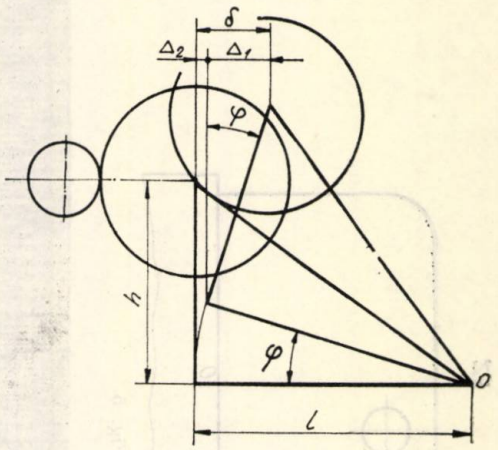


Fig. 4

Deoarece unghiul φ prezintă o variație periodică, rezultă că și deplasarea δ are aceeași lege de variație, transformîndu-se peste vibrațiile de pe direcția Y ale arborelui pietrei de rectificat. Aceaste din urmă au făcut subiectul multor lucrări de specialitate [2], [3], [6], [7] etc.

Pentru verificarea experimentală a interdependenței dintre rotirile păpușii portpiatră și deplasările pe direcția Y ale acesteia a fost conceput un dispozitiv (fig. 5) cu doi captori cvasistatici, echipați cu traductori tensometrici.

Cu ajutorul captorului *1* au fost controlate vibrațiile pe direcția Y a păpușii portpiatră, iar captorul *2* permite înregistrarea vibrațiilor pe direcția Z. Acestea din urmă provin din rotirea φ a subansamblului considerat. Pentru valori mici ale unghiului de rotire φ, deplasările z pe direcția Z ale subansamblului considerat pot fi exprimate cu ajutorul relației

$$z = \varphi \cdot l, \qquad (21)$$

ale cărei notații au semnificațiile din figura 4.

Oscilogramele înregistrate (fig. 6) cu cei doi captori confirmă existența corelației dintre vibrațiile de pe cele două direcții, stabilită teoretic.

Experiențele au fost efectuate la funcționarea în gol și în procesul de prelucrare cu diferite adîncimi de așchiere a unei mașini de rectificat

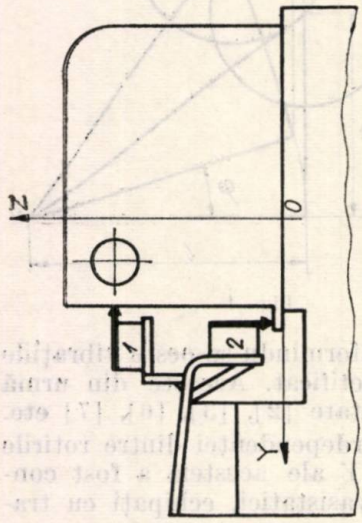


Fig. 5

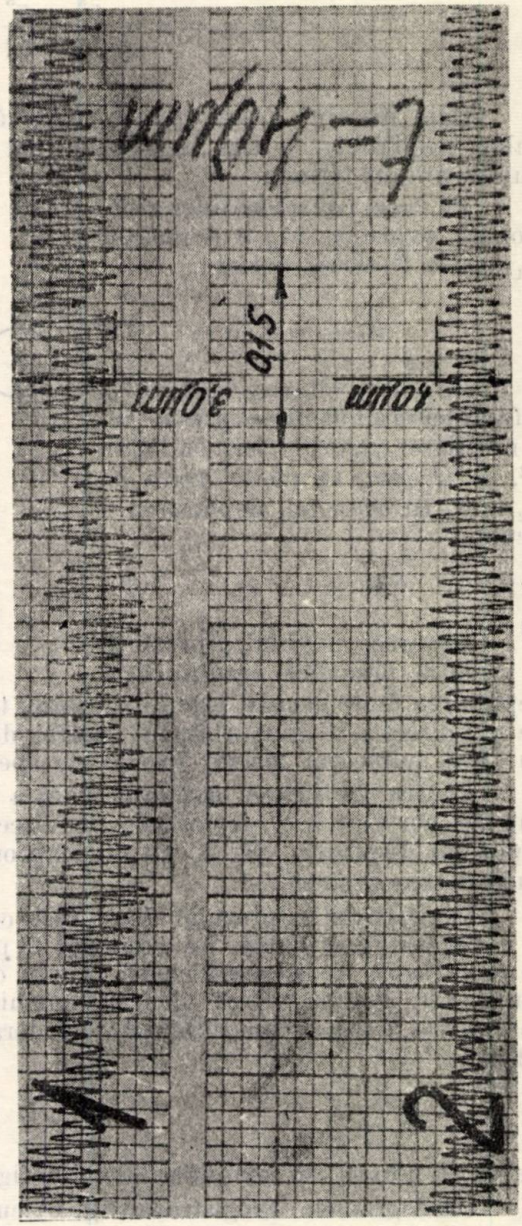


Fig. 6

exterior, vibrațiile înregistrate fiind datorate excitațiilor motorului electric de acționare și interacțiunii acestora cu vibrațiile curelelor din lanțul cinematic principal.

Interdependența dintre rotirile subansamblurilor și vibrațiile de pe diferite direcții analizată în lucrarea de față este consemnată pentru prima dată în literatura dedicată dinamicii mașinilor-unelte.

Interdependența dintre rotirea săniilor, meselor, suporților etc. și deplasarea pe direcția paralelă cu planul ghidajelor este valabilă pentru toate genurile de mașini-unelte (strunguri, mașini de frezat, alezat, rabotat etc.), dar în cazul mașinilor de rectificat, destinate în general, operațiilor de finisare ale pieselor de înaltă precizie capătă semnificații deosebite.

Interdependența consemnată are pentru ansamblul luat în studiu, respectiv al păpușii portpiatră a mașinilor de rectificat exterior, serioase implicații tehnologice și constructive ale acestuia. Primele privesc calitatea execuției ghidajelor și montării subansamblului respectiv, iar ultimile se referă la distanța dintre axa pietrei de rectificat și planul ghidajelor tipul ghidajelor etc.

Analizînd problema distanței h dintre axa pietrei de rectificat și planul ghidajelor se poate deduce cu ușurință că odată cu micșorarea acesteia, interdependența dintre rotirea subansamblului și vibrațiile pe direcția Y slăbește, putînd fi neglijată în cazul în care planul ghidajelor păpușii portpiatră coincide cu planul format de axul pietrei de rectificat și axul piesei. În acest sens, ar trebui deci revăzută actuala configurație a păpușii portpiatră ca și a mașinii de rectificat exterior luată în întregime. Problema este analogă principiului Abbé, cunoscut din bazele metodologiei aplicate.

Primit la redacție la 12 iulie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. Bartalucci B., Lisini G., Verardi M., *Contribution a l'étude de l'instabilité en rectification*, Annals of the CIRP, **16**, 4 (1968).
2. Cuntze E. O., *Entstehung und Minderung von Ratter-Schwingungen beim Schleifen*, Industrie-Anzeiger, **91**, *13* (1969).
3. Kaliszer H., Singhal P. D., *Some problems connected with the grinding process*, Proceedings of the 7th International MTDR Conference. Birmingham, 1966.
4. Kudinov V. A., *Dinamica mașinilor-unelte* (traducere din l. rusă). București, Edit. tehnică, 1970.
5. Kudinov, V. A., Grișin V. M., *Dinamiceskie ciastotnie harakteristiki proțessa șlifovaniia*, Stanki i instrument, *1* (1972).
6. Snoeys R., *Broutement en rectification*, CRIF, MC 14, août, 1966.
7. Sweeney G., *Les vibrations en rectification*, La pratique des industries mecaniques, *10* (1968).

MODELE MATEMATICE CARE DESCRIU MECANISMELE DE BAZĂ ALE RUPERII ROCILOR PRIN FORAJ

de I. DOBRE
I.C.P.T.G. Cîmpina

Lucrarea prezintă o sinteză a stadiului cunoştinţelor asupra mecanismelor de bază ale ruperii rocilor prin foraj şi modelele matematice care descriu aceste mecanisme.
În particular se relevă posibilităţile de utilizare a cunoştinţelor de mecanica roţilor la elaborarea relaţiilor fenomenologice de bază ale procesului de foraj.
Datorită dificultăţilor de cunoaştere a unor aspecte specifice mecanismelor de rupere a rocilor sub acţiunea sarcinilor concentrate, se consideră că, deocamdată, energia consumată pentru ruperea unei unităţi de volum de rocă reprezintă cel mai bun parametru de evaluare şi prevedere a proceselor de rupere prin foraj.

1. INTRODUCERE

Pentru elucidarea celor mai importanţi factori care influenţează caracteristica fenomenologică de bază a procesului de foraj, apăsare-avansare, au fost elaborate o serie de modele care descriu mecanismele de rupere ce se dezvoltă la acţiunea elementară a unui dinte de sapă cu roca din talpa sondei.

Datorită complexităţii procesului real de rupere, la elaborarea acestor modele idealizate s-au avut în vedere numai principalele caracteristici geometrice, energetice şi de rezistenţă ale sistemului considerat.

Dat fiind modificarea mecanismului de rupere în funcţie de anumite proprietăţi fizice-mecanice, specifice fiecărui tip de rocă, de starea de tensiune sub care acestea se află, şi de geometria elementelor active de dislocare, au fost elaborate modele matematice numai pentru cele două mecanisme de bază ale proceselor de rupere sub acţiunea sarcinilor concentrate : pentru mecanismul fragil şi, respectiv, pentru mecanismul plastic de rupere.

În lucrare se va face o sinteză a actualelor modele matematice elaborate şi posibilităţile de aplicare a cunoştinţelor de mecanica rocilor la mărirea eficienţei procesului de foraj.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 5, 1974, P. 909–925

2. MECANISMELE DE BAZĂ ALE RUPERII ROCILOR PRIN FORAJ

Mecanismele de bază ale interacţiunii sapă-rocă au fost studiate experimental pe roci naturale [1]—[11] sau pe materiale cu proprietăţi similare rocilor [1], [12], în condiţii dinamice [1], [3], [5], [8] sau într-o manieră statică sau cvasi-statică [1], [2], [4], [6], [7], [9]—[11].

În particular, au fost efectuate investigaţii asupra efectului stării de tensiune din zona de rupere, proprietăţilor fizice-mecanice ale rocilor, fluidului din porii rocii, geometriei elementelor active şi distanţei dintre o amprentare şi alta asupra mecanismelor de rupere.

În general, interacţiunea elementară a unui dinte de sapă cu roca este însoţită de mai multe moduri dominante de rupere a rocii, care pot fi sintetizate în următoarea succesiune [13]:

a) strivirea neregularităţilor superficiale ale rocii;

b) deformarea elastică a rocii;

c) strivirea, pulverizarea şi compactizarea rocii aflată direct sub aria de contact dintre dinte şi rocă;

d) formarea unei fisuri lungi verticale de întindere sub zona de rocă strivită şi, uneori, formarea unor fisuri scurte radiale de forfecare în jurul acestei zone;

e) dezvoltarea fisurilor scurte de forfecare, probabil, simultan cu formarea zonei de rocă strivită şi formarea unor craterе care se extind spre suprafaţa rocii.

Procesul de rupere a rocii se repetă, respectînd mai mult sau mai puţin succesiunea relatată, pînă la consumarea integrală a forţei sau energiei aplicate.

Mecanismele de bază care condiţionează substanţial caracteristica fenomenologică de bază forţă-deplasare sînt strivirea rocii aflată imediat sub dinte şi dezvoltarea fisurilor de forfecare.

Astfel, zona sau regiunea de rocă ruptă prin strivire, pulverizare şi compactizare este, în general, în formă de pană sau con, după cum geometria de bază a dintelui este bi sau tridimensională [14]. Muchia penei sau vîrful conului de rocă strivită se află de la o fracţiune din adîncimea de pătrundere pînă la de mai multe ori această adîncime, în funcţie de geometria dintelui, porozitatea rocii, starea de tensiune din zona de rupere şi alţi factori.

Fisurile de forfecare se dezvoltă de-a lungul unor traiectorii, care reprezintă două seturi de spirale logaritmice, a căror direcţii intersectează planul efortului unitar principal maxim sub un unghi constant de aproximativ 30° [13]. Adîncimile maxime ale craterelor delimitate de aceste spirale sînt de acelaşi ordin de mărime ca şi adîncimea de penetrare şi anume de la 0,3 pînă la de 3 ori adîncimea de penetrare.

În general, se deosebesc trei tipuri de astfel de mecanisme de propagare a fisurilor de forfecare [14]:

1) mecanismul fragil (casant), caracterizat prin propagarea rapidă a fisurilor la suprafaţa rocii, specific proceselor de rupere la presiuni diferenţiale reduse (diferenţa dintre presiunea fluidului de foraj şi presiunea din porii rocii);

2) mecanismul tranzitoriu, caracterizat prin propagarea unei singure fisuri de forfecare la valori critice ale presiunii diferenţiale;

3) mecanismul plastic sau pseudo-plastic, caracterizat prin deformarea rocii sub formă de extruziuni plastice, fără separare de particule discrete din masa rocii, specific proceselor de rupere în roci plastice (mecanism plastic) sau la presiuni diferențiale peste presiunea critică (mecanism pseudo-plastic).

Modelele matematice elaborate pînă în prezent, au în vedere, în mod distinct, numai mecanismul fragil și mecanismul plastic de propagare a fisurilor.

3. MODELE MATEMATICE CARE DESCRIU MECANISMUL FRAGIL DE RUPERE

3.1. MODELUL MATEMATIC AL LUI EVANS ȘI MURRELL

Evans și Murrell [15] au propus un model care descrie acțiunea elementară de pătrundere a unui dinte bidimensional într-o rocă slab consolidată (cărbune). Conform modelului, pentru rupere, pe suprafața de contact dinte-rocă va trebui să se dezvolte un efort unitar care să depășească rezistența rocii la compresiune pură*) :

$$F = 2\,lh\,\sigma_0\,(f + \mathrm{tg}\beta). \tag{1}$$

Rezultatele experimentale pe cărbune, în condiții de suprafață, au verificat satisfăcător modelul propus, însă în roci dure, unde suprafața de contact este discontinuă, acest model nu este aplicabil [13].

3.2. MODELUL MATEMATIC AL LUI REICHMUTH

Reichmuth [2] a elaborat un model matematic, pe baza teoriei elasticității, care prevede valoarea critică a semiunghiului unui dinte bidimensional în funcție de coeficientul de frecare la interfața dinte-rocă (fig. 1) :

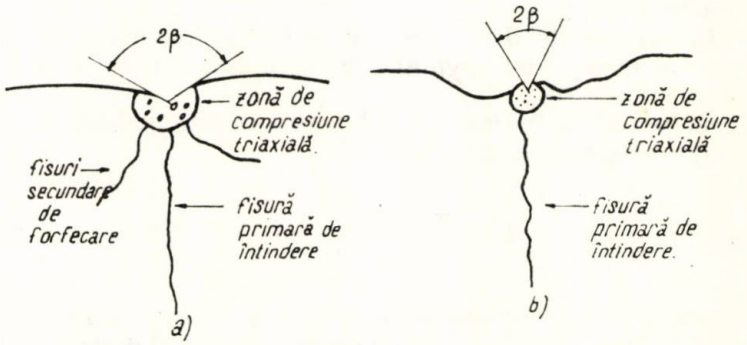


Fig. 1

$$\beta_{cr} = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{\pi - 2f}{2 + \pi f}. \tag{2}$$

*) Explicarea termenilor în lista de notații de la sfîrșit.

Dacă β este numeric mai mare decît β_{cr}, deci dacă dintele are unghiul de ascuţire mare, distribuţia eforturilor unitare principale este localizată numai în regiunea de sub dinte ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), chiar dacă iniţial s-a produs o fisură primară de întindere, determinînd o zonă mare cu rocă strivită (fig. 1*a*).

Din contră, dacă β este numeric mai mic decît β_{cr}, deci dacă dintele are unghiul de ascuţire mic, acesta va deschide fisura primară de întindere, iar fisurile secundare de forfecare se vor propaga rapid spre suprafaţa rocii (fig. 1*b*).

Modelul lui Reichmuth se verifică satisfăcător pentru $f = 0{,}4 - 0{,}2$, în care caz $2\beta_{cr} = 70° - 90°$.

3.3. MODELUL MATEMATIC AL LUI DALZIEL ŞI DAVIES

Dalziel şi Davies [16] au constatat că între apăsare şi raza de curbură a unui dinte bidimensional cu vîrful rotunjit, există următoarea relaţie exponenţială :

$$F = K \cdot r^{\gamma}. \tag{3}$$

Pentru condiţiile limită ale experimentelor ($2\beta = 60°$, $r = 4{,}0 \cdot 10^{-3} - 62{,}0 \cdot 10^{-3}$ in), exponentul γ a fost aproximativ constant şi egal cu 0,5.

Dalziel şi Davies au explicat valabilitatea modelului elaborat printr-o versiune simplificată a teoriei Griffith de propagare a fisurilor.

Rezultatele experimentale pe cărbune verifică modelul propus, însă pentru roci dure acesta nu este aplicabil [13].

3.4. MODELUL MATEMATIC AL LUI PAUL ŞI SIKARSKIE

Paul şi Sikarskie au propus un model care descrie propagarea fragilă a fisurilor la pătrunderea unui dinte bidimensional într-un material fragil, omogen şi izotrop [17].

La elaborarea modelului s-a presupus că ruperea va avea loc de-a lungul unui plan înclinat cu unghiul ψ pe care este satisfăcut criteriul de rupere Mohr-Coulomb (fig. 2).

Conform ipotezelor iniţiale, planul de rupere este înclinat cu un unghi determinat de următoarea relaţie :

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta + \varphi}{2}. \tag{4}$$

Din această relaţie rezultă că propagarea la suprafaţă a fisurii de forfecare este condiţionată de semiunghiul de ascuţire al dintelui şi unghiul de frecare interioară al rocii. Astfel, dacă $\beta + \varphi < 90°$, va avea loc propagarea fisurii, iar dacă $\beta + \varphi > 90°$, va avea loc numai mecanismul de strivire al rocii aflată sub dinte.

Deoarece pentru majoritatea rocilor $\varphi \simeq 30°$, unghiul critic de ascuţire al dintelui la care încetează propagarea fisurii este de $2\beta_{cr} = 120°$.

De asemenea, modelul prevede următoarea relație între apăsarea unitară (apăsarea care revine unității de lungime a crestei dintelui) și adîncimea de pătrundere la formarea fragmentului de rocă $i + 1$:

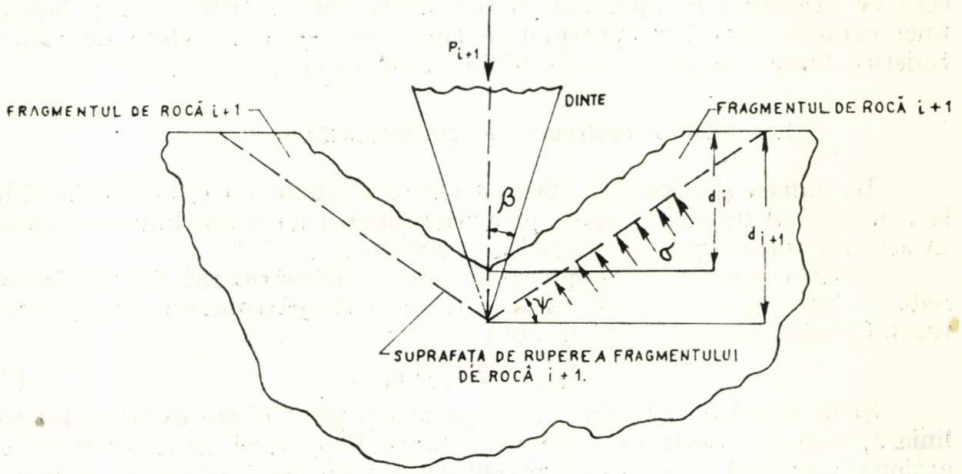


Fig. 2

$$P_{i+1} = \frac{2 \cdot \sigma_0 \cdot d_{i+1} \cdot \sin \beta (1 - \sin \varphi)}{1 - \sin (\beta + \varphi)}. \tag{5}$$

Pentru o combinație particulară rocă-dinte, (σ_0, φ și β constante), relația (5) se reduce la următoarea formă lineară :

$$P_{i+1} = K \cdot d_{i+1}, \tag{6}$$

în care constanta K reprezintă chiar panta medie a caracteristicii fenomenologice forță-pătrundere.

Așa cum rezultă din relațiile (5) și (6), între apăsare și adîncimea corespunzătoare momentului de formare a fragmentului de rocă $i + 1$, în cazul pătrunderii unor danturi bidimensionale, există o corespondență liniară.

Deși modelul propus de Paul și Sikarskie nu s-a verificat complet în lucrările de laborator, se consideră că aceasta se datorește mai mult simplificărilor introduse deliberat la deducerea modelului și nu teoriei însăși [17], [13], [18].

3.5. MODELUL MATEMATIC AL LUI MILLER ȘI SIKARSKIE

Miller și Sikarskie [19] au extins teoria lui Paul și Sikarskie la mecanismul fragil de rupere cu danturi tridimensionale (con, piramidă). Conform modelului propus, apăsarea pe dinte la formarea fragmentului de rocă $i + 1$ este dată de următoarea relație :

$$P_{i+1} = \frac{d_{i+1}^2 \tau_0 \sin \beta \cos \varphi}{f(\beta, \varphi)}, \tag{7}$$

în care $f(\beta, \varphi)$ reprezintă o funcție de unghiul la vîrf al dintelui și de unghiul de frecare interioară al rocii. Pentru o combinație dinte-rocă dată, apăsarea pe dinte crește proporțional cu pătratul adîncimii de pătrundere, ceea ce înseamnă că apăsările la fracturare sînt distribuite de-a lungul unei caracteristici forță-pătrundere curbilinie, spre deosebire de caracteristica liniară de la danturile bidimensionale [17].

3.6. MODELUL MATEMATIC AL LUI BENJUMEA ȘI SIKARSKIE

Benjumea și Sikarskie [20] au extins modelul lui Paul și Sikarskie la mecanismul fragil de rupere prin pătrunderea daturilor bidimensionale în corpuri anizotrope (cu planuri de stratificare).

Modelul matematic propus presupune următoarea relație, sub formă redusă, între apăsarea unitară și adîncimea de pătrundere, corespunzătoare formării fragmentului de rocă $i + 1$:

$$P_{i+1} = K(\rho) \cdot d_{i+1}. \tag{8}$$

Și în astfel de situații, între apăsare și pătrundere există o relație liniară, însă constanta de proporționalitate $K(\rho)$ depinde de direcția de acționare a forței în raport cu planul de stratificare. Cu toate că modelul nu s-a verificat perfect cu datele experimentale, s-a relevat faptul că panta caracteristicii forță-pătrundere (constanta de proporționalitate $K(\rho)$) și energia specifică (energia necesară ruperii unui volum unitar de rocă) sînt mai mari în cazul acționării perpendiculare pe acest plan.

3.7. MODELUL MATEMATIC AL LUI Mc LAMORE

Mc Lamore [21] a adaptat modelul lui Paul și Sikarskie la mecanismul fragil de rupere cu danturi bidimensionale în corpuri anizotrope (cu planuri de stratificare).

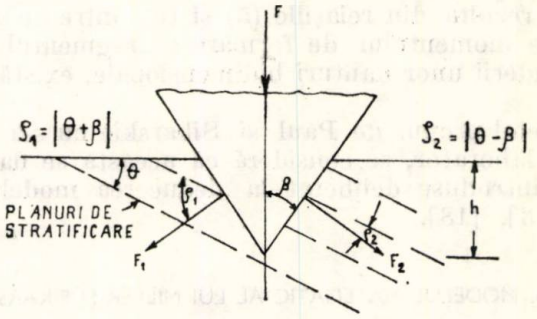


Fig. 3

Conform modelului, forța inițială unitară pe fiecare din fețele dintelui este redată de următoarea relație (fig. 3) :

$$F_i = \frac{2h\ \tau_{0(\rho_i)} \sin \beta \cos \varphi}{\cos^2\left(\frac{\pi/2 + \beta + \varphi}{2}\right)}. \tag{9}$$

Din relaţia (9), rezultă că pentru o combinaţie dinte-rocă dată, pot fi calculate forţele unitare la rupere F_1 şi F_2, pe cele două feţe ale dintelui. Ca sarcină de rupere se ia valoarea inferioară a apăsării rezultate.

În particular, din condiţia de egalitate a forţelor respective ($F_1 = F_2$), se poate determina mărimea „optimă" a unghiului de ascuţire al dinţilor sapei (2β), pentru săparea verticală a găurii de sondă.

4. MODELE MATEMATICE CARE DESCRIU MECANISMUL PLASTIC DE RUPERE

Majoritatea modelelor matematice care descriu mecanismul plastic de rupere a corpurilor sub acţiunea sarcinilor concentrate, au la bază soluţiile lui Prandtl şi a lui Hill pentru materiale omogene şi perfect plastice.

Soluţia lui Prandtl nu ia în considerare deplasarea suprafeţei materialului din apropierea dintelui, în timp ce soluţia lui Hill ia în considerare această deplasare.

4.1. MODELUL MATEMATIC AL LUI CHEATHAM

Cheatham a modificat soluţia lui Prandtl la descrierea pătrunderii unui dinte bidimensional, pentru două cazuri extreme şi anume [22]:

a) Un dinte perfect neted, fără frecare la suprafaţa de contact, în care caz valoarea minimă a forţei de pătrundere este dată de următoarea relaţie:

$$F = lh\,\sigma_p \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\varphi}\left[(1+\sin\varphi)\,\exp(2\beta\operatorname{tg}\varphi) - (1-\sin\varphi)\right]. \qquad (10)$$

b) Un dinte perfect rugos, cu frecare de-a lungul contactului cu roca, în care caz valoarea maximă a forţei de pătrundere este dată de următoarea relaţie:

$$F = lh\,\sigma_p \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\left[\left(1+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\varphi}\right)(1+\sin\varphi)\exp(2\xi\operatorname{tg}\beta) - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\varphi}\right]. \qquad (11)$$

Figurile 4 şi 5 ilustrează cîmpul liniilor de alunecare corespunzătoare celor două cazuri limită.

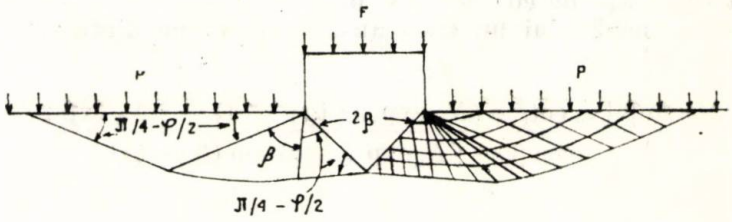


Fig. 4

Pentru o combinaţie dinte-rocă dată (σ_p, φ, l şi β constante), conform modelului propus, apăsarea pe dinte creşte direct proporţional cu adîncimea de pătrundere.

Relaţiile (10) şi (11) pot fi convertite sub formă adimensională, prin împărţirea lor la l, h şi σ_p, în care caz, relaţia (10) poate fi redată mai restrîns astfel:

$$\frac{F}{lh\,\sigma_p} = f(\beta,\ \varphi). \tag{12}$$

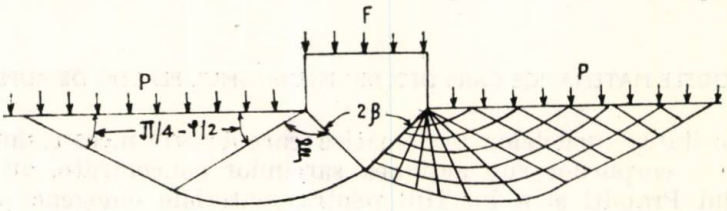


Fig. 5

Lucrările experimentale ulterioare [4], [6], [10], [11], [18], [19], au verificat în general, modelul elaborat, obţinîndu-se valori între valorile calculate teoretic.

Pentru punerea în evidenţă a efectului frecării la interfaţa dinte-rocă, Cheatham a propus următoarea relaţie [23]:

$$F = 2\,lh\,\sigma_n\,(f + \operatorname{tg}\beta). \tag{13}$$

Relaţia (13) este similară cu relaţia (1) propusă de Evans şi Murrell pentru mecanismul fragil de rupere, cu deosebirea că în acest caz se ţine seama de efortul unitar normal dezvoltat la interfaţa dinte-rocă şi nu de rezistenţa rocii la compresiune pură.

Forţele calculate cu relaţia (13) sînt mai mari decît valorile experimentale, se pare, datorită extrapolării exagerate a înfăşurătorii liniare a lui Mohr într-o regiune unde înfăşurătoarea reală are o pantă mai mică.

4.2. MODELUL MATEMATIC AL LUI OUTMANS

Plecînd de la soluţia lui Hill, Outmans [24] a elaborat un model care descrie pătrunderea unui dinte bidimensional într-un corp perfect plastic, omogen şi impermeabil, avînd înfăşurătoarea Mohr liniară, fără frecare la suprafaţa de contact (fig. 6).

Conform modelului lui Outmans, apăsarea pe dinte este dată de următoarea relaţie:

$$F = \frac{2lh\,\sin\beta\,[\tau_0\,\operatorname{cotg}\,\varphi\,(N_\varphi \exp\,2\xi\,\operatorname{tg}\varphi - 1) + pN_\varphi \exp 2\xi\operatorname{tg}\varphi]}{(\cos\beta - \sqrt{N_\varphi}\exp\,\xi\,\operatorname{tg}\varphi)[\sin(\beta - \xi)]}. \tag{14}$$

Din relaţia (14) rezultă că apăsarea pe dinte creşte direct proporţional cu adîncimea de pătrundere, coeziunea rocii şi presiunea fluidului de foraj şi creşte rapid cu unghiul de ascuţire al dintelui şi cu unghiul de frecare interioară al rocii.

De asemenea, modelul Outmans redă următoarea relaţie pentru volumul de rocă deformat plastic :

$$V = \frac{[(2\sin\varphi + 1)\, N_\varphi \exp 2\xi \operatorname{tg}\varphi + (2\sin\varphi - 1)\, N_\varphi]\, F^2 l}{16\sqrt{N_\varphi}\sin\varphi \sin^2\beta[\tau_0 \operatorname{cotg}\varphi(N_\varphi \exp 2\xi \operatorname{tg}\varphi - 1) + pN_\varphi \exp 2\xi \operatorname{tg}\varphi]^2} \cdot \quad (15)$$

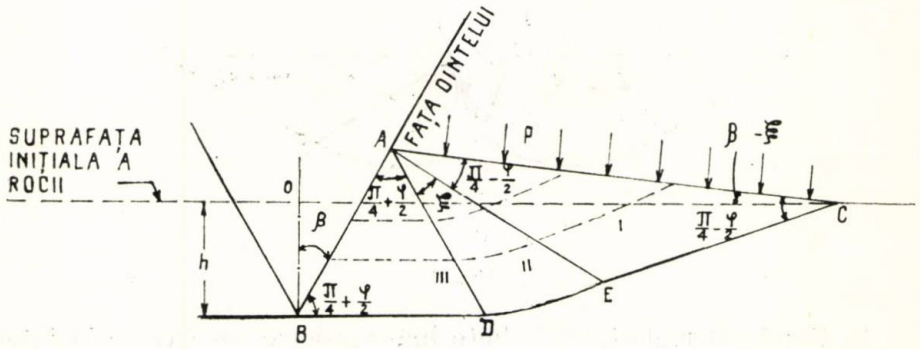


Fig. 6

Conform relaţiei (15), volumul de rocă deformat plastic creşte exponenţial cu apăsarea pe dinte şi scade cu creşterea coeziunii şi unghiului de frecare interioară al rocii, cu presiunea fluidului de foraj şi cu unghiul de ascuţire al dintelui.

Din model rezultă că o anumită rocă (τ_0, φ şi N_φ constante), supusă la o anumită presiune a fluidului de foraj (p constant), se va deforma cel mai bine cu un dinte avînd unghiul la vîrf cel mai mic dar care va dezvolta o stare de tensiune suficientă pentru producerea fracturării (unghi optim).

4.3. MODELUL MATEMATIC AL LUI PARISEAU ŞI FAIRHURST

Plecînd de la soluţia lui Prandtl, Pariseau şi Fairhurst [25] au elaborat un model matematic care descrie pătrunderea unui dinte bidimensional într-un material omogen şi perfect plastic, pentru trei cazuri extreme şi anume :

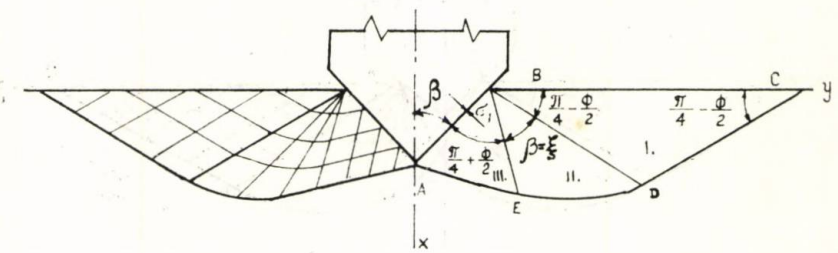


Fig. 7

a) Cazul pătrunderii unui dinte perfect neted, fără frecare la suprafaţa de contact (fig. 7)

$$F = \frac{lh\ \sigma_0 \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\mu}\,[\exp(2\beta \operatorname{tg}\varphi) - \operatorname{tg}^2\mu], \quad (16)$$

în care $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

Relaţia (16) este similară cu relaţia (10) dedusă de Cheatham şi este valabilă pentru $\beta \leqslant \pi/2$, în care caz unghiul cîmpului de tensiune variabilă este egal cu semiunghiul de ascuţire al dintelui ($\xi = \beta$).

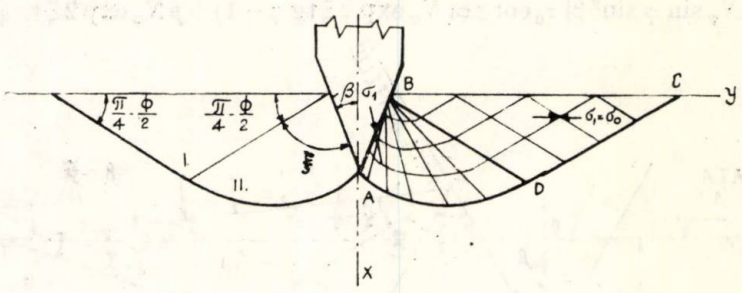


Fig. 8

b) Cazul pătrunderii unui dinte bidimensional, cu frecare la interfaţa dinte-rocă, astfel ca unul din planurile de rupere să coincidă cu suprafaţa de contact (fig. 8) :

$$F = \frac{lh\ \sigma_0\ \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\varphi\ \mathrm{tg}\mu}\{[1 + \sin\varphi\ (\mathrm{cotg}\ \beta\ \mathrm{tg}\ \mu - 1)]\ \exp(2\xi\ \mathrm{tg}\varphi) - \mathrm{tg}^2\mu\}, \tag{17}$$

în care $0 \leqslant \beta \leqslant \mu$ şi $\xi = \pi/2 - \mu + \beta$.

Relaţia (17) este similară cu relaţia (11) dedusă de Cheatham. Ea are aplicabilitate limitată datorită restricţiei impuse asupra unghiului β. Deoarece majoritatea rocilor au $\varphi \leqslant 30°$, soluţia este valabilă pentru danturi cu $2\beta \leqslant 60°$.

c) Cazul pătrunderii unui dinte bidimensional, cu frecare la interfaţa dinte-rocă, fără ca un plan de rupere să coincidă cu suprafaţa de contact (fig. 9) :

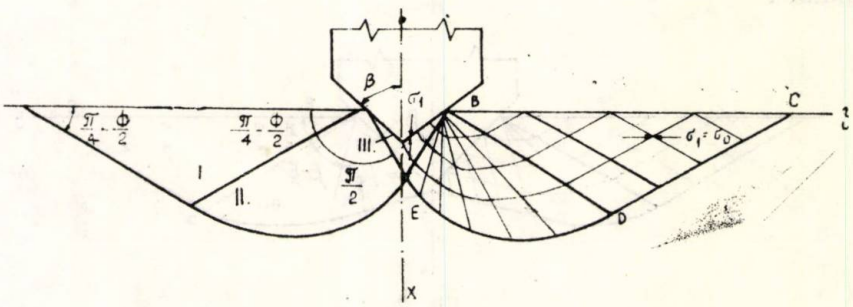


Fig. 9

$$F = \frac{lh\ \sigma_0\ \mathrm{tg}\ \beta}{\mathrm{tg}\ \varphi\ \mathrm{tg}\ \mu}\ [\exp(2\xi\ \mathrm{tg}\ \varphi) - \mathrm{tg}^2\ \mu], \tag{18}$$

în care $\mu \leqslant \beta \leqslant \pi/2$ şi $\xi = \pi/2$.

Relaţia (18) este valabilă în cazul folosirii danturilor bidimensionale cu $60° \leqslant 2\beta \leqslant 180°$, iar problema presupune existenţa, în astfel de situaţii, a unei „pene false" de rocă sfărîmată sub dinte, care acţionează ca element activ de rupere.

4.4. MODELUL MATEMATIC AL LUI MILLER ŞI CHEATHAM

Pentru danturi tridimensionate (conuri, piramide etc.), Miller şi Cheatham au propus următorul model matematic [26]:

$$F = \pi h^2 \operatorname{tg}\beta \, (\bar{\tau} + \bar{\sigma} \operatorname{tg} \beta). \tag{19}$$

Conform relaţiei (19), pentru o combinaţie dinte-rocă dată, apăsarea pe un dinte tridimensional creşte direct proporţional cu pătratul adîncimii de pătrundere, concluzie similară cu aceea obţinută de Miller şi Sikarskie în cazul mecanismelor fragile de rupere (rel. 7).

Se menţionează că modelul propus de Miller şi Cheatham se verifică experimental numai pentru conuri cu unghiul de ascuţire mare şi roci cu unghiul de frecare interioară redus.

4.5. MODELUL MATEMATIC AL LUI GNIRK ŞI CHEATHAM

Pe baza teoriei plasticităţii, Gnirk şi Cheatham [27] au elaborat o relaţie a vitezei de avansare cu sape cu role, în condiţii idealizate ale găurii de sondă (fig. 10).

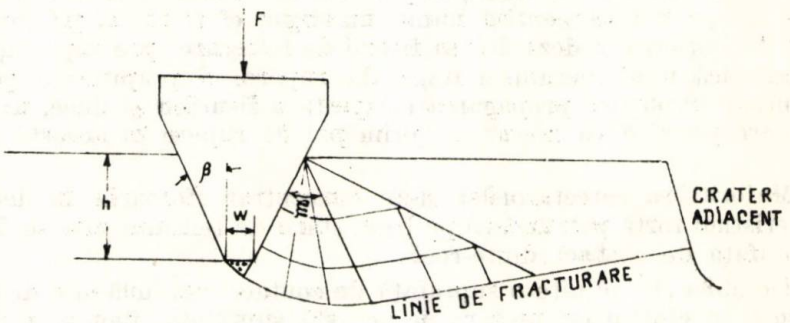


Fig. 10

Conform modelului elaborat, forţa de pătrundere a unui dinte plat, în cazul unui mecanism de rupere plastic, se poate estima cu următoarea relaţie:

$$F = (C_1 w + C_2 h)\, l.\ \sigma_p, \tag{20}$$

în care

$$C_1 = \frac{1 - \sin\varphi}{2\sin\varphi}\left[\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\exp(\pi \operatorname{tg}\varphi) - 1\right], \tag{21}$$

$$C_2 = \frac{1 - \sin\varphi}{\sin\varphi}[(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\beta)(1 + \sin\varphi)\exp(2\xi \operatorname{tg}\varphi) - \operatorname{tg}\beta], \tag{22}$$

$$\xi = \beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \tag{23}$$

Din relaţiile (20), (21) şi (22), rezultă că apăsarea pe dinte creşte direct proporţional cu lăţimea şi lungimea crestei dintelui, cu unghiul de ascuţire al acestuia, adîncimea de pătrundere, rezistenţa la compresiune pură şi unghiul de frecare interioară al rocii şi cu presiunea diferenţială din zona de rupere.

5. ANALIZA CRITICĂ A MODELELOR MATEMATICE CARE DESCRIU MECANISMELE DE BAZĂ ALE RUPERII ROCILOR PRIN FORAJ

Între mecanismul de rupere al rocilor în spaţiul tridimensional şi mecanismul de rupere cu sarcini concentrate se pare că există o corelaţie calitativă foarte bună.

Astfel, este de aşteptat ca imediat sub suprafaţa de contact a dinţilor sapei cu roca cele trei eforturi unitare principale să fie egale ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Această zonă ar corespunde zonei de rocă strivită, pulverizată şi compactizată.

Dincolo de această zonă, la presiuni de contur şi diferenţiale nule, este de aşteptat să se menţină numai un singur efort unitar principal (σ_1), însoţit de iniţierea şi dezvoltarea fisurii de forfecare spre suprafaţa rocii, caracteristică unui mecanism fragil de rupere. Suprapunerea presiunii diferenţiale împiedică propagarea completă a fisurilor şi duce, uneori, la deformare plastică ca mecanism principal de rupere în această regiune [14].

Majoritatea cercetătorilor şi-au concentrat eforturile în deducerea caracteristicii forţă-pătrundere pe baza stării de tensiuni care se dezvoltă la suprafaţa de contact dinte-rocă.

De obicei se admite o suprafaţă de contact continuă şi o distribuţie uniformă a eforturilor unitare pe această suprafaţă, ipoteze mult prea simplificatoare şi discutabile, mai ales cînd predomină mecanismul fragil de rupere.

De asemenea, se admite că sub dinţii sapei se formează şi se dezvoltă o zonă de rocă strivită, fără să existe cunoştinţe suficiente privind ruperea rocilor printr-un proces de strivire şi compactizare, influenţa gradului de compactizare asupra proprietăţilor mecanice ale materialului rezultat şi distribuţia acestei compactizări în interiorul zonei.

Din lipsă de cunoştinţe, nu se poate spune prea mult nici asupra distribuţiei tensiunilor din regiunea adiacentă regiunii de rocă strivită, respectiv în zona de rocă fisurată, deci tocmai acolo unde, teoretic, mărimea eforturilor unitare tangenţiale este maximă.

Deocamdată se cunoaşte extrem de puţin despre condiţiile în care roca începe să se fisureze, iar după ce fisura a fost iniţiată, există puţine informaţii ştiinţifice privitor la propagarea fisurii.

Corelaţia energie-volum este strîns influenţată de mecanismele de rupere din imediata vecinătate a ariei de contact. Din acest punct de vedere se pare că între traiectoria de rupere prin forfecare Mohr—Coulomb şi eforturile unitare tangenţiale care au valoarea maximă în imediata apropiere a zonei de rocă strivită nu există o corelaţie satisfăcătoare pentru a explica formarea fisurilor de forfecare în puncte mai îndepărtate, unde eforturile unitare de forfecare sînt relativ mici. Se pare că această discordanţă se poate explica prin existenţa unor discontinuităţi în interiorul rocilor care produc concentrări mai mari de eforturi, dar pînă în prezent nu s-a făcut nici un fel de studiu asupra efectelor neomogenităţii eforturilor unitare de compresiune asupra volumului de rocă fracturat [14].

Modelele matematice elaborate pînă în prezent care încearcă să găsească o corelaţie cantitativă între parametrii fenomenologici ai procesului de foraj apăsare-pătrundere şi energie-volum cu mecanica rocilor sînt extrem de interesante, dar, în acelaşi timp, atît de simplificate încît se pare că deocamdată, numai pe baza acestora nu se întrevăd progrese substanţiale imediate pentru practica forajului.

6. ASUPRA POSIBILITĂŢILOR DE EVALUARE ŞI PREVEDERE A EFICIENŢEI PROCESELOR DE RUPERE A ROCILOR PRIN FORAJ

Cu toate că actualele cunoştinţe privind procesele de rupere a rocilor prin foraj sînt extrem de reduse şi, uneori, confuze, există totuşi posibilitatea descrierii ansamblului problemei folosind unii parametrii specifici de eficienţă. În măsura în care se urmăresc scopuri practice imediate, se consideră că, deocamdată, aceşti parametri sînt mai utili decît modelele teoretice de detaliu.

Astfel, este bine cunoscut că oricare proces de rupere prin foraj se desfăşoară cu un anumit consum de energie care este posibil de evaluat şi estimat cu destulă precizie. De asemenea, fiecare proces de rupere presupune un volum de rocă dislocată care, la fel, poate fi evaluat şi estimat. Combinarea celor doi parametrii de bază ai forajului poate servi la descrierea corespunzătoare a mecanismelor de rupere sub acţiunea sarcinilor concentrate.

Frecvent s-a convenit a se denumi eficienţa procesului ca „volum specific", „dezintegrare specifică" sau „forabilitate", iar inversul acesteia, ale cărei dimensiuni fizice sînt comparabile cu ale unei tensiuni, „energie specifică" sau „rezistenţă la foraj". În cele ce urmează se vor adopta termenii de „volum specific" şi, respectiv, „energie specifică".

Deşi semnificaţia acestor parametri ai procesului de foraj a fost pusă în evidenţă cu mult timp înainte, bazele ştiinţifice ale acestora şi posibilitatea evaluării şi estimării lor au fost puse în lucrarea [1]. Ei sînt

parametrii care nu sînt citaţi frecvent în literatură, ca atare, dar pot fi uşor de dedus, atît volumul de rocă dislocată cît şi energia consumată putînd fi măsuraţi cu destulă precizie pentru scopurile practice imediate [1], [3], [5]—[9], [11], [13], [14], [17], [19], [20], [24], [27]—[36].

În general, pentru mecanismul fragil de rupere, s-a constatat că energia consumată pentru ruperea unei unităţi de volum de rocă, adică „energia specifică", este, în anumite condiţii, de acelaşi ordin de mărime cu rezistenţa rocii la compresiune pură [1]:

$$E_v = (0,3 \ldots 3)\,\sigma_0. \tag{24}$$

Condiţiile limită ale acestei corespondenţe sînt determinate de tipul şi uzura sapei, anumite proprietăţi fizice-mecanice specifice ale rocii, condiţiile de presiune din zona de rupere şi unele aspecte cinematice Pentru condiţii de lucru constante, „energia specifică" şi „volumul spe. cific" sînt aproape constante şi devin parametri de evaluare a actualelor-procedee de rupere şi, posibil, de estimare a unor procedee noi.

În condiţii de lucru constante, singura cale de a mări vitezele de foraj din punct de vedere al mecanicii rocilor, constă în folosirea unei energii de rupere mai mari şi, pînă în prezent, nu există nici o probă contrarie acestei idei.

Prin modificarea condiţiilor de lucru şi alegerea corespunzătoare a acestora, sau elaborarea unor metode de rupere de o mai mare eficacitate, se poate reduce energia specifică. Dintre mijloacele posibile de utilizare mai eficientă a energiei transmisă rocii se redau alegerea optimă a sapelor dintre tipurile existente de sape sau elaborarea de noi tipuri care să acţioneze, dacă este posibil, prin forfecare sau întindere, forajul prin carotaj continuu, reducerea presiunii diferenţiale din zona de rupere etc.

7. CONCLUZII

Comportarea calitativă şi descriptivă a mecanismelor de rupere a rocilor la sarcini concentrate, pe baza cunoştinţelor din mecanica rocilor, se pare că este suficient de bine aprofundată, însă specificarea cantitativă a acestei comportări faţă de precizia necesară deducerii valorilor parametrilor fenomenologici importanţi în analizele proceselor de rupere prin foraj nu este încă realizată.

Sînt necesare în continuare cercetări suplimentare care să permită elucidarea cantitativă a următoarelor aspecte: 1) modul de propagare a fisurilor la aplicarea sarcinilor concentrate, 2) distribuţia eforturilor unitare în apropierea suprafeţei de contact dintre dinţii sapei şi rocă, 3) modul detaliat în care are loc strivirea rocii aflată imediat sub dinţii sapei precum şi proprietăţile materialului rezultat şi 4) efectele dezvoltării zonelor de rupere asupra distribuţiei tensiunilor din rocă.

Datorită dificultăţilor de cunoaştere imediată a acestor aspecte, se consideră că, deocamdată, energia consumată pentru ruperea unei unităţi de volum de rocă reprezintă cel mai bun parametru de evaluare

şi prevedere a proceselor de rupere la sarcini concentrate. Reducerea energiei specifice prin luarea unor măsuri corespunzătoare în acest sens, reprezintă cea mai bună cale de creştere a vitezelor de foraj.

Primită la redacţie la 12 noiembrie 1973

Notaţii

E_v — energia specifică;
F — apăsarea pe dinte;
F_i — apăsarea unitară pe faţa i a dintelui;
K — constantă de proporţionalitate care se determină experimental;
$K(\rho)$ — constantă de proporţionalitate ca o funcţie de orientarea planurilor de stratificare ρ;
N_φ — valoarea curgerii, ca o funcţie de unghiul de frecare interioară ale rocii: $N_\varphi = \operatorname{tg}^2(45° + \varphi/2)$;
P_{i+1} — apăsarea unitară pe dinte la formarea fragmentului de rocă $i + 1$;
σ_0 — rezistenţa rocii la compresiune pură;
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — eforturile unitare principale;
σ_n — efortul unitar normal pe faţa dintelui;
σ_p — rezistenţa la compresiune la presiunea diferenţială Δp: $\sigma_p = \sigma_0 + \operatorname{tg}^2(45° + \varphi/2)\,\Delta_p$;
$\bar{\sigma}$ — efortul unitar normal mediu pe suprafaţa de contact;
τ_0 — rezistenţa rocii la coeziune;
$\tau_0(\rho_i)$ — rezistenţa rocii la coeziune ca o funcţie de orientarea planurilor de stratificare ρ_i;
$\bar{\tau}$ — efortul unitar tangenţial mediu pe suprafaţa de contact;
d_{i+1} — adîncimea de pătrundere a dintelui la formarea fragmentului de rocă $i + 1$;
f — coeficientul de frecare la interfaţa dinte-rocă;
h — adîncimea de pătrundere a dintelui ;
i — feţele dintelui ($i = 1, 2$);
l — lungimea crestei dintelui;
p — presiunea fluidului de foraj;
r — raza de curbură a dinţilor cu vîrful rotunjit;
w — lăţimea crestei dintelui;
γ — exponent care se determină experimental;
θ — unghiul de înclinare al planurilor de stratificare;
μ — unghiul dintre planul efortului unitar principal maxim şi direcţia spiralei logaritmice ($\mu = \pi/4 - \varphi/2$);
ξ — unghiul cîmpului de tensiune variabilă;
ρ — unghiul de înclinare dintre planul stratului şi direcţia forţelor F_i;
φ — unghiul de frecare interioară al rocii;
ψ — unghiul de înclinare al planului de rupere;
2β — unghiul de ascuţire al dintelui.

BIBLIOGRAFIE

1. R. SIMON, *Energi Balance in Rock Drilling*, Society of Petroleum Eng. Journal, dec. (1963), p. 298—306.
2. D. R. REICHMUTH, *Correlation of Force-Displacement Data with Physical Properties of Rock for Percussive Drilling Systems*, Proc. of the Fifth Symposium on Rock Mechanics Univ. of Minnesota (1963).
3. H. L. HARTMAN, *The Simulation of Percussion Drilling in the Laboratory By Indexed*, Blow Studies, Soc. of Petroleum Eng. Journal, sept. (1963), p. 214—226.
4. P. F. GNIRK, J. B. CHEATHAM JR., *Indentation Experiments on Dry Rocks Under Pressure*, Journal of Petroleum Technology, sept. (1963), p. 1031—1039.
5. N. E. GARNER, P. PODIO, G. GATLIN, *Experimental Study of Crater Formation in Limestone at Elevated Pressures*, Journal of Petroleum Technology, dec. (1963), p. 1356—1364.
6. P. F. GNIRK, J. B. CHEATHAM JR., *An Experimental Study of Single Bit-Tooth Penetration Into Dry Rock at Confining Pressures of o to 5000 psi*, Society of Petroleum Engineering Journal, iunie, (1965), p. 117—130.
7. W. C. MAURER, *Bit-Tooth Penetration Under Simulated Borehole Conditions*, Journal of Petroleum Technology, dec. (1965), p. 1433—1442.
8. H. L. HARTMAN, *The effectivness of indexing in percussion and rotary drilling*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Pergamon Press, **3**, (1966), p. 265—278.
9. W. C. MAURER, *How bottom-hole pressure affects penetration rate*, The Oil and Gas Journal, ian. 10, (1966), p. 61—65.
10. P. F. GNIRK, *An experimental study of indexed single bit-tooth penetration into dry rock at confining pressures of o to 7500 psi*, Proc. of the First Congress of the International Society of Rock Mechanics, Lisboa, (1966).
11. P. F, GNIRK, J. A. MUSSELMAN, *An Experimental Study of Indexed Dull Bit-Tooth Penetration Into Dry Rock Under Confining Pressures*, Journal of Petroleum Technology, sept. (1967), p. 1225—1233.
12. N. E. GARNER, C. GATLIN, *Experimental Study of Crater Formation in Plastically Deforming Synthetic Rocks*, Journal on Petroleum Technology, sept (1963), p. 1025—1030.
13. W. C. MAURER, *The state of rock mechanics knowledge in drilling*, Proc. of the Eight Symposium on Rock Mechanics, University of Minnesota (1966).
14. R. SIMON, *Rock failure in bore-hole drilling*, Proc. of the Seventh World Petroleum Congress, Mexico (1967).
15. I. EVANS, S. A. F. MURRELL, *The forces required to penetrate a brittle material with a wedge shaped tool*, Proc. Conf. Mechanical Properties of Non-Metallic Brittle Materials, London (1958), p. 432—450.
16. J. A. DALZIEL, E. DAVIES, *Initiation of Cracks in Coal Specimens by Blunted Wedge*, The Engineer, **217** (1964), p. 217—220.
17. B. PAUL, D. L. SIKARSKIE, *Preliminary Theory of static penetration by a rigid wedge into a brittle material*, Transactions, Society of Mining Engineers , dec (1965), p. 372—383.
18. J. B. CHEATHAM JR., P. F. GNIRK, *The mechanics of rock failure associated with drilling at depth*, Proc. of the Eighth Symposium on Rock Mechanics, Univ. Minnesota, **4**, sept (1966), p. 410.
19. M. H. MILLER, D. L. SIKARSKIE, *On the penetration of rock by three-dimensional indentors*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Pergamon Press, **5** (1968), p. 375—398.
20. R. BENJUMEA, D. L. SIKARSKIE, *A note on the penetration of a rigid wedge into a nonisotropic brittle material*, Int. j. Rock Mech. Min. Sci., Pergamon Press, **6** (1969), p. 343—352.

21. R. T. McLAMORE, *The Role of Rock Strength Anisotropy in Natural Hole Deviation*, Journal of Petroleum Technology, nov. (1971), p. 1313—1321.
22. J. B. CHEATHAM Jr., *An analytical study of rock peneration by a single bit tooth*, Eighth Annual Drilling and Blasting Symposium, University of Minnesota (1958).
23. J. B. CHEATHAM Jr., *Rock — Bit Tooth Friction Analysis*, Society of Petroleum Eng. Journal, dec (1963), p. 327—332.
24. H. D. OUTMANS, *The Effect of Some Drilling Variables On the Instantaneous Rate of Penetratton*, Petroleum Transation, Reprint Series, Drilling, **6** (1964), p. 102—114.
25. W. G. PARISEAU, C. FAIRHURST, *The force-penetration characteristic for wedge penetration into rock*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Pergamon Press, **4** (1967), p. 165—180.
26. T. W. MILLER, J. B. CHEATHAM JR., *Rock/Bit-Tooth Interaction for Conical Bit Teeth*, Soc. of Petroleum Eng. Journal, iune (1971), p. 162—170.
27. P. F. GNIRK, J. B. CHEATHAM JR., *A Theoretical Description of Rotary Drilling for Idealized Down-Hole Bit/Rock Conditions*, Society of Petroleum Eng. Journal, dec. (1969), p. 443—450.
28. W. C. MAURER, *The „Perfect-Cleaning" Theory of Rotary Drilling*, *Petroleum Transaction*, Reprint Series, Drilling, **6** (1964), p. 97—101.
29. G. GAUTHIER, G. BARON, *Classement des roches preliminaire a une ètudé de forabilité*. Etude bibliografique, Revue de l'Institut Français du Pétrole, **XVIII**, *3*, Mars (1963), p. 343—368.
30. R. TEALE, *The concept of specific energy in rock drilling*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Pergamon Press, **2** (1965), p. 57—73.
31. S. GSTALDER, J. RAYNAL, *Measurement of some Mechanical Properties of Rocks And Theier Relationship to Rock Drillability*, Journal of Petroleum Technology, aug. (1966), p. 991—996.
32. J. J. BAILEY, R. C. DEAN, JR., *Rock mechanics and the evolution of improved rock cutting methods*, Proc. of the Eight Symposium on Rock Mechanics, University of Minnesota, **4**, sept. (1966).
33. J. H. YANG, K. E. GRAY, *Single-Blow Bit-Tooth Impact Tests on Saturated Rocks Under Confining Pressure*: II. Elevated Pore Pressure, Society of Petroleum Eng. Journal, dec. (1967), p. 389—408.
34. C. E. TSOUTRELIS, *Determination of the Compresive Strength of rock in Situ or in Test Blocks using a Diamond Drill*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Pergamon Press, **6**, (1969), p. 311—321.
35. I. M. RICHARD, *Rock Drillability Related to a A Roller Cone Bit*, Reprint Fourth Conference Drilling an Rock Mechanics, Austin, Texas, ianuary 14—15 (1969), SPE of AIME Paper Number 2389.
36. C. R. PETERSON, *Rolling Cutter Forces*, Reprint Fourth Conference Drilling and Rock Mechanics, Austin, Texas, ianuary 14—15 (1969), SPE of AIME Paper Number 2393.

RECENZII

L. CREMER, M. HECKL, E. E. UNGAR, Structure-Borne Sound (Sunetul structural). Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, New York, 1973, XVI + 528 pag. 202, fig. 39 $.

Lucrarea constituie o versiune îmbunătăţită, în limba engleză, a lucrării Körperschall—Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen (Sunetul structural, Bazele fizice şi aplicaţii tehnice) de L. Cremer şi M. Heckl, apărută la aceeaşi editură în anul 1966. Autorii reuşesc să abordeze pe larg problema foarte importantă, în contextul reducerii nivelului de zgomot şi vibraţii, a vibraţiilor structurilor şi a radiaţiei sonore la frecvenţe audio.

După ce într-un prim capitol se definesc cu o deosebită grijă subiectul lucrării, posibilităţile şi metodologia de măsurare a sunetului structural, în capitolul următor sînt examinate sistematic diferitele tipuri de unde, relevîndu-se caracteristicile acestora atît în medii infinite, cît şi în cazul unor corpuri mărginite — bare şi plăci.

Propriu-zis subiectul lucrării este tratat abia începînd cu capitolul al treilea, după ce primele două capitole au epuizat introducerea noţiunilor necesare abordării sistematice a subiectului. Ţinînd seama de complexitatea problemei atenuării vibraţiilor, se face o analiză foarte atentă a acestui aspect pentru bare şi plăci din diferite tipuri de materiale. În plus, se pune în evidenţă aportul materialului (prin factorul său de pierdere) la factorul de pierdere al structurii compuse. O atenţie aparte se acordă diferitelor tipuri de tratamente ce pot fi aplicate structurilor pentru mărirea factorului de pierdere, precum şi măsurătorilor pentru determinarea modulului de elasticitate complex.

Un capitol special este acordat chestiunii impedanţelor de intrare. Folosirea impedanţelor are o deosebită importanţă, întrucît astfel este posibilă tratarea unor configuraţii complexe din punctul de vedere al circuitelor mecanice. După definirea şi trecerea în revistă a posibilităţilor de determinare experimentală a impedanţelor de intrare, o bună parte a capitolului este consacrată impedanţelor de intrare ale barelor şi plăcilor infinite, precum şi excitaţiei punctuale a structurilor finite.

Atenuarea sunetului structural este analizată în penultimul capitol al lucrării. Studiul acestui efect, foarte important în structurile clădirilor, vehiculelor şi navelor, priveşte problema atît din punctul de vedere al prezicerii atenuării unei anumite structuri, cît şi din cel al proiectării unor structuri avînd proprietăţi de atenuare dinainte precizate. Se prezintă, mai întîi, atenuarea undelor longitudinale şi de încovoiere în bare şi plăci, precum şi în cazul structurilor formate din îmbinarea acestora, iar apoi este analizat efectul mult mai important în ceea ce priveşte atenuarea în cazul folosirii unor straturi elastice intermediare, respectiv al maselor concentrate, în diferite configuraţii în funcţie de diferitele tipuri de structuri. În sfîrşit, tot în acest capitol mai sînt tratate şi chestiuni speciale cum sînt incidenţa oblică în diferite tipuri de structuri, atenuarea în plăci paralele, precum şi analiza energetică statistică. Întrucît în practică detaliile structurii precum şi condiţiile la limită nu sînt suficient de bine cunoscute pentru calcularea răspunsului structurii supuse unei excitaţii aleatoare, se arată cum — pentru sisteme

finite — există posibilitatea exprimării fluxului de putere în funcție de anumiți parametri statistici, iar în anumite cazuri exclusiv în funcție de caracteristicile de amortizare și transmisie pentru sistemele infinite corespunzătoare.

Ținînd seama de faptul că orice abordare a chestiunii sunetului structural este incompletă fără studierea aspectelor legate de radiația sunetului, ultimul capitol îi este consacrat în întregime. Mai întîi este descris modul de măsurare a puterii radiate și a eficacității radiației sonore, pentru ca în cele ce urmează, după prezentarea unor configurații simple (surse sferice, plăci infinite) să se treacă la structuri mai complexe (de exemplu, plăci finite). Se pune și aci accentul asupra elementelor strîns legate de controlul nivelului de zgomot. Paragrafe speciale se ocupă de radiația undelor de încovoiere, de răspunsul plăcilor la excitarea cu sunet aerian, ar în încheiere este studiată chestiunea corelației dintre radiație și răspuns.

Fiecare capitol cuprinde numeroase exemple de calcul pentru diferite structuri în diverse cazuri concrete.

Lucrarea mai conține o anexă cu simbolurile utilizate precum și un index de expresii care facilitează identificarea mai rapidă a unei anumite chestiuni.

Bibliografia citată în text este indicată mai ales pentru adîncirea problemelor prezentate și cuprinde peste 150 de lucrări, fără a avea intenția de a fi exhaustivă.

Concepută — în intenția autorilor — mai degrabă ca un manual decît ca un îndreptar, lucrarea se adresează cercetătorilor, fizicienilor, inginerilor și matematicienilor, tuturor celor implicați în soluționarea unor probleme concrete privind reducerea nivelului de zgomot și vibrații, fiind utilă atît celor ce doresc să se inițieze cît și celor care lucrează deja cu bune rezultate în acest domeniu.

H. Paven

O. JUHL PEDERSEN (ed), Proceedings of the 1973 International Conference on Noise Contro Engineering, „Inter-Noise 73" (Lucrările Conferinței Internaționale — 1973 — de Combatere a Zgomotului), Technical University Press, Lyngby, Denmark, 1973, XVIII + 634 pag., 35$.

Volumul conține lucrările prezentate la Conferința Internațională de Combatere a Zgomotului, care a avut loc la Copenhaga, între 22 și 24 august 1973. Organizată de Laboratorul de Acustică al Universității Tehnice Daneze în cooperare cu Institutul de Combatere a Zgomotului din S.U.A., conferința este a doua de acest fel dintr-o serie de conferințe internaționale, privind combaterea zgomotului. Scopul conferinței îl constituie prezentarea sub o formă cît mai accesibilă utilizării imediate, a ultimelor rezultate obținute de grupuri de cercetare consacrate în domeniul combaterii zgomotului și vibrațiilor.

În cadrul conferinței au fost prezentate 96 de lucrări, în șapte secții specializate: A — Combaterea zgomotului industrial, B — Zgomotul utilajelor, C — Combaterea zgomotului în clădiri, D — Zgomotul în colectivitățile urbane, E — Zgomotul provocat de transporturile terestre, F — Zgomotul provocat de aparatele de zbor, G — Metodele și instrumentația folosită pentru măsurători de zgomot.

Sub titlul „Combaterea zgomotului industrial" sînt prezentate 16 lucrări care dezbat probleme majore legate de efectul dăunător al nivelelor ridicate de zgomot și unele soluții

folosite în S.U.A., R. F. Germania, Suedia etc. pentru reducerea nivelului de zgomot. În afara unor lucrări care se referă la aspectele teoretice ale problemei generale, pot fi întîlnite lucrări care abordează cazuri concrete, referitoare la reducerea nivelului de zgomot în industria constructoare de nave, în stațiile de putere, în fabricile de hîrtie, în unele secții speciale ale uzinelor în care nivelul de zgomot și vibrații este ridicat. Un interes deosebit prezintă și lucrările consacrate modului de apreciere a efectului global al surselor de zgomot intermitent, respectiv sursele de erori în măsurătorile de doze de zgomot. În sfîrșit, sînt prezentate și unele aspecte legate de combaterea zgomotului și perfecționarea unor norme de standardizare existente în țările avansate din punct de vedere tehnologic.

Un număr de 14 lucrări sînt consacrate diferitelor probleme legate de reducere a zgomotului utilajelor. Astfel, sînt analizate soluțiile în cazul combaterii zgomotului compresoarelor și mașinilor pneumatice, al motoarelor Diesel, precum și al zgomotului rulmenților, vibratorilor folosiți pentru tasarea betonului, al curelelor de transmisie, elicelor instalațiilor de ventilație, tobelor de eșapament pentru motoarele cu ardere internă etc.

În continuare sînt oferite diferite soluții tehnice pentru realizarea de atenuatori prin reflexie, pe baza teoriei filtrelor acustice reactive precum și pentru eliminarea efectului solicitărilor nestaționare ale rotorului elicei ventilatoarelor.

În secția „Combatere a zgomotului în clădiri", au fost prezentate 14 lucrări care prezintă soluțiile oferite unui larg spectru de probleme specifice, printre care par extrem de interesante cele legate de reducere a zgomotului provocat de traficul rutier, în interiorul clădirilor, de instalațiile de încălzire, canalizare ventilație etc. Pe lîngă aceste aspecte legate de clădirile de locuit, sînt tratate și aspecte specifice unor construcții cu destinație specială (sisteme de stocare a gazului metan, construcții acoperite cu tablă metalică ondulată, școli etc.).

„Zgomotul în colectivitățile urbane", grupează 14 lucrări în care sînt analizate sistematic complexele aspecte care trebuie luate în considerare pentru obținerea unor soluții eficace la rezolvarea acestei probleme. Astfel, sînt prezentate concluziile psihoacustice ale unui studiu interdisciplinar privind efectele zgomotului avioanelor asupra sănătății oamenilor, unele considerații asupra problemelor privind zgomotul traficului feroviar, zgomotul în jurul unităților industriale extinse pe suprafețe mari etc. Ținînd seama de dificultatea problemei, sînt analizate în cîteva lucrări atît metodologiile de identificare a efectului asupra sănătății a surselor majore de zgomot, cît și aspectele economice ale soluțiilor oferite ; de asemenea, sînt prezentate unele rezultate obținute în cadrul unui program european pe termen lung de combatere a zgomotului.

Dacă în secțiunea anterioară se analizau mai ales unele aspecte legate de zgomotul la receptor, în cadrul secțiunii „Zgomotul generat de traficul de suprafață" un număr de 10 lucrări analizează și problema nu mai puțin importantă a combaterii zgomotului la sursă. Sînt analizate soluțiile oferite pentru combaterea zgomotului în traficul feroviar și al traficului pe apă în diferite cazuri speciale ; un important număr de lucrări tratează posibilitățile de combatere a zgomotului autobuzelor, autocamioanelor Diesel de mare tonaj, precum și a zgomotului care apare ca rezultat al interacțiunii roată-sol. În sfîrșit, sînt prezentate unele încercări de modelare și simulare pe calculator a unor probleme legate de propagarea zgomotului de trafic rutier.

Un număr de 7 lucrări sînt dedicate zgomotului provocat de aparatele de zbor. Sînt analizate diferite probleme, de exemplu : zgomotul helicopterelor, limitele posibilităților de reducere a zgomotului avioanelor, aspecte legate de performanțele aviației supersonice și soluțiile de reducere a zgomotului în acest caz, precum și problema privind utilizarea optimă a tehnologiei de combatere a zgomotului. De asemenea, sînt studiate sistemele de evaluare a zgomotului în aeroporturi precum și consecințele stabilirii unor reguli judicioase pentru depoluarea mediului înconjurător de efectul dăunător al zgomotului avioanelor.

Analiza problemelor practice de reducere a nivelului de zgomot presupune stabilirea unor metodologii adecvate a studiului lor experimental, soluțiile însăși, fiind sensibil influențate de

obținerea unor informații corecte asupra datelor problemelor ce trebuie rezolvate. Acest aspect se reflectă și în numărul mare — 21 — de lucrări — consacrate metodelor și instrumentației folosite pentru măsurătorile de zgomot. Astfel, sînt descrise aparatura necesară în studiile privind combaterea zgomotului în colectivități, respectiv un sistem perfecționat de colaționare și prelucrare a datelor privitoare la zgomotul în colectivități; de asemenea, pot fi găsite lucrări consacrate măsurătorilor privind, în general, zgomotul vehiculelor și interpretarea lor precum și asupra nivelului și directivității zgomotului diferitelor tipuri de vehicule. Foarte interesante sînt și lucrările consacrate studiului efectelor neglijării unor ipoteze de bază ale analizelor statistice, precum și identificării surselor de zgomot în mediul înconjurător și efectele propagării aleatoare. În sfîrșit, pot fi găsite și lucrări ce cuprind o importantă cantitate de informație în ceea ce privește testarea sonometrelor, măsurătorile infrasonice, metodele simple și eficace de determinare a nivelului de zgomot în cîmp liber ca și în cîmp închis.

Întrucît rezolvarea problemelor deosebit de complexe legate de combaterea zgomotului presupune nu numai cunoașterea naturii zgomotului și vibrațiilor și a efectelor acestora asupra omului ci și a metodelor corecte corespunzătoare și a instrumentației pentru măsurătorile de zgomot și vibrații folosite de un mare număr de cercetători dintr-un mare număr de specialități, volumul este deosebit de util nu numai prin informațiile pe care le furnizează asupra celor mai recente rezultate obținute în acest domeniu, ci și prin materialul bibliografic deosebit de prețios oferit de lucrările ce fac obiectul acestui volum.

H. Paven

Revista

STUDII ŞI CERCETARI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1848

I. DUMITRESCU

SOLUȚIA NUMERICĂ A UNEI PROBLEME CU CONDIȚII LA LIMITĂ DIN TEORIA CÎMPULUI

În articol este prezentat un procedeu numeric de rezolvare cu ajutorul sistemelor de calcul automat a unei probleme cu condiții la limită în care intervin ecuațiile cu derivate parțiale rot. rot. $\overline{F} = \overline{G}$.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 783 — 794
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

H. DUMITRESCU

DETERMINAREA UNDEI DE COMBUSTIE ÎNTR-O CURGERE SUPERSONICĂ PLANĂ

În lucrare se prezintă o metodă analitică pentru determinarea cîmpului de viteze și presiuni în curgerile supersonice plane, în cadrul cărora se dezvoltă o undă de combustie stabilă și anume: se studiază configurațiile undă de șoc-undă de combustie și expansiune-undă de combustie cu ajutorul unei metode de echivalență, pe care autorul a utilizat-o în cazul curgerii supersonice conice.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 795—806
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. DAVID

FORMULE DE DEBIT DE TIP DUPUIT-FORCHEIMER EXACTE PENTRU CAVITĂȚI DRENANTE DE FORMĂ OARECARE

În lucrare se prezintă o demonstrație privind independența debitului captat de o captare singulară perfectă de gradul de neuniformitate al scurgerii cu suprafață liberă și de înălțimea de izvorîre ce se formează la intrarea apei în captare. Deoarece se face abstracție de forma în plan a captării, rezultatele obținute constituie o generalizare a teoremei lui Cernîi, care se referă la puțul singular.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 807—812
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

E. BOTEZ, C. MITOȘERIU

PRECIZAREA RELAȚIEI PENTRU CALCULUL DEBITULUI LA CURGEREA ULEIURILOR PRIN FANTE MICI ÎN REGIM LAMINAR

În lucrare se studiază influența lungimii canalului de curgere asupra debitului și coeficientului de debit, ținînd seama că acest parametru influențează direct pierderile prin frecare viscoasă. De asemenea, pe baza cercetărilor făcute, s-a stabilit că în regim laminar de curgere relația debit-presiune are formă liniară. Referitor la această relație se prezintă domeniul de valabilitate și valorile coeficientului de proporționalitate C.
Rezultatele prezentate au fost obținute la curgerea prin fante circulare cu diametrul $d = 0{,}2 \ldots 1{,}0$ mm.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 813—827
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

AL. MARINESCU, D. DUMITRESCU

ASUPRA UNOR SOLUȚII EXACTE PRIVIND INTRAREA PORTANTĂ OPTIMĂ A VEHICULELOR SPAȚIALE ÎN ATMOSFERA PLANETARĂ

În lucrare se studiază problema intrării optime în timp minim a unui vehicul spațial în atmosfera planetară, pe o traiectorie plană.
Problema variațională a fost formulată ca o problemă izoperimetrică cu o extremitate mobilă, legile optime de variație a parametrilor mișcării vehiculului fiind obținute exact printr-un procedeu de integrare numerică, spre deosebire de legile optime aproximative obținute analitic în [2] prin neglijarea unor termeni din ecuația extremalei.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 829—838
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

T. PANĂ

VIBRAȚIILE LATERALE DE ÎNCOVOIERE-RĂSUCIRE ALE GRINZII PENDUL. II

În lucrare se stabilește soluția sistemului de ecuații neliniare care guvernează mișcarea vibratorie de încovoiere-răsucire a grinzii produsă de oscilațiile pendulare laterale ale acesteia, și se studiază stabilitatea ei pentru regimurile situate în apropierea primei rezonanțe. Se ajunge la concluzia că mișcarea poate avea stabilitate orbitală numai după amplitudinea vibrației transversale de încovoiere nu depășește o anumită valoare, proporțională cu energia totală a mișcării.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 839—858
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. N. ANTONESCU

STABILIREA EFORTURILOR UNITARE DIN ECLISELE LANȚURILOR CU ROLE ȘI ZALE SCURTE PRIN TENSOMETRIE

Se studiază problema stabilirii eforturilor unitare din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte prin tensometrie electrică datorate atît eforturilor de montaj (asamblări cu strîngere), cît și încercării cu o forță exterioară. Se stabilește metodologia de cercetare și se utilizează un echipament corespunzător ținînd seama de dimensiunile reduse ale eclișelor de lanț și ca urmare de folosirea unor traductori (mărci tensometrice) cu baza foarte mică (1,5 mm). În final se compară rezultatele obținute prin diverse metode teoretice de calcul, expuse în literatura de specialitate, cu cele stabilite experimental.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 859—872
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

V. ULMANU

DETERMINAREA ANALITICĂ A DEFORMAȚIILOR ȘI EFORTURILOR ÎN ÎMBINAREA FILETATĂ CONICĂ, LA ÎNȘURUBAREA CU FORȚĂ DE PRESTRÎNGERE

Se cercetează starea de deformații și eforturi în îmbinarea filetată conică sub acțiunea sarcinii de prestrîngere și a efectului încovoietor al componentelor acesteia distribuite pe spirele filetului, ținînd seama de rigiditatea variabilă a cepului și mufei filetate.
Legea de distribuție a sarcinii de prestrîngere în lungul axei filetului se determină rezolvînd în eforturi ecuația de compatibilitate a principalelor deformații ale filetului.
Determinarea deformației cepului sub acțiunea efectului încovoietor al forțelor distribuite pe spire se efectuează asimilînd cepul cu un înveliș cilindric avînd grosimea de perete variabilă în lungul axei.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 873—890
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. GHEGHEA

CONTRIBUȚII LA STUDIUL UNUI AMORTIZOR ELECTRO-HIDRAULIC DE VIBRAȚII PENTRU MAȘINI-UNELTE

În lucrare se descrie construcția, funcționarea și rezultatele obținute la reducerea amplitudinii oscilațiilor, unui sistem ce stimulează bara de alezat cu ajutorul unui amortizor activ electrohidraulic.
Se prezintă grafice de variație a amplitudinii oscilațiilor în funcție de frecvență și mărimea masei auxiliare.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 891—896
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

C. ISPAS

CONTRIBUȚII PRIVIND STUDIUL UNOR INTERDEPENDENȚE ALE FENOMENELOR DINAMICE LA MAȘINILE DE RECTIFICAT EXTERIOR

În lucrare se studiază interdependența dintre deplasările păpușii portpiatră pe două coordonate generalizate. Concluziile și rezultatele cercetării, cu implicații directe asupra preciziei de prelucrare la rectificare, pot fi folosite în activitatea cercetătorilor și proiectanților mașinilor de rectificat.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 897—907
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. DOBRE

MODELE MATEMATICE CARE DESCRIU MECANISMELE DE BAZĂ ALE RUPERII ROCILOR PRIN FORAJ

Lucrarea prezintă o sinteză a stadiului cunoștințelor asupra mecanismelor de bază ale ruperii rocilor prin foraj și modelele matematice care descriu aceste mecanisme.
În particular, se relevă posibilitățile de utilizare a cunoștințelor de mecanica roților la elaborarea relațiilor fenomenologice de bază ale procesului de foraj.
Datorită dificultăților de cunoaștere a unor aspecte specifice mecanismelor de rupere a rocilor sub acțiunea sarcinilor concentrate, se consideră că, deocamdată, energia consumată pentru ruperea unei unități de volum de rocă reprezintă cel mai mult bun parametru de evaluare și prevedere a proceselor de rupere prin foraj.

St. cerc. mec. apl., tom. 33, nr. 5, 1974, p. 909—925
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

VALENTIN I. VLAD, **Holografie**, 1973, 234 p., 15,50 lei.
D. D. SANDU, **Electronica fizică**, 1973, 516 p., 31 lei.
M. M. NIȚĂ, **Teoria zborului spațial**, 1973, 502 p., 30 lei.
MARIUS PROTOPOPESCU, **Teoria electronică a metalelor**, 1973, 366 p., 23 lei.
VLAD IONESCU, **Sisteme liniare**, 1973, 228 p., 10 lei.
V. I. NIȚU, **Fiabilitatea instalațiilor energetice**, 1973, 362, p., 28 lei.
BAZIL, POPA, VIRGINIA ISCULESCU, **Procese de ardere în cîmp sonor**, 1973, 265 p., 17 lei.
N. DĂNILĂ, **Centrale nucleare-electrice**, 1973, 775 p., 52 lei.
G. MOISIL, **Controlul electric al coroziunii rețelelor subterane**, 1973, 240 p., 9,75 lei.
NICOLAU EDMOND, **Radiația electromagnetică**, 1973, 231 p., 10,50 lei.
M. MIȘICU, **Încovoiere și torsiune**, 1973, 180 p., 20 lei.
ADRIANA NĂSTASE, **Utilizarea calculatoarelor în optimizarea formelor aerodinamice**, 1973, 282 p., 21,50 lei.
I. S. GHEORGHIU, AL. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. III. **Mașini asincrone**, 1971, 534, p., 33 lei.
B. POPA, V. CASIAN, **Teoria și calculul injectoarelor mecanice cu cameră de turbionare**, 1971, 311 p., 21 lei.
DAN PAVELESCU, **Concepții noi, calcul și aplicații în frecarea și uzura solidelor deformabile**, 1971, 330 p., 26 lei.
N. REUS, **Tratarea simbolică a schemelor de comutație**, 1971, 270 p., 11 lei.
I. S. CHEORGHIU, ALEXANDRU S. FRANSUA, **Tratat de mașini electrice**, vol. IV, **mașini sincrone**, 1972, 482, p., 30 lei.
P. P. TEODORESCU, **Dinamica corpurilor liniar elastice**, 1972, 392 p., 24,50 lei.
M. MIȘICU, **Teoria mobilității elastice**, 1972, 428 p., 23,50 lei.
EDMOND NICOLAU, **Cîmpuri și unde electromagnetice**, 1972, 350 p., 21,50 lei.
C. A. VASILESCU, S. FAUR, V. PIMSNER, GH. RĂDULESCU, **Corelațiile dintre combustibilul lichid și motorul cu ardere internă**, 1972, 336 p., 23,50 lei.
CRISTIAN PELECUDI, **Teoria mecanismelor spațiale**, 1972, 512 p., 30 lei.
I. A. ADĂMUȘ, **Analiza propagării undelor electromagnetice pe linii în regim tranzitoriu**, 1972, 374 p., 25 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MECANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 33, NR. 5, 1974, P. 781—930

I. P. Informatia c. 1524

43 832

Lei 40.—